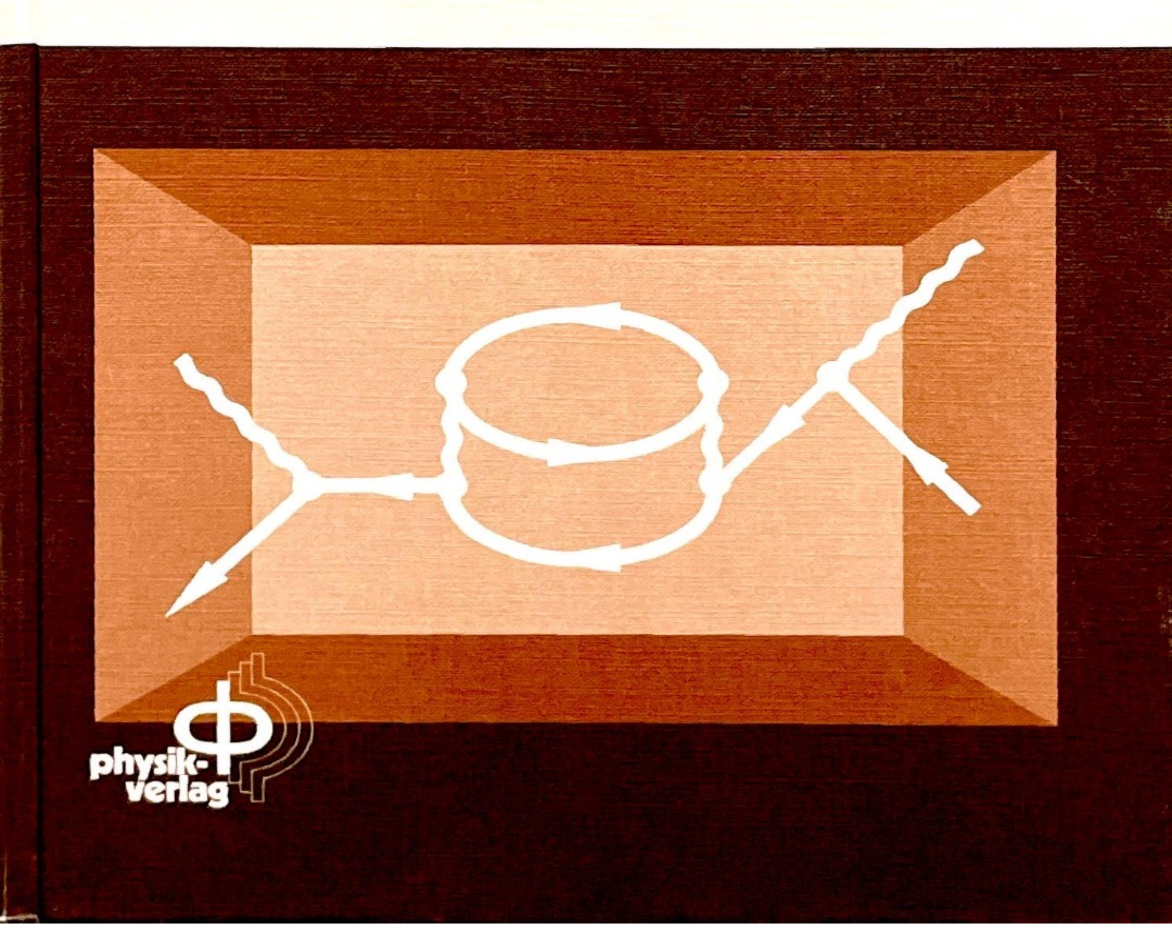
N.N. Bogoljubov / D.V. Sirkov

Quantenfelder

N. N. Bogoljubov/D.V. Širkov

Quantenfelder



Quantenfelder

N. N. Bogoljubov
D. V. Širkov



Quantenfelder

von Nikolaj Nikolaevič Bogoljubov
und Dmitrij Vasil'evič Širkov



Weinheim

Titel der Originalausgabe:
Н. Н. Боголюбов / Д. В. Ширков
Квантовые поля
Москва: Издательство „НАУКА" 1980

Die Ausgabe in deutscher Sprache besorgten:
M. Bordag, F.-M. Dittes und L. Kaschluhn (Übersetzer)
B. Geyer und D. Robaschik (wissenschaftliche Redaktion)

Dieses Buch enthält 55 Abbildungen

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Bogoljubov, Nikolaj N.:

Quantenfelder/von Nikolaj Nikolaevič Bogoljubov u. Dmitrij Vasil'evič Širkov. [Die Ausg. in dt. Sprache besorgten: M. Bordag ...]. — Weinheim: Physik-Verlag, 1984.

Einheitssacht.: Kvantovye polja <dt.>
ISBN 3-87664-105-5

NE: Širkov, Dmitrij Vasil'evič:.

Lizenzausgabe des Physik-Verlages, D-6940 Weinheim

Printed in the German Democratic Republic

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Die Quantenfeldtheorie gehört — zusammen mit der statistischen Physik und der allgemeinen Relativitätstheorie — zu jenen Gebieten der theoretischen Physik, die deren Profil bestimmen und die zu tiefen Einsichten in die Struktur der Materie und deren Erscheinungsformen führten. So fand die Quantenfeldtheorie nicht nur Eingang in die abstrakte algebraische Formulierung der Quantentheorie und Statistik, sie bildet in ihrer nicht-relativistischen Fassung auch die Grundlage der modernen Vielteilchen- und Festkörperphysik. Die vorliegenden Vorlesungen über Quantenfeldtheorie sind dem klassischen Gegenstand dieser Theorie, der relativistischen Theorie der Elementarteilchen, verpflichtet, sie vermitteln sowohl die wichtigsten allgemeinen Ideen und Methoden der modernen Quantenfeldtheorie als auch deren spezielle Rechenverfahren.

Das Buch geht, aufbauend auf die klassische Theorie freier Felder, direkt zu deren Quantisierung und zur störungstheoretischen Formulierung der Quantentheorie wechselwirkender Felder über. Dabei wird jedoch niemals das eigentliche Anliegen der Theorie, die Beschreibung physikalischer Erscheinungen, außer acht gelassen. Deshalb fanden nicht nur die seit langem bewährten Methoden und Modelle eine angemessene Darstellung, sondern es wurde auch der modernen Entwicklung die gebührende Beachtung geschenkt. Viele grundlegende Begriffe (wie spontane Symmetriebrechung, Higgs-Mechanismus, Bogoljubov-Transformation und Dimensionsregularisierung) und die wichtigsten Theorien (wie das φ^4-Modell, die Quantenelektrodynamik und die nichtabelschen Eichfeldtheorien), die z.B. Eingang in die Salam-Weinberg-Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung und die Quantenchromodynamik als Theorie der starken Wechselwirkung fanden, werden erläutert und im Zusammenhang mit ihrer Anwendung dargestellt.

Selbstverständlich können diese Vorlesungen keine der zahlreichen und unter verschiedenem Blickwinkel geschriebenen Monographien über diesen Gegenstand ersetzen, so daß viele, auch wichtige Probleme unausgesprochen bleiben mußten; anders kann das gar nicht sein. Auf der anderen Seite wird die gerade für praktische Fragen so wichtige Störungstheorie ausführlich behandelt. Dabei werden repräsentative Rechnungen explizit ausgeführt und so dem Leser ein Fundus grundlegender Rechentechniken vermittelt. Dem mit der Störungstheorie untrennbar verbundenen Problem der Ultraviolettdivergenzen und der Renormierung wird die erforderliche Aufmerksamkeit gewidmet.

Beachtenswert sind auch die Anhänge. Durch weitergehende Erläuterungen und zahlreiche, für den praktischen Gebrauch nützliche Formeln sind sie vor allem auch für den Spezialisten von Interesse. Das systematische Studium der Quantenfeldtheorie wird schließlich durch die ebenfalls im Anhang formulierten Aufgaben nachhaltig gefördert.

Die beiden Autoren dieser Vorlesungen über Quantenfeldtheorie sind international bekannte Wissenschaftler, die selbst wichtige Beiträge zur Entwicklung der Quantenfeldtheorie geleistet haben. Ihre 1957 in russischer Sprache erschienene und sogleich ins Englische übersetzte „Einführung in die Quantenfeldtheorie" gilt auch heute, nach über 25 Jahren, noch als Standardwerk; es wird viel zitiert und liegt nunmehr in drei russischen und zwei englischen Auflagen vor.

Selbstverständlich hat dieses Buch in mannigfacher Weise als Vorbild für Vorlesungen und andere Lehrbücher gedient. Auch die an der Leipziger Universität gehaltenen Vorlesungen basierten in wesentlichen Zügen darauf.

Nun sind wir in der glücklichen Lage, jene Vorlesungen herausgeben zu können, die die Autoren selbst langjährig an der Moskauer Universität für all jene Studenten gehalten haben, die auf dem Gebiet der theoretischen Physik oder der experimentellen Hochenergiephysik arbeiten wollen.

Im Gegensatz zu der „Einführung" sind die „Vorlesungen über Quantenfeldtheorie" für einen breiten Leserkreis geschrieben, und sie werden allen sich daraus ergebenden Anforderungen in hohem Maße gerecht. Einerseits werden sie dem auf dem Gebiet der experimentellen Hochenergiephysik tätigen Wissenschaftler eine willkommene Hilfe sein, und andererseits dem allgemeininteressierten Theoretiker einen Einblick in die Begriffswelt und Methoden der Quantenfeldtheorie vermitteln. Wir freuen uns daher, ein Buch vorlegen zu können, das eine echte Lücke im bisherigen Lehrmaterial zur theoretischen Physik schließt.

Unser besonderer Dank gilt Prof. Dr. D. V. Širkov sowohl für die Unterstützung und beständige Hilfe bei der Herausgabe dieser deutschen Übersetzung, als auch für die bereitwillige Überarbeitung, insbesondere der die Quantenchromodynamik betreffenden Abschnitte, die im Vergleich zur russischen und zur englischen Ausgabe hier erweitert erscheinen. Wesentlich erleichtert wurde dieses Vorhaben durch die guten Kontakte, die Prof. Dr. D. V. Širkov durch seine langjährige Tätigkeit am Vereinigten Institut für Kernforschung in Dubna und der Moskauer Universität zu den Theoretikern der DDR hat. Wir danken auch Dipl.-Phys. Th. Braunschweig, der die deutsche Übersetzung im Manuskript gelesen und zu deren Verbesserung beigetragen hat.

Leipzig, im Mai 1984 B. Geyer D. Robaschik

Vorwort zur russischen Auflage

Das Ziel dieses Buches besteht vornehmlich darin, Physikstudenten an Universitäten und Hochschulen ein theoretisches Minimum der modernen Quantenfeldtheorie zu vermitteln. Das Buch wendet sich aber auch an alle jene Theoretiker, die auf solchen Gebieten der Physik arbeiten, in denen die Methoden der Quantenfeldtheorie Anwendung finden, und die grundsätzlich auf Quantenvorstellungen basieren, wie das z. B. in der Kernphysik und der Quantenstatistik der Fall ist. Auch Experimentatoren auf den Gebieten der Kernphysik und der Hochenergiephysik werden hier das notwendige theoretische Rüstzeug vorfinden. Für sie muß das Buch jedoch durch Vorlesungen zur Elementarteilchenphysik ergänzt werden. Gleichzeitig kann man das Buch aber auch all jenen als Einführung empfehlen, die auf den Gebieten der Quantenfeldtheorie und der Elementarteilchentheorie zu arbeiten beabsichtigen.

Die Darstellung des Stoffes ist so konzipiert, daß sie einer zweisemestrigen Vorlesungsreihe entspricht. Unsere Erfahrung zeigte, daß parallel zur Vorlesung seminaristische Übungen sehr zu empfehlen sind. Zu diesem Zweck wurde dem Buch ein Teil des technischen Materials als Anhang beigefügt. Dort findet man auch eine Sammlung von Übungsaufgaben, die den Themenkomplexen des Textes entsprechend zusammengestellt sind.

Die Autoren sind dem Redakteur des Buches D. A. Slavnov, den Rezensenten M. A. Braun, L. V. Prochorov, K. A. Ter-Martirosjan sowie B. M. Barbašov, B. V. Medvedev, A. A. Slavnov und N. N. Šumejko für wertvolle Hinweise zum Manuskript sehr dankbar.

Dubna, November 1979 — Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

Methodische Hinweise

Der in diesem Buch dargestellte Stoff entspricht einem 2-semestrigen Kurs mit etwa 30 zweistündigen Vorlesungen und der gleichen Anzahl von Seminaren. Die thematischen Aufgaben, und auch ein Teil des technischen Materials der Anhänge, sollten in diesen Seminaren behandelt werden. Es ist zu empfehlen, die Aneignung des Übungsstoffes zweimal im Semester in Form von Konsultationen zu überprüfen.

Diejenigen Abschnitte des Buches, die beim ersten Studium ausgelassen werden können, sind im Inhaltsverzeichnis mit einem Stern bezeichnet. Die verbleibenden Abschnitte sind als „Minimum" anzusehen, falls den Studenten die notwendigen Kenntnisse aus den Vorlesungen „Grundlagen der relativistischen Physik" und „Quantentheorie der Vielteilchensysteme" fehlen, oder falls das Studienjahr verkürzt ist.

Zu diesem Minimum gehören (Der Stern bezeichnet die verkürzten Vorlesungen, die nach Auslassung der im Inhaltsverzeichnis kenntlich gemachten Abschnitte entstehen.):
1. Semester: Vorlesungen 1–5, 6*, 7, 8*, 9*, 10*, 14, 17* und 18 (insgesamt 13 Vorlesungen),
2. Semester: Vorlesungen 19*, 20–22, 23*, 24–26, 27*, 28, 30, 31 und 33* (insgesamt 13 Vorlesungen).

Dieses Minimum kann in Abhängigkeit von den konkreten Bedingungen und den Neigungen des Lesenden durch eine geeignete Auswahl der ausgelassenen Abschnitte ergänzt werden. Wir empfehlen hierfür in erster Linie die Abschnitte 9.4, 10.3, 12, 23.3 und 29, und aus dem verbleibenden Material noch die Kombinationen (a) der Abschnitte 8.4, 8.5, 11, 19.4, 32 und Anhang VIII, oder (b) der Vorlesungen 15 und 16, die jeweils im Zusammenhang dargestellt werden sollten.

Voraussetzung für das Verständnis der vorliegenden Vorlesungen ist die Kenntnis des Standard-Kurses zur Quantenmechanik (insbes. die der o. g. Kapitel); Grundkenntnisse aus der Theorie der Lie-Gruppen und ihrer Darstellungen (insbes. der Darstellungen der Poincaré-Gruppe), sowie der Physik der Elementarteilchen sind wünschenswert.

Einige Bezeichnungen und Konventionen

Wir beginnen unsere Darlegungen mit der Einführung einiger Bezeichnungen und Konventionen. Als erstes legen wir fest, daß alle Komponenten von 4-Vektoren reell sein sollen. Einen 4-Vektor $a = (a^0, \boldsymbol{a})$, der aus der nullten (zeitlichen) Komponente a^0 und dem räumlichen Vektor $\boldsymbol{a}$ besteht, bezeichnen wir traditionsgemäß als kontravarianten 4-Vektor und kennzeichnen seine Komponenten mit oberen Indizes

$$a^\nu = (a^0, a^1, a^2, a^3)\,.$$

Das Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist dann durch

$$ab = a^0b^0 - \boldsymbol{ab} = a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3$$

gegeben. Es ist angebracht, dieses Produkt in der Form

$$ab = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

zu schreiben, wobei $g_{\mu\nu}$ der (diagonale) metrische Tensor ist, d. h.

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu\,, \qquad g_{00} = 1; \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1\,,$$

der sich durch das Vorzeichen vom bekannten Minkowski-Tensor unterscheidet. Der Übergang von kontravarianten Komponenten a^ν zu kovarianten Komponenten a_μ (Senken der Indizes) erfolgt mit Hilfe des metrischen Tensors gemäß

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu\,, \qquad a^\mu = g^{\mu\nu}a_\nu\,, \qquad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\,,$$

d. h.

$$a_0 = a^0\,, \qquad a_k = -a^k \quad (k = 1, 2, 3)\,, \qquad a_\nu = (a^0, -\boldsymbol{a})\,.$$

Hierbei und im weiteren wollen wir vereinbaren, daß *über doppelt auftretende Indizes summiert* wird, das Summenzeichen lassen wir dabei weg. Summationen über die drei räumlichen Komponenten bezeichnen wir mit lateinischen Buchstaben (aus der Mitte des Alphabets); also

$$\boldsymbol{ab} = a_nb_n = a^kb^k = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,.$$

Bei Summationen über alle vier Komponenten (0, 1, 2, 3) wählen wir für die Indizes griechische Buchstaben

$$ab = a^\nu b_\nu = a_\mu b^\mu = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu}a_\mu b_\nu\,.$$

Gelegentlich werden wir zur Vereinfachung langer Ausdrücke beide griechische Indizes oben oder unten schreiben, d. h.

$$A_\nu B_\nu = A^\mu B^\mu \equiv AB = A_\nu B^\nu\,,$$

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,.$$

Damit bedeutet also das Vorhandensein zweier gleicher griechischer Indizes in verschiedenen Faktoren unabhängig von ihrer Anordnung *immer* kovariante Summation.

Da bei der Behandlung einer relativistischen Feldtheorie naturgemäß zumeist 4-Vektoren und -Tensoren auftreten, die sich gemäß der Lorentz-Gruppe transformieren (vgl. Ab-

schnitt 1.4.), lassen wir künftig die explizite Kennzeichnung ihrer Dimension $d = 4$ weg, die räumlichen Komponenten sind im gesamten Buch halbfett gesetzt und werden gewöhnlich auch als räumliche Vektoren etc. bezeichnet.

Die Indizes, die sich auf innere Symmetriegruppen beziehen (z. B. Isospin-Indizes), bezeichnen wir in der Regel mit lateinischen Buchstaben $(a, b, \ldots)$.

Das Symbol $\hat{a}$ bedeutet das Skalarprodukt des Vektors a^ν mit den vier Dirac-Matrizen

$$\hat{a} = a^\nu \gamma_\nu = a_\nu \gamma^\nu .$$

Für Ableitungen nach ko- und kontravarianten Komponenten benutzen wir des öfteren die folgenden Kurzbezeichnungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu} = \partial^\nu u = u^{,\nu} , \qquad \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^\nu} = \partial_\nu \varphi_a = \varphi_{a,\nu} ,$$

wobei

$$\varphi_a^{,\mu} = g^{\mu\nu} \varphi_{a,\nu}$$

gilt. Der d'Alembert-Operator

$$\square = \triangle - \partial_0^2$$

stellt sich dann als

$$\square = -\partial^\nu \partial_\nu$$

dar.

Im gesamten Buch wird das sogenannte *rationale Maßeinheitensystem* verwendet, in dem Lichtgeschwindigkeit und Plancksche Konstante gleich Eins gesetzt sind, d. h. $c = \hbar = 1$. In diesem System haben Energie und Impuls die Dimension einer Masse oder einer reziproken Länge, und die Zeit $x_0 = t$ hat die Dimension einer Länge

$$[E] = [\boldsymbol{p}] = m = l^{-1} , \qquad [x_0] = [\boldsymbol{x}] = l = m^{-1} .$$

Die vierdimensionale Fourier-Transformation schreiben wir zumeist in der Gestalt

$$f(x) \sim \int e^{-ipx} \tilde{f}(p) \, dp , \qquad \tilde{f}(p) \sim \int e^{ipx} f(x) \, dx ;$$

das Vorzeichen im Exponenten ist dabei in Analogie zur Quantenmechanik entsprechend dem ersten Summanden gewählt worden

$$f(x^0, \boldsymbol{x}) = f(t, \boldsymbol{x}) \sim \int e^{-iEt} \tilde{f}(E, \boldsymbol{x}) \, dE .$$

Für die dreidimensionale Fourier-Transformation gilt daher:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \sim \int e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} \tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}) \, d\boldsymbol{p} , \qquad \tilde{\varphi}(\boldsymbol{p}) \sim \int e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} \varphi(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} .$$

Eine Ausnahme hiervon machen die Formeln für die positiv-frequenten Anteile sowohl der Feldfunktionen als auch der Green-Funktionen. Die Normierungsfaktoren (Potenzen von 2π) sind an verschiedenen Stellen des Buches unterschiedlich gewählt worden.

Die Formeln sind innerhalb jeder einzelnen Vorlesung und jedes Anhangs fortlaufend numeriert und tragen zur eindeutigen Kennzeichnung zusätzlich die Nummer der Vorlesung bzw. des Anhangs, die als erstes Symbol steht. Dementsprechend verweist (8.6) bzw. (A II.6) auf Formel 6 in der Vorlesung bzw. im Anhang A II.

Die Literatur wird im Text durch Nummern in eckigen Klammern zitiert, die vollständigen bibliographischen Angaben sind im Literaturverzeichnis am Ende des Buches enthalten.

1. Teilchen und Felder

1.1. Teilchen und ihre wichtigsten Eigenschaften

Die Quantenfeldtheorie ist eine physikalische Theorie der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen. Sie stützt sich dabei auf den engen Zusammenhang zwischen relativistischen Teilchen und Quantenfeldern, der sich durch die Quantisierung klassischer Felder ergibt. Die Eigenschaften der Quantenfelder stehen daher in enger Beziehung zu den Eigenschaften der Teilchen. Deshalb geben wir zunächst die grundlegenden Eigenschaften der Teilchen an.

Eine wichtige Eigenschaft jedes relativistischen Teilchens ist seine *Ruhmasse* m. Die aus der Relativitätstheorie bekannte Beziehung

$$E^2 - c^2\boldsymbol{p}^2 = m^2c^4$$

verknüpft diese Masse m des Teilchens mit seiner Energie E und seinem Impuls $\boldsymbol{p}$: Im rationalen Maßeinheitensystem lautet diese Relation:

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2 .$$

Hier kann die Masse auch in Energieeinheiten angegeben werden; z.B. gilt für die Elektronenmasse[1]) $m_e = 9{,}109534(47) \cdot 10^{-28}$ g $\triangleq 0{,}5110034(14)$ MeV, und für die Protonenmasse $m_p = 938{,}2796(27)$ MeV $\simeq 0{,}94$ GeV usw.

Das zweite wesentliche Charakteristikum eines Teilchens ist dessen *Spin* (d. h. sein Eigendrehimpuls). In Übereinstimmung mit der Quantenmechanik ist der Spin eines Teilchens eine quantisierte Größe, die nur ganzzahlige Vielfache von $\hbar/2$ annehmen kann, wobei

$$\hbar = h/2\pi = 1{,}0545887(57) \cdot 10^{-27}\,\text{erg} \cdot \text{s} = 6{,}582173(17) \cdot 10^{-22}\,\text{MeV}$$

die Plancksche Konstante ist. Deshalb ist der Spin sowohl des Elektrons als auch des Protons in dem von uns verwendeten rationalen Maßeinheitensystem gleich $\frac{1}{2}$, während der Spin des Photons (des γ-Quants) gleich eins ist:

$$s_e = s_p = \tfrac{1}{2}, \qquad s_\gamma = 1 .$$

Die dritte wesentliche Teilcheneigenschaft ist die *elektrische Ladung*, die ebenfalls quantisiert ist. Die Ladungen aller beobachtbaren[2]) Teilchen sind ganzzahlige Vielfache der sogenannten „Elementarladung" $e = 4{,}803242(14) \cdot 10^{-10}$ CGS-Einheiten $= 1{,}6021892(46) \cdot 10^{-19}$ C, die gleich der Elektronenladung ist. Im Unterschied zum Spin, dessen Quantennatur klar ist, bleibt die Diskretheit der elektrischen Ladung ein bislang ungelöstes Rätsel.

Eine letzte wichtige Teilcheneigenschaft ist seine *mittlere Lebensdauer* τ. Es ist nämlich so, daß nur einige Teilchen im freien Zustand unendlich lange existieren können, also absolut stabil sind. Zu ihnen gehören das Elektron e^-, das Proton p,

---

[1]) Hier und im folgenden führen wir die neuesten Meßwerte (1982) an. Die in Klammern gesetzten Ziffern geben die Unbestimmtheit einer Standardabweichung an, bezogen auf die jeweils letzte Dezimale des Meßwertes, d. h. $0{,}5110034(14) \equiv 0{,}5110034 \pm 0{,}0000014$.

[2]) Die elektrischen Ladungen der Quarks (hypothetische Komponenten der Hadronen) werden als einfache Brüche ($\pm 1/3$, $\pm 2/3$) von e angenommen. Allerdings wurden Quarks im freien Zustand bisher niemals beobachtet.

das Photon und die Neutrinos ν[1]), sowie deren Antiteilchen Positron e^+, Antiproton $\bar{p}$ und Antineutrino $\bar{\nu}$. Alle anderen Teilchen sind instabil und zerfallen nach dem Exponentialgesetz $\exp(-t/\tau)$ spontan in andere Teilchen; der Koeffizient τ wird als mittlere Lebensdauer bezeichnet. So zerfällt z.B. das Neutron nach dem Schema (β-Zerfall)

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e ,$$

seine Lebensdauer beträgt $\tau_n = 925(11)\,s \cong 15{,}4$ min. Das geladene Pi-Meson π^+ zerfällt gemäß

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$

in Müon und Müon-Neutrino; es hat eine Lebensdauer von $\tau_{\pi^+} = 2{,}6030(23) \cdot 10^{-8}$ s.

In der Instabilität von Teilchen äußert sich die wichtigste Eigenschaft der Mikrowelt — die *gegenseitige Umwandelbarkeit* von Teilchen ineinander, die sich als Folge ihrer Wechselwirkung ergibt. Diese Wechselwirkungen der Teilchen gliedern sich in vier grundlegende Typen: die starke, die elektromagnetische, die schwache und die Gravitations-Wechselwirkung. Wir wollen uns jetzt nicht näher mit den Eigenschaften dieser Wechselwirkungen befassen (dies erfolgt später in Vorlesung 10). Es sei lediglich bemerkt, daß infolge von Wechselwirkungen Teilchen in der Regel in andere Teilchen übergehen, falls solche Übergänge nicht durch irgendwelche Erhaltungssätze (wie z.B. für Energie, Impuls, Drehimpuls, elektrische Ladung, Baryonenladung, Strangeness u. a. m.) verboten sind. Das Fehlen bestimmter Übergänge, die nach den bekannten Erhaltungssätzen erlaubt wären, deutet seinerseits auf die Existenz eines neuen, noch unbekannten Erhaltungssatzes hin.

1.2. Erhaltungssätze

Die Erhaltungssätze folgen aus Symmetrien der Naturgesetze, welche die Unbeobachtbarkeit einiger Charakteristika physikalischer Objekte widerspiegeln. So folgt der Energieerhaltungssatz für konservative Systeme aus Invarianzeigenschaften gegenüber kontinuierlichen Zeittranslationen. Die Invarianz gegenüber Zeittranslationen entspricht der Unbeobachtbarkeit einer absoluten Zeit. Einen analogen Zusammenhang stellt das Gesetz von der Erhaltung der Parität dar, das die Invarianz gegenüber räumlichen Spiegelungen und damit die Willkür der Wahl von „links“ und „rechts“ (d. h. die Unbeobachtbarkeit von „absolut Linkem“ und „absolut Rechtem“) widerspiegelt.

Die meisten Erhaltungssätze sind eine Folge kontinuierlicher Symmetrien und können aus diesen mit Hilfe des Noether-Theorems abgeleitet werden (vgl. Abschnitt 2.3.). Hervorzuheben sind der Energie-, der Impuls- und der Drehimpulserhaltungssatz, welche den Raum-Zeit-Symmetrien physikalischer Objekte und Systeme entsprechen. Diese Symmetrien resultieren aus so allgemeinen Eigenschaften wie der Unbeobachtbarkeit einer absoluten Zeit und eines absoluten Raumes (Symmetrie bezüglich Raum-Zeit-Translationen), der Isotropie des Raumes und der Äquivalenz von Koordinatensystemen, die sich relativ zueinander

[1]) Außer den beiden bekannten Arten von Neutrinos, dem Elektron-Neutrino ν_e und dem Müon-Neutrino ν_μ, existiert noch ein Tauon-Neutrino ν_τ als „Partner“ des 1975 entdeckten schweren τ-Leptons.

mit konstanter Geschwindigkeit bewegen (Symmetrie bezüglich räumlicher und Lorentz-Drehungen). Die entsprechenden Erhaltungssätze gelten allgemein, d. h., sie sind charakteristisch für alle Teilchen und Wechselwirkungen, und sind in allen physikalischen Prozessen erfüllt.

Innerhalb der Genauigkeitsgrenzen moderner Experimente gelten die Erhaltungssätze für die elektrische und baryonische Ladung ebenso universell. Diesen Erhaltungssätzen entsprechen als Symmetrietransformationen kontinuierliche Phasentransformationen der Wellenfunktion. Allerdings entbehren sie einer unmittelbar anschaulichen physikalischen Deutung, da sie nicht mit der Raum-Zeit-Struktur zusammenhängen. Derartige Symmetrien heißen daher *innere Symmetrien.*[1])

Zur Klasse der inneren Symmetrien gehören die Isotope Symmetrie (oder Isospinsymmetrie), aber auch einige andere, z.B. die sogenannte unitäre Symmetrie. Die meisten inneren Symmetrien und die mit ihnen zusammenhängenden Erhaltungsgrößen tragen approximativen Charakter. Außer den beiden oben erwähnten Ausnahmen (elektrische Ladung und Baryonenzahl) sind die den inneren Symmetrien entsprechenden Erhaltungssätze nur für einige Wechselwirkungen streng gültig, für die übrigen sind sie nicht oder nur genähert gültig. So ist die Isospin-Invarianz (der Erhaltungssatz für den Isospin I) für starke Wechselwirkungen erfüllt, gilt aber nicht für elektromagnetische und schwache Wechselwirkungen. Der Paritätserhaltungssatz (genauer: für die räumliche Parität), der der Symmetrie der Wellenfunktion bezüglich Spiegelung der räumlichen Koordinaten am Ursprung entspricht, gilt für starke und elektromagnetische, nicht aber für schwache Wechselwirkungen.

Ähnliches trifft auch für die Erhaltungssätze von Strangeness und der Quantenzahl Charm zu, die zusammen mit der Isospin-Invarianz die unitäre Symmetrie mitbegründen. In Tab. 1.1 sind diese Symmetrieeigenschaften zusammengefaßt.

Tabelle 1.1

Symmetrieeigenschaften der Wechselwirkungen und physikalische Erhaltungsgrößen

Physikalische Größen	Wechselwirkungstypen		
	starke W.	elektromagnetische W.	schwache W.
elektrische Ladung	+	+	+
Baryonenzahl	+	+	+
Parität	+	+	−
Isospin	+	−	−
Strangeness	+	+	−

(+) = bleibt erhalten; (−) = bleibt nicht erhalten

[1]) Neuere theoretische Untersuchungen im Rahmen einheitlicher Feldtheorien wie z.B. der GUT-Modelle (sogenannte "Grand Unified Theories") geben eine Erklärung für die Quantisierung und Erhaltung der elektrischen Ladung; gleichzeitig führen diese Modelle zu einer Verletzung der Erhaltung der Baryonenzahl, die sich in der Instabilität des Protons mit einer mittleren Lebensdauer $\tau_p \sim 10^{31} \ldots 10^{33}$ Jahren ausdrückt.

Auf Grund ihrer außerordentlich geringen Stärke wollen wir die Eigenschaften der Gravitation hier nicht diskutieren. Zur Illustration sei nur bemerkt, daß die Kraft der Gravitationsanziehung zweier Protonen ungefähr 10^{37}mal kleiner ist als die Kraft ihrer elektrostatischen Abstoßung.

1.3. Der Zusammenhang von Teilchen und Feld

Ein Feld stellt ein physikalisches System mit unendlich vielen Freiheitsgraden dar. Man gelangt ganz natürlich zum Begriff des Feldes, wenn man die den Vorstellungen der speziellen Relativitätstheorie widersprechende Annahme einer momentanen Wechselwirkung über beliebige Abstände hinweg (Newtons actio in distans) durch das Nahwirkungsprinzip ersetzt (siehe [19], Teil II, § 6] und [23] S. 12). Deshalb nehmen wir an, daß der Raum zwischen den Teilchen durch ein Feld „ausgefüllt" ist, dem die Übertragung von Störungen zwischen verschiedenen Raum-Zeit-Punkten mit einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit zukommt. Somit wird die Einführung klassischer Felder in die Physik durch Überlegungen zur relativistischen Invarianz diktiert. In der Teilchentheorie hingegen spielen relativistische Quantenfelder eine zentrale Rolle.

Das *quantisierte Wellenfeld* bildet das fundamentale physikalische Konzept für die Formulierung der Dynamik der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen. Damit können verschiedene Zustände von Vielteilchensystemen durch ein einziges physikalisches Objekt — das Raum-Zeit-abhängige Quantenfeld — beschrieben werden. Dieses Quantenfeld ergibt sich durch die Quantisierung klassischer Felder; infolgedessen nehmen die Feldfunktionen Operatorcharakter an und lassen sich durch Teilchenerzeugungs- und -vernichtungsoperatoren ausdrücken. Dies ermöglicht die Beschreibung des wichtigsten Phänomens der Elementarteilchen, und zwar ihrer gegenseitigen Umwandlung.

Ein seit langem gut bekanntes Beispiel für ein klassisches Feld ist das elektromagnetische Feld, das die Wechselwirkung von elektrisch geladenen Teilchen beschreibt. Die klassische, auf den Maxwell-Gleichungen basierende Behandlung führt zu einer reinen Wellenvorstellung über den Elektromagnetismus. In methodischer Hinsicht ist es manchmal zweckmäßig, ein kontinuierliches System, d. h, ein Feld, als Grenzwert eines diskreten mechanischen Systems mit einer großen, gegen unendlich strebenden Anzahl N von Freiheitsgraden aufzufassen, Jedem Freiheitsgrad entspricht dann ein Oszillator des Feldes. Durch eine Quantisierungsprozedur können dann die korpuskularen Eigenschaften des Lichts beschrieben werden. Dabei werden dem Feld diskrete Energiequanten zugeordnet, die den verschiedenen möglichen Energiezuständen der Feldoszillatoren entsprechen. Die Quanten des elektromagnetischen Feldes, die Photonen, besitzen die Ruhmasse Null, tragen keine elektrische Ladung und haben den Spin $s = 1$. Die letzte Eigenschaft entspricht den Polarisationseigenschaften des klassischen Feldes, das deshalb durch einen Satz von Feldfunktionen — die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärken oder durch die Komponenten des elektromagnetischen Potentials A_μ — beschrieben werden kann.

Die den anderen Teilchen entsprechenden Felder spiegeln ebenfalls deren Eigenschaften, wie Spin, Ladung u. a. diskrete Charakteristika wider. Nach der Quantisierung werden die Feldquanten gewöhnlich mit den entsprechenden Teilchen identifiziert.

Den wechselwirkenden Teilchen wird nun ein System gekoppelter (Differential-) Gleichungen für die unterschiedlichen Felder zugeordnet. Nach der Quantisierung beschreiben die für die Kopplung dieser Gleichungen verantwortlichen Terme (Lagrange- oder Hamilton-Dichte der Wechselwirkung — siehe Vorlesung 10.) elementare Wechselwirkungsakte der verschiedenen Teilchen. Eine anschauliche Interpretation solcher Ausdrücke wird durch die Feynman-Regeln gegeben (siehe Vorlesungen 19. und 20.).

Die Betrachtung der Wechselwirkung von Teilchen und Feldern verschieben wir zunächst auf später und beginnen mit der Untersuchung von Eigenschaften freier Felder und deren Quantisierung.

1.4. Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Zuvor untersuchen wir jedoch die Transformationsgesetze der Felder gegenüber relativistischen Koordinatentransformationen. Dazu sei an einige Definitionen erinnert. (Eine kurze Abhandlung der allgemeinen Theorie stetiger Gruppen und ihrer Darstellungen findet der Leser im Anhang III.).

Die *vollständige* (oder auch allgemeine orthochrone) *Lorentz-Gruppe* besteht aus den homogenen linearen Transformationen der vier Raum-Zeit-Koordinaten x^ν, die die quadratische Form

$$x^2 = x_\nu x^\nu = (x^0)^2 - \boldsymbol{x}^2$$

invariant lassen, und die die Richtung der Zeit x^0 nicht ändern. Diese Gruppe umfaßt sowohl räumliche Drehungen und Lorentz-„Drehungen" in den Ebenen x^0x^1, x^0x^2, x^0x^3 (d. h., Transformationen zwischen Koordinatensystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen), als auch Raumspiegelungen und alle Produkte solcher Transformationen. Lassen wir außerdem die Zeitspiegelungen zu, so erhalten wir die allgemeine Lorentz-Gruppe.

In der Physik spielt die aus den Transformationen der vollständigen Lorentz-Gruppe und den Raum-Zeit-Translationen zusammengesetzte Transformationsgruppe eine große Rolle. Sie heißt *inhomogene Lorentz-Gruppe* (oder auch *vollständige Poincaré-Gruppe*). Die Invarianz bezüglich dieser Gruppe bezeichnen wir als *relativistische Invarianz*, während wir unter *Lorentz-Invarianz* nur die Invarianz bezüglich der homogenen Lorentz-Gruppe verstehen.

Im weiteren betrachten wir nun die Transformationsgesetze der Felder gegenüber Koordinatentransformationen der vollständigen Poincaré-Gruppe

$$x \to x' = P(\omega; x)\,. \tag{1.1}$$

Hier bezeichnet $\omega = (L, a)$ die Gesamtheit der Parameter, die Translationen (a) und (Raum-Zeit-)Drehungen (L) beschreiben, wobei

$$x'_\nu = L_{\nu\mu} x^\mu + a_\nu\,, \qquad L_{\nu\sigma} g^{\sigma\varrho} L_{\mu\varrho} = g_{\nu\mu} \tag{1.2}$$

gilt.

Das Feld $u(x)$ besteht aus einer oder mehreren, in jedem Bezugssystem definierten Funktionen der Koordinaten x^ν (einkomponentiges bzw. mehrkomponentiges Feld).

Beim Übergang von einem Bezugssystem x zu dem vermöge der Transformation (1.2) gegebenen Bezugssystem x' erfolgt zugleich eine homogene lineare Trans-

formation der Komponenten des Feldes:

$$u(x) \to u'(x') = \Lambda(\omega)\, u(x)\,, \tag{1.3}$$

wobei sich die Transformationsmatrix Λ vollständig aus der Matrix der Lorentz-Transformation (1.2) bestimmt, d. h., sie hängt von denselben Parametern wie L ab.

Dabei ist zu beachten, daß sich die Transformation (1.3) nicht auf eine Substitution der Argumente x durch x' zurückführen läßt, weil sie der Transformation des Koordinatensystems und nicht der Verschiebung des Objektes $u(x)$ von einem Punkt des Raumes in einen anderen entspricht.

Jeder Lorentz-Transformation L entspricht eine Matrix Λ_L, wobei dem Einselement der Gruppe die Einheitsmatrix $\Lambda = 1$ entspricht. Dem Produkt zweier Elemente L_1 und L_2 der Lorentz-Gruppe korrespondiert das Produkt der entsprechenden Matrizen, also

$$\Lambda_{L_1L_2} = \Lambda_{L_1}\Lambda_{L_2}\,.$$

Eine Menge von Matrizen mit diesen Eigenschaften vermittelt eine *lineare Darstellung* dieser Gruppe. Die Matrizen Λ von endlichem Rang bilden eine endlichdimensionale Darstellung der Lorentz-Gruppe. Der Rang der Darstellung wird durch die Dimension der Matrizen, d. h. durch die Anzahl der Komponenten von u, bestimmt.

Deshalb können die zulässigen Wellenfunktionen und ihre Transformationsgesetze durch das Studium endlichdimensionaler (irreduzibler) Darstellungen der Lorentz-Gruppe bestimmt werden. Untersuchungen zur Darstellungstheorie von Gruppen führen zu folgendem Ergebnis:

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe können ein- bzw. zweideutig sein, und zwar je nachdem, ob die Zuordnung $L \to \Lambda_L$ ein- bzw. zweideutig ist. Zweideutige Darstellungen sind in der Physik deshalb von Bedeutung, weil die Felder im allgemeinen nicht unmittelbar beobachtbar sind, z.B. gehen die sich nach zweideutigen Darstellungen transformierenden Felder in beobachtbare Größen immer in bilinearen Kombinationen ein. Die Mehrdeutigkeit des Operators Λ_L muß aber so beschaffen sein, daß sich beobachtbare Größen bei beliebiger Lorentz-Transformation L stets eindeutig transformieren. Außerdem ist es notwendig, daß die Operatoren Λ_L stetige Funktionen der Parameter der Transformationen L sind, d. h., daß einer unendlich kleinen Transformation des Koordinatensystems eine unendlich kleine Transformation der Felder entspricht. Diese Forderungen führen dazu, daß alle Darstellungen der Lorentz-Gruppe in zwei Klassen zerfallen. Die erste ist durch eine eindeutige Beziehung $L \to \Lambda_L$ charakterisiert und enthält die eindeutigen sogenannten *Tensor-* und *Pseudotensordarstellungen* (Tensoren und Pseudotensoren unterscheiden sich durch ihr Verhalten gegenüber Raum-Spiegelungen; vgl. Ende dieses Abschnitts). Die Felder, die sich nach diesen Darstellungen transformieren, heißen *Tensoren* (Pseudotensoren) und sind in einigen Fällen direkt beobachtbar (elektromagnetisches Feld).

Das Transformationsgesetz eines Tensors $T^{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}$ N-ter Stufe hat bei stetigen Koordinatentransformationen folgendes Aussehen:

$$T'_{\nu_1,\ldots,\nu_N}(x') = \frac{\partial x'_{\nu_1}}{\partial x_{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\nu_N}}{\partial x_{\mu_N}}\, T_{\mu_1,\ldots,\mu_N}(x) \tag{1.4}$$

oder, in den Bezeichnungen (1.2),

$$T'^{\nu_1,\ldots,\mu_N}(x') = L^{\nu_1}_{\mu_1} \cdots L^{\nu_N}_{\mu_N} T^{\mu_1,\ldots,\mu_N}(x)\,.$$

Die zweite Klasse von Darstellungen ist durch die zweideutige Zuordnung $L \to \pm\Lambda_L$ gekennzeichnet. Diese Darstellungen heißen *Spinordarstellungen,* und die entsprechenden Größen *Spinoren.* Das Transformationsgesetz der Spinoren hat eine kompliziertere Struktur. Es ist für die einfachsten Spinoren im Anhang II. angegeben. An dieser Stelle sei nur bemerkt, daß das für Translationen

$$x'^{\nu} = x^{\nu} + a^{\nu}$$

aus (1.4) folgende Transformationsgesetz von Tensorgrößen

$$u(x) \to u'(x') = u(x) \tag{1.5}$$

auch für Spinoren gültig ist.

Wir geben jetzt noch die einfachsten tensoriellen Darstellungen und die ihnen entsprechenden Größen an. Ein Tensor nullter Stufe, der sich gegenüber beliebigen stetigen Transformationen gemäß (1.5) transformiert, ist invariant und heißt *Skalar* (*Pseudoskalar*).

Ein Tensor erster Stufe transformiert sich bei Koordinatendrehungen gemäß

$$u'^{\nu}(x') = L^{\nu}_{\mu} u^{\mu}(x) = L^{\nu\mu} u_{\mu}(x) \tag{1.6}$$

und wird *kontravarianter Vektor* (*Pseudovektor*) genannt. Der ihm zugeordnete *kovariante Vektor*

$$u_{\nu}(x) = g_{\nu\mu} u^{\mu}(x)$$

transformiert sich gemäß

$$u'_{\nu}(x') = L^{\mu}_{\nu} u_{\mu}(x) \,. \tag{1.7}$$

Nun lassen sich auch die entsprechenden Formeln für Tensoren zweiter und höherer Stufe mit unterschiedlicher Indexstellung aufschreiben.

Betrachten wir nun räumliche Inversionen P, d. h. Raum-Spiegelungen (aller drei räumlichen Achsen)

$$x \to x' = Px\,, \qquad x'_0 = x_0\,, \qquad \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}\,. \tag{1.8}$$

Die entsprechenden Transformationsgesetze der Felder werden hier nicht durch (1.4) bestimmt, sondern müssen extra formuliert werden. Da zweimalige Raumspiegelung der Identität entspricht ($P^2 = 1$), folgt aus der Eindeutigkeit der Tensordarstellung, daß das Transformationsgesetz für die Tensoren $T^{\cdots}(x)$ lediglich zwei Formen haben kann:

$$PT(x) = T'(x') = T'(Px) = \pm T(x)\,.$$

Der Tensor nullter Stufe, der sein Vorzeichen bei der Inversion nicht ändert,

$$Pu(x) = +u(x)\,, \tag{1.9}$$

heißt *Skalar*; anderenfalls gilt

$$Pu(x) = -u(x)\,, \tag{1.10}$$

und man nennt ihn *Pseudoskalar.*

Wenn ein Tensor erster Stufe bei der Transformation P lediglich das Vorzeichen der räumlichen Komponenten ändert,

$$PV^{\mu}(x) = V_{\mu}(x)\,,$$

d. h.

$$PV^0(x) = V^0(x)\,, \qquad \boldsymbol{PV}(x) = -\boldsymbol{V}(x)\,, \tag{1.11}$$

so heißt er *Vektor*. Wenn anderenfalls nur die zeitliche Komponente ihr Vorzeichen ändert,

$$PV^\mu(x) = -V_\mu(x)\,,$$

d. h.

$$PV^0(x) = -V^0(x)\,, \qquad \boldsymbol{PV}(x) = \boldsymbol{V}(x)\,, \tag{1.12}$$

so sprechen wir von einem *Pseudovektor* (*axialen Vektor*). Allgemein kann man das Transformationsgesetz von Pseudotensoren durch die Formeln (1.4) beschreiben, wenn deren rechte Seite mit der Determinante der Koordinatentransformation multipliziert wird. Die Beziehungen (1.9), (1.10), und die zu ihnen analogen Formeln für Tensoren, definieren die *Parität* der Felder bzw. der ihnen entsprechenden Teilchen. Diese Eigenschaft spielt eine wesentliche Rolle bei der Diskussion der möglichen Wechselwirkungen von Feldern (siehe Abschnitt 10.2.).

Freie klassische Felder

2. Dynamische Invarianten der Felder

2.1. Die Lagrange-Dichte

In dieser Vorlesung legen wir den bereits in Abschnitt 1.2. erwähnten Formalismus dar, mit dessen Hilfe sowohl die Bewegungsgleichungen als auch die Erhaltungsgrößen abgeleitet werden können. Dabei entsprechen den Erhaltungsgrößen Invarianzeigenschaften gegenüber kontinuierlichen Transformationen. In der Mechanik von Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden ist das der Lagrange-Formalismus, dessen Ausgangsgröße die Lagrange-Funktion ist.

Die Lagrange-Funktion L ist eine Funktion der Zeit und hängt von den dynamischen Variablen des Systems ab. In der Mechanik stellt sie sich als Summe über alle Massenpunkte des Systems dar. Im Fall eines kontinuierlichen Systems vom Typ eines Wellenfeldes wird diese Summe durch ein räumliches Integral über die Dichte $\mathscr{L}$ der Lagrange-Funktion (die *Lagrange-Dichte*) ersetzt:

$$L(x^0) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathscr{L}(x^0, \boldsymbol{x}) \,, \qquad \mathscr{L}(x^0, \boldsymbol{x}) = \mathscr{L}(x) \,.$$

Ausgangspunkt des Lagrange-Formalismus ist die Wirkung $\mathscr{A}$ des Systems, die man aus L durch Integration über die Zeit erhält

$$\mathscr{A} = \int \mathrm{d}t\, L(t) = \int \mathrm{d}x^0\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathscr{L}(x^0, \boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}x\, \mathscr{L}(x) \,. \tag{2.1}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß in der Feldtheorie die Lagrange-Funktion $L(t)$ nur eine Zwischengröße ist, und daß die Lagrange-Dichte $\mathscr{L}(x)$ die entscheidende Rolle spielt.

Die Bewegungsgleichungen kann man mit Hilfe des Hamilton-Prinzips der kleinsten Wirkung ableiten, welches besagt, daß für reale Bewegungen die Wirkung $\mathscr{A}$ ein Extremum annimmt und daher deren (erste) Variation verschwindet. Aus der Bedingung

$$\delta\mathscr{A} = 0$$

erhalten wir unter Berücksichtigung dessen, daß die Variationen δu_a der Feldfunktionen u_a an der Grenze des Integrationsbereichs verschwinden, die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\delta\mathscr{A}}{\delta u_a(x)} \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_a(x)} - \partial_\nu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{a,\nu}} = 0 \,. \tag{2.2}$$

Im folgenden führen wir kurz die grundlegenden Forderungen auf, denen die Lagrange-Dichte einer Quantenfeldtheorie genügen muß.

Zunächst muß die Lagrange-Dichte eine Funktion der dynamischen Variablen allein, d. h. der Felder $u_a(x)$ und ihrer Ableitungen, sein. Sie darf keine explizite Abhängigkeit von den Koordinaten x enthalten, weil dies die relativistische Invarianz verletzen würde. Darüber hinaus ist die Lokalität der Theorie zu gewährleisten, so daß sich der Wert der Lagrange-Dichte im Punkt x aus den Feldern $u_a(x)$

und einer endlichen Anzahl von partiellen Ableitungen in diesem Punkt x bestimmt. Eine solche Lagrange-Dichte heißt *lokal*, anderenfalls, z. B. bei integraler Abhängigkeit von den Feldern, wird sie *nichtlokal* genannt.

Damit sich ferner die Bewegungsgleichungen als Differentialgleichungen von höchstens zweiter Ordnung ergeben, wählt man die Lagrange-Dichte als Funktion der Felder u_a und ihrer *ersten* Ableitungen

$$\mathcal{L}(x) = \Phi\big(u_a(x), u_{a,\nu}(x)\big) . \tag{2.3}$$

Es sei noch folgendes bemerkt: Da sich die physikalischen Eigenschaften eines Systems aus seiner Wirkung $\mathcal{A}$ bestimmen, die sich aus der Lagrange-Dichte durch eine 4-dimensionale Volumenintegration ergibt, ist der Zusammenhang $\mathcal{A} \to \mathcal{L}$ nicht eineindeutig. Lagrange-Dichten, die sich durch die vollständige Divergenz einer Vektorfunktion der Felder voneinander unterscheiden,

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \partial_\nu F^\nu(x) , \tag{2.4}$$

erweisen sich als physikalisch äquivalent.

Tatsächlich kann das Integral (2.1) über $F^\nu_{,\nu}$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes auf ein Flächenintegral von F^ν über den dreidimensionalen Rand des vierdimensionalen Integrationsgebietes zurückgeführt werden. Verlangt man noch, daß die Variationen δu der Felder auf diesem Rand verschwinden, so folgt, daß das Glied $F^\nu_{,\nu}$ keinen Beitrag zu physikalischen Größen liefert.

Weitere wichtige Forderungen an die Lagrange-Dichte betreffen seine Realitätseigenschaften und die relativistische Invarianz. Eine reelle (in der Quantentheorie hermitesche) Lagrange-Dichte garantiert, daß die dynamischen Größen wie Energie, Impuls, Strom usw. reelle physikalische Größen sind und sichert letztlich auch die Unitarität der S-Matrix.

Die relativistische Invarianz der Lagrange-Dichte bedeutet, daß sie sich bei Poincaré-Transformationen wie ein (Pseudo-) Skalar verhalten muß

$$\mathcal{L}'(x') = \Phi\big(u_a'(x'), u_{a,\nu}'(x')\big) = \Phi\big(u_a(x), u_{a,\nu}(x)\big) = \mathcal{L}(x) . \tag{2.5}$$

Da das infinitesimale Volumenelement $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x^0\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ ebenfalls invariant ist, ändert sich die Wirkung $\mathcal{A}$ bei Poincaré-Transformationen nicht. Daher garantiert eine skalare Lagrange-Dichte die Invarianz der Wirkung.

2.2. Dynamische Erhaltungsgrößen. Der Energie-Impuls-Vektor

Die zuletzt angeführte Eigenschaft der Lagrange-Dichte ist wesentlich für die Ableitung von dynamischen Erhaltungsgrößen, d. h. von zeitunabhängigen Größen. Zu den dynamischen Erhaltungsgrößen gehören Energie, Impuls, Drehimpuls und außerdem einige andere Größen, die infolge einer entsprechenden Invarianz der Wirkung (oder der Lagrange-Dichte) erhalten bleiben, wie z. B. die elektrische Ladung.

Als Beispiel betrachten wir den Energie-Impuls-Vektor P^ν. Er kann als Raumintegral über die entsprechenden Komponenten des Energie-Impuls-Tensors dargestellt werden,

$$P^\nu = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, T^{\nu 0}(x^0, \boldsymbol{x}) , \tag{2.6}$$

der aus der Lagrange-Dichte mit Hilfe der Beziehung

$$T^{\nu\mu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a,\mu}} u_{a,\nu}(x) - g^{\nu\mu}\mathcal{L}(x) \tag{2.7}$$

folgt.

Die Unabhängigkeit des Integrals (2.6) von der Zeit x^0 folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x^\mu} = 0\,, \tag{2.8}$$

der der Tensor $T^{\nu\mu}$ genügt. Davon können wir uns leicht überzeugen, wenn wir das Integral

$$\int \mathrm{d}x \frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x^\mu}$$

betrachten. Unter Verwendung des Gaußschen Satzes formen wir es in ein Flächenintegral um

$$\int\limits_V \mathrm{d}x \frac{\partial T^{\nu\mu}}{\partial x^\mu} = \int\limits_\sigma \mathrm{d}\sigma_\mu\, T^{\nu\mu}(x)\,, \tag{2.9}$$

wobei die Hyperfläche σ den Rand des Integrationsgebietes V bildet und $\mathrm{d}\sigma_\mu$ das senkrecht zur x^μ-Achse stehende Flächenelement ist. Nehmen wir noch an, daß das Integrationsgebiet V in den raumartigen Richtungen unbeschränkt bezüglich der Zeit durch zwei dreidimensionale Flächen $\sigma_1(x^0 = t_1)$ und $\sigma_2(x^0 = t_2)$ begrenzt ist und daß im räumlich Unendlichen die Felder u_a, ihre Ableitungen und damit die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors verschwinden, so folgt aus (2.8) und (2.9)

$$\int\limits_{\sigma_1} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, T^{\nu 0}(x) - \int\limits_{\sigma_2} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, T^{\nu 0}(x) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, T^{\nu 0}(t_1, \boldsymbol{x}) - \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, T^{\nu 0}(t_2, \boldsymbol{x}) = 0\,,$$

was zu beweisen war.

Wir zeigen jetzt noch, daß die Kontinuitätsgleichung (2.8) aus den Bewegungsgleichungen folgt. Dazu betrachten wir die Divergenz des rechten Teils der Gl. (2.7)

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a,\mu}}\right) u_a^{,\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a,\mu}} \partial_\mu(u_a^{,\nu}) - \partial^\nu \mathcal{L}\,.$$

Unter Ausnutzung der Bewegungsgleichungen (2.2) und nach Änderung der Differentiationsreihenfolge im zweiten Summanden gelangen wir zum gewünschten Ergebnis

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a}\frac{\partial u_a}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a,\mu}}\frac{\partial u_{a,\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = 0\,.$$

Wir fassen kurz zusammen. Wir haben festgestellt, daß jede der vier Größen P^ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$) erhalten bleibt, weil die entsprechende räumliche Dichte $T^{\nu 0}$ die nullte Komponente des „Vektors“ $\Theta^\mu(\nu) \equiv T^{\nu\mu}$ ist, welcher der Kontinuitätsgleichung (2.8) genügt. Das letztere ergab sich aus den Euler-Lagrange-Gleichungen und daraus, daß die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ von den Koordinaten x nur über die

Felder u_a und deren erste Ableitungen $u_{,\nu}$ abhängt, was seinerseits bedeutet, daß

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a} u_a^{,\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a,\mu}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x^\mu}\right)$$

gilt.

Weiterhin läßt sich zeigen, daß die Erhaltung der Projektion des „Vektors" P^ν auf die ν-Achse eine Folge der Invarianz der Lagrange-Dichte (und des Verschwindens der entsprechenden Variation der Wirkung) bezüglich Translationen entlang dieser Achse ist.

2.3. Das Noether-Theorem

Die letzte Behauptung ist ein Spezialfall des sogenannten Noether-Theorems, welches man folgendermaßen formulieren kann:
Wir betrachten eine stetige, von s Parametern ω_k ($k = 1, 2, \ldots, s$) abhängende Transformation sowohl der Koordinaten als auch der Feldfunktionen,

$$x_\nu \to x_\nu' = f_\nu(x; \omega)\,, \tag{2.10}$$

$$u_a(x) \to u_a'(x') = U_a\big(u_b(x); \omega\big)\,, \tag{2.11}$$

bezüglich der die Variation der Wirkung $\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x)\, \mathrm{d}x$ verschwindet

$$\delta\mathcal{A} = 0\,.$$

Dann existieren s dynamische Erhaltungsgrößen C_k (d. h. zeitlich erhaltene Funktionale der Felder und ihrer Ableitungen), welche als Raumintegrale

$$C_k = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \Theta^0_{(k)}(x) \tag{2.12}$$

über die nullten Komponenten bestimmter „Vektoren"

$$\Theta^\nu_{(k)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a,\nu}} (u_{a,\mu} X^\mu_k - \Psi_{a,k}) - X^\nu_k \mathcal{L}(x) \tag{2.13}$$

mit

$$X^\mu_k = \left.\frac{\partial f^\mu(x;\omega)}{\partial \omega_k}\right|_{\omega=0}, \qquad \Psi_{a,k} = \left.\frac{\partial u_a}{\partial \omega_k}\right|_{\omega=0} \tag{2.14}$$

darstellbar sind.

Auf den Beweis des Noether-Theorems müssen wir an dieser Stelle verzichten und verweisen den interessierten Leser auf [1], § 2.1.

Zunächst bemerken wir, daß die oben angeführten Formeln (2.6) und (2.7) Spezialfälle der allgemeinen Ausdrücke (2.12) und (2.13) sind, falls

$$X^\nu_k = \delta^\nu_k\,, \qquad \Psi_{a,k} = 0 \tag{2.15}$$

gilt. Die Ausdrücke (2.15) entsprechen den Transformationen

$$x_\nu' = x_\nu + \omega_\nu\,,$$

$$u_a'(x') = u_a(x)\,,$$

d. h. den Translationen aller vier Koordinaten.

Die letzte Formel ist das Transformationsgesetz (1.5) der Feldfunktionen gegenüber Translationen. Offensichtlich ist es für Feldfunktionen beliebiger Tensor-

struktur gleich. Wenn man die Ausdrücke (2.15) in (2.13) einsetzt, dann erhält man den Energie-Impuls-Tensor (2.7). Mit Hilfe von (2.12) ergibt sich die Darstellung (2.6) für die Erhaltungsgröße P^ν, den Energie-Impuls-Vektor.

2.4. Drehimpuls und Spin

Nunmehr leiten wir die dynamischen Erhaltungsgrößen her, die den vierdimensionalen Lorentz-Drehungen des Koordinatensystems entsprechen. Wie aus (2.14) folgt, ist es hinreichend, infinitesimale Lorentz-Drehungen zu betrachten; sie haben folgendes Aussehen:

$$x'_\nu = x_\nu + x^\mu \, \delta L_{\nu\mu} , \tag{2.16}$$

wobei $\delta L_{\nu\mu}$ die infinitesimalen Parameter der Drehung sind. Wegen der Antisymmetrie der Größen $\delta L_{\nu\mu}$ benötigen wir nur sechs von ihnen als unabhängige Parameter, z.B.

$$\delta\omega_{(\mu\nu)} = \delta L_{\mu\nu} \quad \text{für} \quad \mu < \nu . \tag{2.17}$$

Sie stellen infinitesimale Drehwinkel in der $x_\mu x_\nu$-Ebene dar. Unter dem Index k in den Formeln (2.12) bis (2.15) ist also hier der Doppelindex $(\mu\nu)$ zu verstehen.

Stellen wir die Variation δx in der Gestalt

$$\delta x_\nu = X_\nu^k \, \delta\omega_k = \sum_{\varrho<\sigma} X_\nu^{(\varrho\sigma)} \, \delta\omega_{(\varrho\sigma)} \tag{2.18}$$

dar, so erhalten wir unter Verwendung von (2.16) und (2.17)

$$\delta x_\nu = x^\mu \, \delta L_{\nu\mu} = \sum_{\varrho<\sigma} (x^\sigma \delta_\nu^\varrho - x^\varrho \delta_\nu^\sigma) \, \delta\omega_{(\varrho\sigma)} ,$$

d. h.

$$X_\nu^{(\varrho\sigma)} = x^\sigma \delta_\nu^\varrho - x^\varrho \delta_\nu^\sigma . \tag{2.19}$$

Die infinitesimale Variation der Felder $u'_a(x') = u_a(x) + \delta u_a(x)$ schreiben wir in der Form

$$\delta u_a(x) = \sum_{b,\varrho<\sigma} A_a^{b(\varrho\sigma)} u_b(x) \, \delta\omega_{(\varrho\sigma)} . \tag{2.20}$$

In Übereinstimmung mit (1.5) und (1.6) erhalten wir für das skalare Feld

$$A^{(\varrho\sigma)} = 0$$

und für das Vektorfeld

$$A_\mu^{\nu(\varrho\sigma)} = \delta_\mu^\varrho g^{\nu\sigma} - \delta_\mu^\sigma g^{\nu\varrho} , \qquad \varrho < \sigma .$$

Deshalb gilt für das Vektorfeld

$$\Psi_\nu^{(\varrho\sigma)} = A_\nu^{\mu(\varrho\sigma)} \mu_\mu(x) = u^\sigma(x) \, \delta_\nu^\varrho - u^\varrho(x) \, \delta_\nu^\sigma . \tag{2.21}$$

Setzen wir (2.21) und (2.19) in Gl. (2.13) ein, so erhalten wir für den Drehimpulstensor des Feldes

$$M^{\tau(\varrho\sigma)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\nu,\tau}} (u_\nu^{;\varrho} x^\sigma - u_\nu^{;\sigma} x^\varrho) + \mathcal{L}(x^\varrho g^{\sigma\tau} - x^\sigma g^{\varrho\tau}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\nu,\tau}} A_\nu^{\mu(\varrho\sigma)} u_\mu(x) . \tag{2.22}$$

Die ersten beiden Glieder auf der rechten Seite kann man unter Verwendung von Formel (2.7) als

$$x^\sigma T^{\varrho\tau} - x^\varrho T^{\sigma\tau} = M_0^{\tau(\varrho\sigma)} \tag{2.23}$$

schreiben. Dies stimmt mit der Beziehung zwischen dem Drehimpuls- und dem Energie-Impuls-Tensor in der Punktmechanik überein. Deshalb sind wir berechtigt, die Größe (2.23) als *Bahndrehimpulstensor* des Wellenfeldes zu bezeichnen. Im Falle eines einkomponentigen Feldes (d. h. eines skalaren oder pseudoskalaren Feldes) verschwindet der letzte Term in Gl. (2.22), d. h., der Gesamtdrehimpuls ist gleich dem Bahndrehimpuls.

Für mehrkomponentige Felder ist dieser letzte Term in (2.22) von Null verschieden. Er charakterisiert die Polarisationseigenschaften des Feldes und entspricht dessen *Spindrehimpuls.*

Somit haben wir

$$M^{\tau(\varrho\sigma)} = M_0^{\tau(\varrho\sigma)} + S^{\tau(\varrho\sigma)} ,$$

wobei

$$S^{\tau(\varrho\sigma)} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{a,\tau}} A_a^{b(\varrho\sigma)} u_b(x) \tag{2.24}$$

ist. Für ein Vektorfeld erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.21)

$$S^{(\varrho\sigma)} = \int d\boldsymbol{x}\, S^{0(\varrho\sigma)} = \int d\boldsymbol{x} \left\{u^\varrho(x) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{u}_\sigma} - u^\sigma(x) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{u}_\varrho}\right\}. \tag{2.25}$$

Hierbei bedeutet $\dot{u}$ die partielle Ableitung von u nach der Zeit. Die drei zeitlich erhaltenen Größen $S^{(23)}$, $S^{(31)}$ und $S^{(12)}$ sind gerade die Komponenten eines räumlichen Pseudovektors, des Spindrehimpulsvektors

$$S^n = \varepsilon^{nmp} S^{mp} \qquad (n, m, p = 1, 2, 3) . \tag{2.26}$$

2.5. Stromdichtevektor und Ladung

Abschließend untersuchen wir nun komplexe Felder, die geladenen, und zwar im einfachsten Fall elektrisch geladenen Teilchen, entsprechen. Hier ist die Lagrange-Dichte invariant gegenüber (globalen) Phasentransformationen der Felder (Eichtransformationen erster Art), die die Koordinaten unberührt lassen.

Wir erläutern das Wesentliche am Beispiel von Systemen, die durch ein einziges komplexes Feld beschrieben werden. Da die Lagrange-Dichte, genauso wie die dynamischen Größen, reell sein muß, darf sie vom komplexen Feld nur über bilineare Formen des Typs $\overset{*}{u}_a u_b$ abhängen. Dabei sind u_a und $\overset{*}{u}_a$ zueinander konjugiert komplexe Felder oder deren Ableitungen. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Multiplikation der komplexen Wellenfunktionen u mit einem beliebigen unitären Phasenfaktor exp (iα), α reell, die quadratische Form $\overset{*}{u}u$ nicht ändert, und folglich auch zu keinen beobachtbaren Effekten führt.

Betrachten wir u und $\overset{*}{u}$ als linear unabhängige Funktionen, so schreibt sich die Eichtransformation erster Art wie folgt:

$$u_a \to u_a' = e^{i\alpha}\, u_a , \qquad \overset{*}{u}_a \to \overset{*}{u}{}_a' = e^{-i\alpha}\, \overset{*}{u}_a . \tag{2.27}$$

Setzen wir α als unendlich klein voraus, so gilt

$$u \to u + i\alpha u , \qquad \overset{*}{u} \to \overset{*}{u} - i\alpha\overset{*}{u} .$$

Aus (2.14) folgt dann, daß

$$\Psi_a = \mathrm{i} u_a \quad \text{für alle} \quad u_a \,,$$

$$\overset{*}{\Psi}_a = -\mathrm{i}\overset{*}{u}_a \quad \text{für alle} \quad \overset{*}{u}_a \,,$$

und ferner $X = 0$ gilt. Setzen wir diese Beziehungen in (2.13) ein, so erhalten wir einen Ausdruck, der die Tensorstruktur eines Vektors hat

$$J^\nu(x) = \mathrm{i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{*}{u}_{a,\nu}} \overset{*}{u}_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a,\nu}} u_a\right). \tag{2.28}$$

Dieser Vektor genügt der Kontinuitätsgleichung,

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \,, \tag{2.29}$$

und wird deshalb gewöhnlich als *Stromdichtevektor* bezeichnet. Das Raumintegral über seine nullte Komponente

$$Q = \int J^0(x)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{i} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{*}{u}_{a,0}} \overset{*}{u}_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{a,0}} u_a\right) \tag{2.30}$$

ist zeitunabhängig und somit eine Erhaltungsgröße des Feldes; es wird *Ladung* genannt. Dabei kann das Bewegungsintegral Q sowohl die elektrische Ladung als auch andere Erhaltungsgrößen, wie Baryonen, Strangeness, Charm u. a. m. beschreiben.

Analog werden Systeme mit ähnlichen Bewegungsintegralen zweckmäßig durch komplexwertige (und im allgemeinen Fall mehrkomponentige) Felder beschrieben. Wir möchten noch anfügen, daß koordinatenunabhängige Transformationen des soeben betrachteten Typs ($\Psi \neq 0$, $X = 0$) als *innere Symmetrietransformationen* bezeichnet werden. Wichtige Beispiele innerer Symmetrie sind in der Physik die Isospinsymmetrie und die unitäre Symmetrie. Die ihnen entsprechenden Transformationen können natürlich auch mit Hilfe des Noether-Theorems untersucht werden, was zum Begriff des (zeitlich konstanten) Isospins und des unitären Spins führt.

3. Die einfachsten Felder

3.1. Das skalare Feld

Am einfachsten ist das reelle skalare Feld $\varphi(x)$, das Teilchen einer Sorte mit dem Spin Null beschreibt. Die freie Lagrange-Dichte dieses Feldes,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varphi_{,\nu}(x)\, \varphi^{,\nu}(x) - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x) \,, \tag{3.1}$$

ist so gewählt, daß die aus ihr folgende Bewegungsgleichung (2.2) gerade die Klein-Gordon-Gleichung ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\nu}} = -m^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\nu\, \partial x_\nu} = (\Box - m^2)\, \varphi(x) = 0 \,. \tag{3.2}$$

Hierbei bezeichnet

$$\Box = -\partial_\nu \partial^\nu = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

den d'Alembert-Operator.

Mit Hilfe der Formel (2.7) erhalten wir aus (3.1) den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu}(x) = \varphi^{,\nu}(x)\,\varphi^{,\mu}(x) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\,. \tag{3.3}$$

Aus ihm bestimmt sich unter Verwendung von (2.23) der Drehimpulsdichtetensor; wie bereits erwähnt, ist die Spindichte gleich Null.

Setzen wir in (3.3) die Lagrange-Dichte (3.1) ein, so erhalten wir die Energiedichte

$$T^{00} = (1/2)\,[\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2] \tag{3.4}$$

und die Impulsdichte

$$T^{0k} = -\,\varphi^{,0}\varphi^{,k} \qquad (k = 1, 2, 3)\,.$$

3.2. Die Impulsdarstellung

In der Theorie der Elementarteilchen ist die Impulsdarstellung von großer Bedeutung. Erstens ist sie den meisten physikalischen Aufgabenstellungen direkt adäquat, weil im Experiment die Teilchen zumeist durch ihre Energien und Impulse (und nicht durch ihre Raum-Zeit-Koordinaten) charakterisiert werden. Zweitens haben die dynamischen Variablen in dieser Darstellung eine kompaktere Struktur und eine anschaulichere Bedeutung.

Stellen wir also die Felder $\varphi(x)$ durch ein vierdimensionales Fourier-Integral dar:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-2} \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \tilde{\varphi}(k)\,, \qquad \mathrm{d}k = \mathrm{d}k_0\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,.$$

Aus der Bedingung, daß die Felder reell sind, $\overset{*}{\varphi}(x) = \varphi(x)$, ergibt sich

$$\overset{*}{\tilde{\varphi}}(k) = \tilde{\varphi}(-k)\,.$$

In Übereinstimmung mit der Feldgleichung (3.2) genügt die Fourier-Amplitude $\tilde{\varphi}(k)$ der Gleichung

$$(k^2 - m^2)\,\tilde{\varphi}(k) = 0$$

und ist deshalb in der Form

$$\tilde{\varphi}(k) = \sqrt{2\pi}\,\delta(k^2 - m^2)\,\varphi(k)$$

darstellbar. Die hierbei auftretende Delta-Funktion stellt die Beziehung

$$(k_0)^2 - \boldsymbol{k}^2 = m^2 \tag{3.5}$$

zwischen der Frequenz k_0, dem Wellenzahlvektor $\boldsymbol{k}$ und dem Parameter m her. Wie später gezeigt wird, ist die Frequenz k_0 mit der Energie und der Wellenzahlvektor mit dem Impulsvektor zu identifizieren. Infolgedessen ist (3.5) die aus der relativistischen Teilchenmechanik bekannte Einsteinsche Beziehung, in der m die Masse ist.

Die Fourier-Entwicklung hat somit folgende Form:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}k\, \delta(k^2 - m^2)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \varphi(k)\,.$$

Da in den Integranden eine δ-Funktion eingeht, erstreckt sich die Integration nicht über den gesamten vierdimensionalen k-Raum, sondern nur über die beiden dreidimensionalen Schalen des durch

$$k^0 = \pm \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$$

definierten Hyperboloids, wobei die eine Schale vollständig innerhalb des oberen ($k^0 > 0$) und die andere völlig innerhalb des unteren ($k^0 < 0$) Lichtkegels liegt (siehe Abb. 3.1). Diese beiden Hyperboloidschalen sind für sich allein lorentzinvariant, was die folgende, relativistisch invariante Aufspaltung der Feldfunktion in zwei Summanden erlaubt:

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x) \,. \tag{3.6}$$

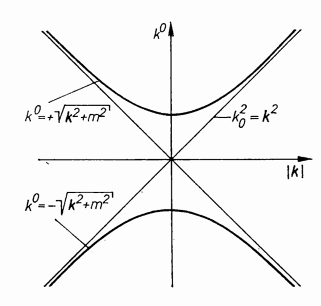


Abb. 3.1
Schnitt des zweischaligen Hyperboloids $k_0 = \pm \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ für ein Teilchen der Masse m im Impulsraum (statt k^2 lies $\boldsymbol{k}^2$)

Dabei ist

$$\varphi^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}k \, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx} \, \delta(k^2 - m^2) \, \varphi^\pm(k) \tag{3.7}$$

mit

$$\varphi^\pm(k) = \Theta(k_0) \, \varphi(\pm k) \,,$$

und Θ ist die bekannte Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 \,, & x > 0 \,, \\ 0 \,, & x < 0 \,. \end{cases}$$

Die Funktionen φ^+ bzw. φ^- werden im weiteren als positiv-frequente bzw. negativ-frequente Anteile der Funktion $\varphi(x)$ bezeichnet. Diese Kennzeichnung der beiden Teile von $\varphi(x)$ bezieht sich auf das Vorzeichen des Produktes kx, oder genauer, auf das Vorzeichen des „zeitlichen" Gliedes $k^0x^0 = x^0 \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ im Exponenten des Integranden. Diesbezüglich sei hier angemerkt, daß in der modernen Literatur mitunter gerade die umgekehrte Kennzeichnung benutzt wird, wobei man sich auf das Vorzeichen der Form $k_\mu x_\mu = \boldsymbol{kx} + k_4 x_4 = -kx$ bezieht. Diese Festlegung wird mit der üblichen Gestalt der quantenmechanischen Wellenfunktion eines Zustands der Energie E begründet, die bekanntlich proportional zu $\exp(-\mathrm{i}Ex_0)$ ist.

Die von uns gewählte Konvention ist dadurch motiviert, daß Operatoren des Typs φ^+ bzw. φ^- in der Quantentheorie der Erzeugung bzw. Vernichtung von Feldquanten entsprechen. Somit symbolisieren die Vorzeichen (+) und (−) hier den physikalischen Sinn der entsprechenden Quantenoperatoren.

Wie weiter unten ersichtlich ist, erweist sich die vorgenommene Aufspaltung der Feldfunktion beim Aufstellen der dynamischen Größen in der Impulsdarstellung als vorteilhaft, weil sich diese durch bilineare Formen von $\varphi^+(k)$ und $\varphi^-(k)$ ausdrücken lassen.

Außerdem sei noch darauf hingewiesen, daß in Übereinstimmung mit (3.7) die folgende Regel für die Bildung der zu $\varphi^\pm(\boldsymbol{k})$ komplex-konjugierten Größen gilt

$$\big(\varphi^\pm(k)\big)^* = \varphi^\mp(k) .$$

Führen wir nunmehr in (3.7) die Integration über k_0 aus, so erhalten wir

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm ikx} \varphi^\pm(\boldsymbol{k}) . \tag{3.8}$$

Hier wurden folgende Festlegungen getroffen:

$$\varphi^\pm(\boldsymbol{k}) = \frac{\varphi^\pm(k_0, \boldsymbol{k})}{\sqrt{2k_0}}, \qquad k_0 = +\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2} .$$

Durch Einsetzen von (3.6) und (3.8) in (3.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} P^0 &= \int T^{00} d\boldsymbol{x} = (1/2) \int \left[\big(\partial_\nu \varphi(x)\big)^2 + m^2 \varphi^2(x)\right] d\boldsymbol{x} \\ &= (1/2) \int d\boldsymbol{x} \, \{\partial_\nu \varphi^+(x) \, \partial_\nu \varphi^+(x) + 2\partial_\nu \varphi^+(x) \, \partial_\nu \varphi^-(x) + \partial_\nu \varphi^-(x) \, \partial_\nu \varphi^-(x) \\ &\qquad + m^2[\varphi^+(x) \, \varphi^+(x) + 2\varphi^+(x) \, \varphi^-(x) + \varphi^-(x) \, \varphi^-(x)]\} . \end{aligned}$$

Wir weisen darauf hin, daß *alle Summationen* über ν in diesem Ausdruck nicht *kovariant* sind (vgl. hierzu Formel (3.4)). Wie sich leicht zeigen läßt, geben Produkte der Funktionen $\varphi^\pm$ gleichartiger Frequenz keinen Beitrag zur dynamischen Erhaltungsgröße P^0. Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} &\int d\boldsymbol{x}\left[\big(\partial_\nu \varphi^+(x)\big)^2 + m^2\big(\varphi^+(x)\big)^2\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int \frac{d\boldsymbol{k} \, d\boldsymbol{k}'}{2\sqrt{k_0 k_0'}} \varphi^+(\boldsymbol{k}) \, \varphi^+(\boldsymbol{k}') \, e^{i(k_0 + k_0')x_0} \, (m^2 - k_\nu k_\nu') \int d\boldsymbol{x} \, e^{-i(\boldsymbol{k}' + \boldsymbol{k})\boldsymbol{x}} \\ &= \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2k_0} \varphi^+(\boldsymbol{k}) \, \varphi^+(-\boldsymbol{k}) \, e^{2ik_0 x_0} \, (m^2 - k_0^2 + \boldsymbol{k}^2) \\ &= 0; \end{aligned}$$

das letzte Gleichheitszeichen folgt wegen $m^2 - k_0^2 + \boldsymbol{k}^2 = 0$. Dasselbe gilt auch für die quadratischen Formen von φ^-. Deshalb erhalten wir

$$P^0 = \int d\boldsymbol{x}\big(\partial_\nu \varphi^+(x) \, \partial_\nu \varphi^-(x) + m^2 \varphi^+(x) \, \varphi^-(x)\big) .$$

Mittels der Fourier-Darstellung (3.8) ergibt sich daraus

$$P^0 = \int d\boldsymbol{k} \, k^0 \varphi^+(\boldsymbol{k}) \, \varphi^-(\boldsymbol{k}) .$$

Eine entsprechende Formel gilt für den (räumlichen) Impulsvektor

$$P^n = \int T^{0n} d\boldsymbol{x} = \int d\boldsymbol{k} \, k^n \varphi^+(\boldsymbol{k}) \, \varphi^-(\boldsymbol{k}) , \qquad n = 1, 2, 3 .$$

Beide Ausdrücke können in kovarianter Weise zusammengefaßt werden. Dabei wählen wir die Anordnung der Faktoren so, daß das Ergebnis auch dann gültig ist, wenn die Funktionen φ^+ und φ^- nicht miteinander kommutieren (d. h., wenn ihre

Reihenfolge nicht geändert werden darf)

$$P^\nu = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, k^\nu \big(\varphi^+(\boldsymbol{k})\, \varphi^-(\boldsymbol{k}) + \varphi^-(\boldsymbol{k})\, \varphi^+(\boldsymbol{k})\big) \,. \tag{3.9}$$

Jetzt erkennen wir auch den Sinn der in (3.8) eingeführten Normierungsfaktoren: Die Produkte

$$n(\boldsymbol{k}) = \varphi^+(\boldsymbol{k})\, \varphi^-(\boldsymbol{k}) = |\varphi^+(\boldsymbol{k})|^2$$

sind mittlere Teilchenzahldichten für ungeladene, spinlose Teilchen der Masse m, mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$ und der Energie $\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}$. Nach der Quantisierung treten diese Produkte als Operatoren auf, deren Eigenwerte die natürlichen Zahlen sind.

Von praktischer Bedeutung ist das den Pi-Mesonen (Pionen) entsprechende pseudoskalare Feld. Die drei Pionen π^+, π^0, π^-, die sich voneinander nur durch die elektrische Ladung $(0, \pm 1)$ unterscheiden, bilden ein Isotriplet. Das entsprechende Feld $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ hat drei Komponenten, die einen Vektor in einem dreidimensionalen Isospin-Raum aufspannen.

Die freie Lagrange-Dichte hat die Gestalt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi}_{,\nu} \boldsymbol{\varphi}^{,\nu}) - \frac{m^2}{2} (\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}) \tag{3.10}$$

und ist eine Summe aus den Lagrange-Dichten für jede einzelne Komponente des Isospinvektors $\boldsymbol{\varphi}$. Deshalb sind die den Transformationen der Poincaré-Gruppe entsprechenden dynamischen Größen eine Summe von solchen Ausdrücken, die wir entsprechend der Abschnitte 3.1. und 3.2. für jede einzelne Komponente erhalten haben.

Aus der Invarianz der Lagrange-Dichte (3.10) bezüglich Drehungen im Isospin-Raum resultiert als zusätzliche Erhaltungsgröße der *Isospinvektor.*

3.3. Das Vektorfeld

Als nächstes Beispiel betrachten wir das Vektorfeld U_ν $(\nu = 0, 1, 2, 3)$, das Teilchen mit Spin 1 beschreibt. Seine vier Komponenten bilden einen kovarianten Vektor, d. h., bei Lorentz-Drehungen (2.16) transformieren sie sich nach dem Gesetz

$$U_\mu(x) \to U'_\mu(x') = U_\mu(x) + \delta U_\mu(x)\,; \qquad \delta U_\mu = \delta\Omega_{\mu\nu}\, U^\nu(x) \,.$$

Die Lagrange-Dichte des Vektorfeldes kann auf unterschiedliche Art und Weise konstruiert werden. Die einfache Verallgemeinerung der Lagrange-Dichte (3.1) zu einer kovarianten Summe der einzelnen Komponenten,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} U_{\mu,\nu} U^{\mu,\nu} + \frac{m^2}{2} U_\mu U^\mu \,, \tag{3.11}$$

ist nicht die einzig mögliche Lorentz-invariante Bildung aus einem Vektorfeld. So kann man beispielsweise ein zu

$$U_{\mu,\nu} U^{\nu,\mu} \tag{3.12}$$

proportionales Glied hinzufügen, das aber wegen (2.4) zu

$$U_\mu^{,\mu} U^\nu_{,\nu} \equiv (\partial U/\partial x)^2$$

äquivalent ist. Zum Beweis dessen zeigt man, daß die Differenz beider Ausdrücke als Divergenz $\partial_\nu F^\nu$ geschrieben werden kann.

Für die Lagrange-Dichte (3.11) erscheinen alle dynamischen Größen als kovariante Summen (bezüglich μ) entsprechender Größen des einkomponentigen Skalarfeldes (mit der Lagrange-Dichte (3.1)). Da jedoch das mit der Komponente U_0 zusammenhängende Glied in diese Summen mit negativem Vorzeichen eingeht, ist auch sein Beitrag zur Energie negativ. Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, wird den Komponenten U_μ die invariante Zusatzbedingung

$$\partial^\mu U_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} U_\mu(x) \equiv (\partial U) = 0 \tag{3.13}$$

auferlegt.

Damit reduziert sich die Anzahl der linear unabhängigen Komponenten von vier auf drei. Später wird gezeigt, daß diese Bedingung wirklich die positive Definitheit der Energie des Vektorfeldes garantiert. Die drei unabhängigen Komponenten entsprechen gerade den drei möglichen Werten (1, 0, —1) der Projektion des Spins auf eine vorgegebene Achse, d. h., sie beschreiben ein Teilchen mit dem Spin 1. Die Zusatzbedingung (3.13) schließt das zusätzliche Auftreten von Teilchen mit dem Spin Null aus, die in dieser Formulierung zum Auftreten negativer Energie führen würden.

Die Bedingung (3.13) ist mit den Bewegungsgleichungen verträglich. Mehr noch, durch geeignete Modifikation der Lagrange-Dichte (3.11), d. h. durch Hinzufügen eines Terms vom Typ (3.12), erhält man

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} U_\nu U^\nu \tag{3.14}$$

mit

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu , \tag{3.14'}$$

und (3.13) kann nun als Folge der Bewegungsgleichungen

$$\partial_\nu H^{\mu\nu} - m^2 U^\mu = (\Box - m^2)\, U^\mu + \partial^\mu \partial_\nu U^\nu = 0 \tag{3.15}$$

verstanden werden. Diese Gleichungen heißen *Proca-Gleichungen.* Differenzieren wir sie nach x^μ, so folgt nach elementaren Umformungen die Zusatzbedingung (3.13). Damit sind die Proca-Gleichungen den vier Klein-Gordon-Gleichungen mit der Nebenbedingung (3.13) äquivalent.

Die dynamischen Größen, die aus der zu (3.14) analogen Lagrange-Dichte eines komplexen Vektorfeldes,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2} \overset{*}{H}_{\mu\nu} H^{\mu\nu} + m^2 \overset{*}{U}_\nu U^\nu , \tag{3.16}$$

hervorgehen, haben folgendes Aussehen:

Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = \overset{*}{H}_{\mu\sigma} U^\sigma_{,\nu} + \overset{*}{U}{}^\sigma_{,\nu} H_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} , \tag{3.17a}$$

Stromdichtevektor

$$J_\nu = \mathrm{i}(\overset{*}{U}{}^\sigma H_{\sigma\nu} - H_{\sigma\nu} \overset{*}{U}{}^\sigma) \tag{3.17b}$$

Spindrehimpulstensor

$$S^{\nu(\mu\sigma)} = \overset{*}{U}{}^\mu H^{\sigma\nu} - \overset{*}{H}{}^{\mu\nu} U^\sigma + \overset{*}{H}{}^{\sigma\nu} U^\mu - \overset{*}{U}{}^\sigma H^{\mu\nu} . \tag{3.17c}$$

Für die weiteren Rechnungen ist es zweckmäßig, die Potentiale in positiv- und negativ-frequente Anteile zu zerlegen und zur dreidimensionalen Impulsdarstellung

$$U_\nu^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm ikx} U_\nu^\pm(\boldsymbol{k}) \tag{3.18}$$

überzugehen (eine analoge Darstellung gilt auch für $\overset{*}{U}{}^\pm$).

Setzen wir die Darstellungen (3.18) in die nullten Komponenten ($\nu = 0$) der Ausdrücke (3.17) ein, so erhalten wir nach Ausführung der Integration über $d\boldsymbol{x}$ die dynamischen Größen

$$P_\nu = -\int d\boldsymbol{k}\, k_\nu [\overset{*}{U}{}_\mu^-(\boldsymbol{k})\, U_\lambda^+(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{U}{}_\mu^+(\boldsymbol{k})\, U_\lambda^-(\boldsymbol{k})] g^{\mu\lambda}, \tag{3.19}$$

$$Q = \int d\boldsymbol{k} [\overset{*}{U}{}_\mu^-(\boldsymbol{k})\, U_\lambda^+(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{U}{}_\mu^+(\boldsymbol{k})\, U_\lambda^-(\boldsymbol{k})] g^{\mu\lambda}, \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{S} = i \int d\boldsymbol{k} \{[\overset{*}{\boldsymbol{U}}{}^+(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{U}^-(\boldsymbol{k})] - [\overset{*}{\boldsymbol{U}}{}^-(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{U}^+(\boldsymbol{k})]\}. \tag{3.21}$$

Mittels der aus den Definitionen (3.18) folgenden Relationen zwischen den konjugiert-komplexen Größen

$$\left(U_\nu^\pm(\boldsymbol{k})\right)^* = \overset{*}{U}{}_\nu^\mp(\boldsymbol{k})$$

folgt, daß der von $\mu = 0$ herrührende Beitrag auf der rechten Seite von (3.19) negativ ist und damit die Energie P_0 nicht positiv definit ist.

Wie schon erwähnt wurde, kann diese Schwierigkeit durch die Zusatzbedingung (3.13) beseitigt werden, welche in der Impulsdarstellung (3.18) folgende Form annimmt:

$$k^\nu U_\nu^\pm(\boldsymbol{k}) = 0, \qquad k^\nu \overset{*}{U}{}_\nu^\pm(\boldsymbol{k}) = 0. \tag{3.22}$$

Auf Grund dieser Beziehungen sind die Komponenten U_ν nicht mehr unabhängig voneinander. Drücken wir die Komponenten $U_0^\pm$ mittels (3.22) durch die übrigen aus,

$$U_0^\pm(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{k_0} k_n U_n^\pm(\boldsymbol{k}), \qquad \overset{*}{U}{}_0^\pm(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{k_0} k_n \overset{*}{U}{}_n^\pm(\boldsymbol{k}) \qquad (n = 1, 2, 3),$$

dann hängen die in den Integranden von (3.19) eingehenden quadratischen Formen nur noch von den „räumlichen“ Komponenten des Potentials ab

$$-\overset{*}{U}{}_\mu^\pm(\boldsymbol{k})\, U_\nu^\mp(\boldsymbol{k}) g^{\mu\nu} = \overset{*}{\boldsymbol{U}}{}^\pm(\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{U}^\mp(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{k_0^2} \left(\boldsymbol{k}\overset{*}{\boldsymbol{U}}{}^\pm(\boldsymbol{k})\right) \left(\boldsymbol{k}\boldsymbol{U}^\mp(\boldsymbol{k})\right). \tag{3.23}$$

3.4. Das lokale Repère

Die Gleichung (3.23) läßt sich mit Hilfe des linearen Ansatzes

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{e}^1 a_1(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{e}^2 a_2(\boldsymbol{k}) + \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} \cdot \frac{k_0}{m} a_3(\boldsymbol{k}). \tag{3.24}$$

diagonalisieren. Hierbei sind $\boldsymbol{e}^1$ und $\boldsymbol{e}^2$ zwei Einheitsvektoren, die zusammen mit $\boldsymbol{e}^3 = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ ein *lokales Repère* oder begleitendes Dreibein, d. h. ein von $\boldsymbol{k}$ abhängiges (rechtshändiges) Tripel orthogonaler Einheitsvektoren, bilden

$$(\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j) = \delta^{ij}, \qquad \boldsymbol{e}^i \times \boldsymbol{e}^j = \varepsilon^{ijk} \boldsymbol{e}_k \qquad (i, j = 1, 2, 3);$$

e^1 und e^2 charakterisieren die transversalen Polarisationsrichtungen und e^3 die longitudinale. Der Ansatz (3.24) entspricht also einer lokalen Aufspaltung des Vektorpotentials in longitudinale und transversale Anteile bezüglich des Impulses $\boldsymbol{k}$ (siehe Abb. 3.2). Mit Hilfe von (3.24) erhalten wir

$$-\overset{*}{U}{}^{\pm}_{\nu}(\boldsymbol{k})\, U^{\mp}_{\nu}(\boldsymbol{k}) g^{\mu\nu} = \overset{*}{a}{}^{\pm}_{n}(\boldsymbol{k})\, a^{\mp}_{n}(\boldsymbol{k})\,. \tag{3.25}$$

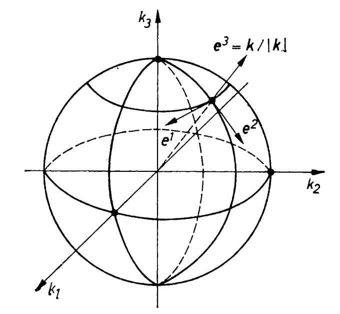


Abb. 3.2
Lokales Repère $(e^1(\boldsymbol{k}), e^2(\boldsymbol{k}), e^3(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|)$ bezüglich des Wellenzahlvektors $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3)$

Nach Einsetzen dieser Formeln in (3.19) und (3.20) ergeben sich diagonale Ausdrücke für den Energie-Impuls-Vektor und die Ladung, wobei die Energie in den neuen Variablen offensichtlich positiv definit ist:

$$P_\nu = \int d\boldsymbol{k}\, k_\nu [\overset{*}{a}{}^{+}_{n}(\boldsymbol{k})\, a^{-}_{n}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{a}{}^{-}_{n}(\boldsymbol{k})\, a^{+}_{n}(\boldsymbol{k})]\,,$$

$$Q = \int d\boldsymbol{k} [\overset{*}{a}{}^{+}_{n}(\boldsymbol{k})\, a^{-}_{n}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}^{-}_{n}(\boldsymbol{k})\, a^{+}_{n}(\boldsymbol{k})]\,.$$

Allerdings erhalten wir als Beitrag zur Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung

$$\Delta S_{\parallel} \sim \mathrm{i}\big(\overset{*}{a}{}^{+}_{1}(\boldsymbol{k})\, a^{-}_{2}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}^{+}_{2}(\boldsymbol{k})\, a^{-}_{1}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{a}{}^{-}_{2}(\boldsymbol{k})\, a^{+}_{1}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}^{-}_{1}(\boldsymbol{k})\, a^{+}_{2}(\boldsymbol{k})\big)\,. \tag{3.26}$$

einen nichtdiagonalen Ausdruck.

Die lineare Transformation

$$a^{\pm}_{1} = \frac{b^{\pm}_{1} + b^{\pm}_{2}}{\sqrt{2}}\,, \qquad a^{\pm}_{2} = \frac{b^{\pm}_{1} - b^{\pm}_{2}}{\mathrm{i}\sqrt{2}}\,, \qquad a^{\pm}_{3} = b^{\pm}_{3} \tag{3.27}$$

zu neuen Variablen $b^{\pm}_{n}$ (und analog für die konjugierten Amplituden $\overset{*}{a}{}^{\pm}_{n}$) diagonalisiert auch diesen Ausdruck, ohne die diagonale Struktur von P_ν und Q zu zerstören

$$P_\nu = \int d\boldsymbol{k}\, k_\nu [\overset{*}{b}{}^{+}_{n}(\boldsymbol{k})\, b^{-}_{n}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{b}{}^{-}_{n}(\boldsymbol{k})\, b^{+}_{n}(\boldsymbol{k})]\,, \tag{3.28}$$

$$Q = \int d\boldsymbol{k} [\overset{*}{b}{}^{+}_{n}(\boldsymbol{k})\, b^{-}_{n}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{b}{}^{-}_{n}(\boldsymbol{k})\, b^{+}_{n}(\boldsymbol{k})]\,, \tag{3.29}$$

$$\Delta S_{\parallel} \sim [\overset{*}{b}{}^{+}_{1}(\boldsymbol{k})\, b^{-}_{1}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{b}{}^{-}_{1}(\boldsymbol{k})\, b^{+}_{1}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{b}{}^{-}_{2}(\boldsymbol{k})\, b^{+}_{2}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{b}{}^{+}_{2}(\boldsymbol{k})\, b^{-}_{2}(\boldsymbol{k})]\,. \tag{3.30}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die bilinearen Kombinationen der Amplituden $\overset{*}{b}{}^{\pm}$ und $b^{\mp}$ als mittlere Teilchenzahldichten für Teilchen mit bestimmten Werten der Energie, des Impulses und der Ladung sowie bestimmten Projektionen des Spins

auf die Bewegungsrichtung angesehen werden können. Dabei ist z.B. die Größe $\overset{*}{b}{}_2^-(\boldsymbol{k})\, b_2^+(\boldsymbol{k})$ die Teilchenzahldichte für Teilchen mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$, der Energie k_0, der Ladung -1 und der Spinprojektion in Richtung der Bewegung ($\Delta S_{\|} = +1$). Analog entspricht $\overset{*}{b}{}_3^-(\boldsymbol{k})\, b_3^+(\boldsymbol{k})$ einer Teilchenzahldichte für Teilchen mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$, der Energie k_0, der Ladung -1 und der Spinprojektion Null usw. Weiter unten werden wir uns davon überzeugen, daß nach der Quantisierung die Amplitude $\overset{*}{b}{}_2^+(\boldsymbol{k})$ die Erzeugung eines Teilchens mit der Energie k_0, dem Impuls $\boldsymbol{k}$, der Ladung $+1$ und der Spinprojektion $+1$ beschreibt, die Amplitude $b_2^-(\boldsymbol{k})$ hingegen dessen Vernichtung. Deshalb entsprechen die Amplituden $a_{1,2}$ in Übereinstimmung mit (3.24) und (3.27) linear polarisierten und $b_{1,2}$ zirkular (rechts- oder linkshändig) polarisierten, $a_3 = b_3$ hingegen longitudinal polarisierten Schwingungen.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß ein komplexes Vektorfeld positiv oder negativ geladene Teilchen der Masse $m \neq 0$ mit drei möglichen Projektionen des Spinvektors $(1, 0, -1)$ bezüglich der Bewegungsrichtung beschreibt.

4. Das elektromagnetische Feld

4.1. Das Potential des elektromagnetischen Feldes

Das freie elektromagnetische Feld erfüllt die Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{H}}\,, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dot{\boldsymbol{E}}\,,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0\,, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0\,.$$

Um es symmetrischer zu beschreiben, führen wir einen reellen kovarianten Vektor, das elektromagnetische Potential $A_\nu = (A_0, -\boldsymbol{A})$, derart ein, daß

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} A_0 - \dot{\boldsymbol{A}}\,, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$$

gilt. Die „vierdimensionale Rotation“ des Potentials A bildet den antisymmetrischen Tensor der elektromagnetischen Feldstärke

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,, \tag{4.1}$$

der mit den Vektoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke durch die Beziehungen

$$E^n = -F_{n0}\,, \qquad H^m = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{nmp} F_{np} \qquad (n, m, p = 1, 2, 3) \tag{4.2}$$

verknüpft ist. Anschaulicher lassen sich diese Beziehungen als Matrix erfassen:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & H^3 & -H^2 \\ E^2 & -H^3 & 0 & H^1 \\ E^3 & H^2 & -H^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Maxwell-Gleichungen sind nun durch die beiden kovarianten Gleichungen für den Feldstärketensor F gegeben

$$\left.\begin{aligned} \partial^\nu F_{\nu\mu} &= 0\,, \\ \partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Vollzieht man nun den Übergang von F zum Potential A, so sind die vier Gleichungen der zweiten Zeile von (4.3) eine Folge der Definition (4.1), und sie sind daher in A_ν identisch erfüllt. Die ersten vier Gleichungen ergeben dagegen in Analogie zu den Proca-Gleichungen (3.15)

$$\Box A_\nu + \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0\,. \tag{4.4}$$

Hieraus wird deutlich, daß die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes unter Verwendung des Potentials A_ν wirklich einfach, symmetrisch und offensichtlich kovariant sind.

4.2. Eichinvarianz und Lorentz-Bedingung

Das Vektorpotential läßt sich jedoch nicht eindeutig einführen. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß sowohl die Observablen $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $F_{\mu\nu}$, als auch die Maxwell-Gleichungen bezüglich der sogenannten Gradiententransformation des Potentials A_ν,

$$A_\nu(x) \to A_\nu'(x) = A_\nu(x) + \partial_\nu f(x)\,, \tag{4.5}$$

invariant sind. Diese (lokale) Transformation wird häufig als *Eichtransformation* (zweiter Art) bezeichnet; wir kommen auf diese wichtige Klasse von Symmetrietransformationen in den Vorlesungen 10. und 11. in aller Ausführlichkeit zurück.

Damit ist also das Potential, welches keine beobachtbare Größe ist, nicht eindeutig bestimmt. Die auf der rechten Seite von (4.5) auftretende Funktion f ist weitgehend beliebig. Gewöhnlich wird lediglich gefordert, daß sie glatt sein soll.

Durch diese Nichteindeutigkeit wird bei der dynamischen Beschreibung des elektromagnetischen Feldes mit Hilfe von A ein zusätzlicher nichtphysikalischer Freiheitsgrad eingeführt, den man zumeist mit dem Wert der Divergenz $\chi(x)$

$$\partial^\nu A_\nu(x) \equiv \partial A(x) = \chi(x)$$

assoziiert. Die Forderung, daß χ Null sein soll, d. h.

$$\partial A(x) = 0\,, \tag{4.6}$$

ist in der Elektrodynamik als *Lorentz-Bedingung* (Lorentz-Eichung) bekannt. Wie sich jedoch später herausstellen wird (siehe Abschnitt 8.5.), ist es unmöglich, nach der Quantisierung die Lorentz-Bedingung als Operatoridentität zu erfüllen und gleichzeitig die relativistische Kovarianz der Theorie zu bewahren. Deshalb untersuchen wir diesen, sich im Auftreten einer beliebigen skalaren Funktion $\chi(x)$ ausdrückenden Freiheitsgrad und analysieren seine physikalische Bedeutung.

Dazu lösen wir uns vorübergehend erstens von der Betrachtung des freien elektromagnetischen Feldes und nehmen an, daß das Potential $A_\nu(x)$ die Gleichung (4.4) nicht erfüllt. Man kann dann aber voraussetzen, daß es eine durch irgendwelche äußeren Quellen erzeugte Feldkonfiguration beschreibt, die beispielsweise

die inhomogene Gleichung

$$\Box A_\nu(x) + \partial_\nu(\partial A(x)) = J_\nu(x)$$

erfüllt, wobei J_ν der zugehörige Quellstrom ist.

Zweitens gehen wir zur Impulsdarstellung

$$A_\nu(x) = \int \mathrm{d}k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} A_\nu(k)$$

über, wobei ein und dasselbe Symbol A sowohl für die Funktion als auch für deren Fourier-Transformierte verwendet wird. In der Impulsdarstellung werden Differentiationen und Integrationen bezüglich der Raum-Zeit-Variablen algebraische Operationen, und die Eichtransformation (4.5) erhält folgende Form,

$$A'_\nu(k) = A_\nu(k) + k_\nu \tilde{f}(k) , \tag{4.7}$$

wobei sich die Funktion $\tilde{f}(k)$ lediglich durch den Faktor i von der Fourier-Transformierten der Funktion $f(x)$ unterscheidet.

Schließlich führen wir noch die Projektionsoperatoren

$$\mathrm{P}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \qquad \mathrm{P}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{4.8}$$

ein. Hierzu sei bemerkt, daß der Multiplikation mit $(k^2)^{-1}$ in der Ortsdarstellung ein Integraloperator entspricht,

$$\frac{1}{k^2} A_\nu(k) \Leftrightarrow \int G(x-y) \, A_\nu(y) \, \mathrm{d}y ,$$

wobei G als Green-Funktion des d'Alembert-Operators $\Box$ durch folgende Gleichung definiert ist:

$$\Box \, G(x) = -\delta(x) . \tag{4.9}$$

Greensche Funktionen für die freien Feldgleichungen werden weiter unten in der Vorlesung 18. untersucht. Dort wird gezeigt, daß zur eindeutigen Lösung von Gl. (4.9) die Angabe von Randbedingungen erforderlich ist. Für uns ist dieser Fakt jetzt ohne Bedeutung. Es reicht hier voll und ganz aus zu wissen, daß die Funktion G Gl. (4.9) erfüllt. Wir spalten nun das Potential A unter Benutzung der Projektionsoperatoren (4.8) in dessen longitudinale und transversale Anteile auf

$$A_\nu = A^{\mathrm{T}}_\nu + A^{\mathrm{L}}_\nu , \qquad A^{\mathrm{T}}_\nu = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}_{\nu\mu} A^\mu , \qquad A^{\mathrm{L}}_\nu = \mathrm{P}^{\mathrm{L}}_{\nu\mu} A^\mu . \tag{4.10}$$

Sie genügen folgenden Gleichungen:

$$k^\nu A^{\mathrm{T}}_\nu(k) = 0 , \qquad k^\nu A^{\mathrm{L}}_\nu(k) = kA(k) . \tag{4.11}$$

An dieser Stelle führen wir eine spezielle Bezeichnung für die Größe $kA(k) = \xi(k)$ ein, die bis auf den Faktor i mit der Fourier-Transformierten der Funktion $\chi(x)$ übereinstimmt.

Aus den Formeln (4.10) und (4.11) folgt, daß der longitudinale Anteil des elektromagnetischen Potentials durch die Funktion ξ gegeben ist: Tatsächlich gilt

$$A^{\mathrm{L}}_\nu(k) = \frac{k^\nu}{k^2} \xi(k) .$$

Bei einer Eichtransformation (4.7) ändert sich diese Funktion gemäß

$$\xi'(k) = \xi(k) + k^2 \tilde{f}(k) .$$

Andererseits bleibt der transversale Anteil A^T bei der Transformation (4.7) unverändert. Man überzeugt sich davon, daß der eichinvariante Tensor F nicht von A^L (d. h. nicht von ξ) abhängt. Deshalb ist klar, daß der durch die skalare Funktion $\xi(k)$ beschriebene Freiheitsgrad die gesamte Willkür in sich birgt, die von der Nichteindeutigkeit des Potentials A herrührt und somit nicht physikalischer Natur ist.

4.3. Die verallgemeinerte Lagrange-Dichte

Die Bewegungsgleichungen (4.4) kann man mit Hilfe des Hamiltonschen Variationsprinzips aus der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{4.12}$$

erhalten, die hier in Abhängigkeit von F aufgeschrieben wurde und mit dem bekannten Ausdruck $\frac{1}{2}$ $(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2)$ identisch ist. Mit dem Index „T" soll darauf hingewiesen werden, daß die Lagrange-Dichte (4.12) eichinvariant und vom longitudinalen Anteil A^L unabhängig ist.

Schwierigkeiten bereitet aber der in die Bewegungsgleichung (4.4) eingehende Differentialoperator

$$K^T_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \partial^2 \, ,$$

der proportional zum transversalen Projektionsoperator P^T und daher nicht invertierbar ist. Das erschwert natürlich die Lösung der entsprechenden inhomogenen Bewegungsgleichungen. Hinzu kommt, daß die transversale Lagrange-Dichte L_T vom Standpunkt des Hamilton-Formalismus aus entartet ist. Im Hamilton-Formalismus spielen die kanonischen Impulse eine wichtige Rolle. Sie sind als erste Ableitungen der Lagrange-Funktion nach den Geschwindigkeiten $v_i = \dot{q}_i$ d. h. nach den zeitlichen Ableitungen der Koordinaten q_i des Systems definiert. Im Falle physikalischer Felder, d. h. von Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden, übernehmen die Felder $\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(x)$ selbst die Rolle der verallgemeinerten Koordinaten. Deshalb sind die verallgemeinerten kanonischen Impulse des klassischen Feldes gemäß

$$\pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i(x)}$$

definiert.

Der Hamilton-Formalismus bildet die Grundlage für die sogenannte kanonische Quantisierung, die in der Vorlesung 6. beschrieben wird. Dort findet der Leser eine ausführliche Darlegung des Hamilton-Formalismus für Felder.

Wir aber kehren vorerst zur Lagrange-Dichte (4.12) zurück. Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir die Komponenten des Potentials A_ν. Durch elementare Rechnungen sieht man, daß der zur nullten Komponente A_0 gehörende verallgemeinerte Impuls identisch verschwindet:

$$\pi_0(x) = F_{00} \equiv 0 \, .$$

Mit anderen Worten, die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_T$ enthält keine Abhängigkeit von den „Geschwindigkeiten" $\dot{A}_0$. Lagrange-Dichten mit solchen Eigenschaften heißen *entartet* oder *singulär*; sie entsprechen Systemen mit *Bindungen.* Zu ihrer Beschreibung verwendet man die von DIRAC [9] formulierte verallgemeinerte Hamiltonsche Dynamik. In unserem Fall entspricht der Übergang zur verallgemeinerten

Dynamik einer Modifikation der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\mathrm{T}} \to \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a}{2}(\partial A)^2 , \tag{4.13}$$

wobei a ein willkürlicher Zahlenkoeffizient ist.

Diese Lagrange-Dichte führt zu den Bewegungsgleichungen

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} + a\, \partial_\mu(\partial A) = \Box\, A_\mu + (1 + a)\, \partial_\mu(\partial A) = 0 , \tag{4.14}$$

aus denen insbesondere folgt, daß der longitudinale Anteil des elektromagnetischen Feldes der d'Alembert-Gleichung genügt:

$$\Box\, \partial^\nu A_\nu(x) = \Box\, \chi(x) = 0 . \tag{4.15}$$

Diese Eigenschaft des longitudinalen Anteils bleibt übrigens auch bei Wechselwirkungen des elektromagnetischen Feldes mit anderen Feldern, d. h., wenn auf der rechten Seite der Bewegungsgleichungen (4.14) ein erhaltener äußerer Strom J_ν steht, der die Kontinuitätsgleichung $\partial^\nu J_\nu = 0$ erfüllt, erhalten. Der longitudinale Freiheitsgrad $\chi(x)$ wechselwirkt also weder mit den transversalen Anteilen A^{T} noch mit anderen Feldern.

Die Lagrange-Dichte (4.13) und die Gleichungen (4.14) sind im allgemeinen bezüglich der Eichtransformationen (4.5) nicht mehr invariant. Daher kann man sagen, daß das zur Lagrange-Dichte hinzugefügte Glied $\sim(\partial A)^2$ die Eichung fixiert. Jedoch bleiben die Ausdrücke (4.13) und (4.14) invariant unter der speziellen Eichtransformation

$$A'_\nu(x) = A_\nu(x) + \partial_\nu f_0(x) , \tag{4.16}$$

wenn die Eichfunktion f_0 der d'Alembert-Gleichung

$$\Box\, f_0(x) = 0 \tag{4.17}$$

genügt. Andererseits führt das Hinzufügen eines eichfixierenden Terms zur Lagrange-Dichte dazu, daß der Differentialoperator in der Bewegungsgleichung (4.14)

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}\, \Box + (1 - a)\, \partial_\mu\partial_\nu \to g_{\mu\nu}k^2 - (1 - a)\, k_\mu k_\nu \\ &= k^2 P^{\mathrm{T}}_{\mu\nu}(k) - ak^2 P^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(k) \end{aligned}$$

nicht mehr singulär ist, d. h., es existiert der inverse Operator

$$K^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} P^{\mathrm{T}}_{\mu\nu}(k) + \frac{d_1}{k^2} P^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(k) , \qquad d_1 = -a^{-1} . \tag{4.18}$$

4.4. Die diagonale Eichung

Wenn der eichfixierende Koeffizient d_1 gleich Eins ist, so gelangen wir zu diagonalen Ausdrücken für K und K^{-1}

$$d_1 = 1 : K_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}k^2 , \qquad K^{-1}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(k^2)^{-1} .$$

Daher wird diese Eichung diagonal genannt, und die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\mathrm{diag}} = -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(\partial A)^2$$

kann durch partielle Integration in die Form

$$\mathcal{L}_{\text{diag}} = -\tfrac{1}{2}\,\partial^\nu A_\mu(x)\,\partial_\nu A^\mu(x) = -\tfrac{1}{2}\,A_{\mu,\nu}A^{\mu,\nu} \tag{4.19}$$

gebracht werden, so daß sie sich als kovariante Summe der Lagrange-Dichten für jede einzelne Komponente von A_μ darstellt.

Die Lagrange-Dichte (4.19) führt zu den d'Alembert-Gleichungen

$$\Box\, A_\mu(x) = 0 \tag{4.20}$$

und ist für die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes am geeignetsten. Seinem physikalischen Inhalt nach (also hinsichtlich der beobachtbaren Felder $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$) entspricht sie, wie auch die allgemeinere Lagrange-Dichte (4.13), der „transversalen" Lagrange-Dichte (4.12).

Wir weisen ferner darauf hin, daß die Bewegungsgleichungen (4.20) und die Lagrange-Dichte (4.19), welche Spezialfälle der allgemeinen Ausdrücke (4.13) und (4.14) darstellen, gegenüber den speziellen Eichtransformationen (4.16) invariant sind. In jedem beliebigen, aber fest gewählten Bezugssystem kann die Funktion f_0 dieser Transformation so gewählt werden, daß die nullte Komponente des transformierten Potentials A_0', die ebenfalls die freie Bewegungsgleichung (4.20) erfüllt, verschwindet. Die Lorentz-Bedingung nimmt dann die Form

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{4.21}$$

an. Diese Eichung wird als *Coulomb-Eichung* bezeichnet.

In der Impulsdarstellung lautet Gl. (4.21)

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}(k) = 0\,.$$

Damit genügt das elektromagnetische Feld in der Coulomb-Eichung der Transversalitätsbedingung im gewöhnlichen (dreidimensionalen) Sinn. Obwohl also das elektromagnetische Feld durch ein aus vier Komponenten bestehendes Potential beschrieben wird, haben nur die beiden senkrecht auf dem Wellenzahlvektor $\boldsymbol{k}$ stehenden Komponenten einen physikalischen Sinn. Die Zurückführung des vierkomponentigen Feldes durch Eichtransformationen auf ein Feld aus zwei Komponenten hängt mit der verschwindenden Ruhmasse der Photonen, der Quanten des elektromagnetischen Feldes, zusammen. Deshalb treten auch in den Bewegungsgleichungen nur Ableitungen von A_ν auf, und das elektromagnetische Feld wird eichinvariant.

Aus der Lagrange-Dichte (4.19) erhält man mit Hilfe des Noether-Theorems nach dem Standard-Schema der Vorlesung 2. die folgenden Größen:

Den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = -A_\sigma^{,\mu}A^{\sigma,\nu} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\,;$$

die Energie- und Impulsdichte

$$T^{00} = -\tfrac{1}{2}\,(\dot{A}^\nu\dot{A}_\nu + \partial_n A^\nu\,\partial_n A_\nu)\,, \qquad T^{0k} = \dot{A}_\nu\,\partial^k A^\nu\,;$$

den Spindrehimpulstensor

$$S^{\tau(\nu\mu)} = A^\mu A^{\nu,\tau} - A^\nu A^{\mu,\tau}$$

und den (räumlichen) Spindichtevektor

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{A}(x)\times\dot{\boldsymbol{A}}(x)]\,.$$

Dabei ist allerdings zusätzlich zum Lagrange-Formalismus die Lorentz-Bedingung (4.6) zu fordern.

Zur Berechnung der dynamischen Erhaltungsgrößen benutzen wir wieder die Zerlegung des Feldes in positiv- und negativ-frequente Anteile und gehen gleichzeitig zur Impulsdarstellung für das freie Feld über:

$$A_\nu^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm ikx} A_\nu^\pm(\boldsymbol{k}) . \qquad (4.22)$$

4.5. Der Übergang zum lokalen Repère

Um in der Impulsdarstellung (4.22) eine Diagonalisierung vornehmen zu können, muß das Feld in die auf das lokale Repère bezogenen Komponenten zerlegt werden. Da die Ruhmasse der Photonen gleich Null ist ($m = 0$), muß die Transformation (3.24) jedoch modifiziert werden. Dazu stellen wir $A(\boldsymbol{k})$ als Summe von transversalen, longitudinalen und skalaren (oder „zeitlichen") Termen dar

$$A_\nu^\pm(\boldsymbol{k}) = e_\nu^1 a_1^\pm(\boldsymbol{k}) + e_\nu^2 a_2^\pm(\boldsymbol{k}) + e_\nu^3 a_3^\pm(\boldsymbol{k}) + e_\nu^0 a_0^\pm(\boldsymbol{k}) . \qquad (4.23)$$

Hierbei sind $e^1(\boldsymbol{k})$ und $e^2(\boldsymbol{k})$ in Analogie zu (3.24) zwei räumliche, transversale Einheitsvektoren, $\boldsymbol{e}^3 = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ ist der longitudinale Einheitsvektor, wobei

$$e_0^i = 0 , \qquad \boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = \delta^{ij} , \qquad [\boldsymbol{e}^i \times \boldsymbol{e}^j] = \boldsymbol{e}^k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

gilt, und e^0 den „zeitlichen" Einheitsvektor bezeichnet $e_\nu^0 = \delta_{\nu 0}$. Es läßt sich leicht überprüfen, daß die Transformation (4.23) die Diagonalgestalt der fundamentalen bilinearen Form

$$A_\nu^+(\boldsymbol{k})\, A_\nu^-(\boldsymbol{k}) = g^{\sigma\varrho} a_\sigma^+(\boldsymbol{k})\, a_\varrho^-(\boldsymbol{k}) \qquad (4.24)$$

nicht zerstört.

Gehen wir mit der Darstellung (4.23) in die Lorentz-Bedingung ein, so erhalten wir für die positiv- bzw. negativ-frequenten Anteile je eine Bedingungsgleichung

$$|\boldsymbol{k}|\, a_3^\pm(\boldsymbol{k}) - k_0 a_0^\pm(\boldsymbol{k}) = 0 .$$

Da nun aber die Masse m gleich Null ist, gilt $|\boldsymbol{k}| = k_0$, und hiermit folgt

$$a_3^+(\boldsymbol{k})\, a_3^-(\boldsymbol{k}) = a_0^+(\boldsymbol{k})\, a_0^-(\boldsymbol{k}) . \qquad (4.25)$$

Der physikalische Sinn dieser Beziehung besteht darin, daß die mittleren Teilchenzahldichten der „longitudinalen" Photonen $a_3^+a_3^-$ und der „skalaren" Photonen $a_0^+a_0^-$ auf Grund der Lorentz-Bedingung übereinstimmen. Da nun ihre Beiträge auf der rechten Seite von (4.24) mit unterschiedlichem Vorzeichen eingehen, kann man das so interpretieren, daß sich die „longitudinalen" und „skalaren" Photonen sozusagen gegenseitig kompensieren. Nach dem Einsetzen von (4.25) in (4.24) erhalten wir

$$-A_\nu^+(\boldsymbol{k})\, A_\nu^-(\boldsymbol{k}) = a_1^+(\boldsymbol{k})\, a_1^-(\boldsymbol{k}) + a_2^+(\boldsymbol{k})\, a_2^-(\boldsymbol{k}) .$$

Die Berechnung des Energie-Impuls-Vektors

$$P^\nu = \sum_{s=1,2} \int d\boldsymbol{k}\, k^\nu a_s^+(\boldsymbol{k})\, a_s^-(\boldsymbol{k})$$

zeigt, daß im gegebenen Fall ganz analog zum Vektorfeld die Energie allein wegen der Lorentz-Bedingung positiv definit ist. Der Spindrehimpulsvektor bestimmt

sich zu

$$S = \mathrm{i} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}[\boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{k})] = \mathrm{i} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \varepsilon_{abc} e^a a_b^+(\boldsymbol{k})\, a_c^-(\boldsymbol{k})\,.$$

Für die Projektion des Integranden auf die Richtung des Wellenzahlvektors erhalten wir

$$\Delta S_\| \sim \mathrm{i}[a_1^+(\boldsymbol{k})\, a_2^-(\boldsymbol{k}) - a_2^+(\boldsymbol{k})\, a_1^-(\boldsymbol{k})]\,.$$

Führen wir nun, wie schon in der Vorlesung 3., neue Amplituden b_1 und b_2 ein, dann erhalten wir für P_ν und $\Delta S_{||}$ die „diagonalen" Ausdrücke:

$$P_\nu = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, k_\nu [b_1^+(\boldsymbol{k})\, b_1^-(\boldsymbol{k}) + b_2^+(\boldsymbol{k})\, b_2^-(\boldsymbol{k})]\,, \tag{4.26}$$

$$\Delta S_\| \sim [b_1^+(\boldsymbol{k})\, b_1^-(\boldsymbol{k}) - b_2^+(\boldsymbol{k})\, b_2^-(\boldsymbol{k})]\,. \tag{4.27}$$

Aus ihnen folgt, daß die Produkte

$$n_s(\boldsymbol{k}) = b_s^+(\boldsymbol{k})\, b_s^-(\boldsymbol{k}) \qquad (s = 1, 2) \tag{4.28}$$

als mittlere Teilchenzahldichten von Teilchen der Masse Null, dem Impuls $\boldsymbol{k}$, der Energie $|\boldsymbol{k}|$ und der Spinprojektion $+1$ bzw. -1 (auf die Richtung des Wellenzahlvektors $\boldsymbol{k}$) für $s = 1$ bzw. 2 interpretiert werden können. Faktisch haben wir es also mit *Photonen* zu tun.

Auf diese Weise konnten wir uns durch den Übergang zur Impulsdarstellung anschaulich davon überzeugen, daß das elektromagnetische Feld transversale Photonen mit zwei möglichen Werten der Spinprojektion auf die Bewegungsrichtung beschreibt.

5. Das Dirac-Feld

5.1. Dirac-Gleichung und Dirac-Matrizen

Als Spinorfelder werden diejenigen Felder bezeichnet, die sich nach einer Spinordarstellung der Poincaré-Gruppe transformieren. Nach der Quantisierung beschreiben diese Felder Teilchen mit halbzahligem Spin ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ...). Das einfachste Spinorfeld ist das Feld für Teilchen mit Ruhmasse $m \neq 0$ und Spin $s = \frac{1}{2}$. Es wurde erstmals von Dirac zur Beschreibung der Elektronen eingeführt; es beschreibt aber auch Müonen, Nuklonen (Protonen und Neutronen) und einige Hyperonen. Im weiteren werden wir dieses Feld als *Dirac-Feld* bezeichnen. Die zugehörigen Feldgleichungen erhalten wir nach Dirac durch die „Faktorisierung" des Klein-Gordon-Operators

$$\Box - m^2 = P_\nu P^\nu - m^2\,,$$

wobei zur Vereinfachung der Schreibweise die gewöhnlichen quantenmechanischen Bezeichnungen

$$P_\nu = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \mathrm{i}\partial_\nu$$

verwendet wurden. Der Operator $\Box - m^2$ ist in den Ableitungen ∂_ν quadratisch und läßt sich, wovon man sich leicht überzeugen kann, nicht als Produkt zweier in P_ν linearer Faktoren mit Zahlenkoeffizienten darstellen. Versucht man nämlich,

diesen Operator in Analogie zur bekannten Formel für die Umformung einer Differenz zweier Quadrate als ein Produkt aus zwei Faktoren aufzuschreiben,

$$\Box - m^2 = (\hat{P} + m)(\hat{P} - m),$$

wobei $\hat{P}$ eine Linearkombination der Operatoren P_ν mit Koeffizienten γ^ν ist,

$$\hat{P} = \gamma^\nu P_\nu,$$

so muß folgende Beziehung gelten:

$$P_\nu P^\nu = (\gamma^\mu P_\mu)^2.$$

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite dieser Gleichung erhalten wir eine Bedingung, der diese Koeffizienten genügen müssen:

$$\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu}. \tag{5.1}$$

Demzufolge müssen die Symbole γ^ν mit unterschiedlichen Indizes antikommutieren; sie sind also keine Zahlen, können aber als *Matrizen* gewählt werden.

Mit Hilfe derartiger Matrixkoeffizienten kann der Klein-Gordon-Operator als Produkt zweier kommutierender Operatoren dargestellt werden

$$\Box - m^2 = (\mathrm{i}\gamma^\nu \partial_\nu + m)(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m).$$

Damit eine Feldfunktion der Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box - m^2)\,\psi = 0$$

genügt, reicht es aus, daß sie eine der beiden Gleichungen erster Ordnung

$$(\mathrm{i}\gamma^\nu \partial_\nu - m)\,\psi(x) = 0 \quad \text{oder} \quad (\mathrm{i}\gamma^\nu \partial_\nu + m)\,\psi(x) = 0$$

befriedigt.

Der Tradition folgend wählen wir als Bewegungsgleichung für das Spinorfeld die erste der beiden Gleichungen

$$(\mathrm{i}\hat{\partial} - m)\,\psi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\partial} \equiv \gamma^\nu \partial_\nu. \tag{5.2}$$

Es versteht sich von selbst, daß Gl. (5.2) weniger allgemein ist als die Klein-Gordon-Gleichung. Man kann deshalb erwarten, daß sie eine detailliertere Information enthält. Das ist auch tatsächlich der Fall, weil es DIRAC als erstem gelang, mit Hilfe der Gleichung (5.2) den Spin $s = \frac{1}{2}$ des Elektrons zu beschreiben. Gl. (5.2) heißt *Dirac-Gleichung*, und die Matrizen γ^ν, die durch die Beziehungen (5.1) bestimmt sind, heißen *Dirac-Matrizen*.

Wegen der Matrixstruktur des Differentialoperators der Dirac-Gleichung muß das Feld selbstverständlich aus mehreren Komponenten bestehen. Wie im Anhang II. gezeigt wird, stellt das Dirac-Feld im einfachsten Fall einen vierkomponentigen Spinor dar, der gewöhnlich in Form einer Spalte

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

geschrieben wird. (Aus drucktechnischen Gründen werden wir ihn gelegentlich mit $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^{\mathrm{T}}$ bezeichnen.)

Damit entsprechen der einen Matrixgleichung (5.2) die folgenden vier Gleichungen für die Spinorkomponenten:

$$(\mathrm{i}\gamma^\nu \partial_\nu - mI)_{\alpha\beta}\, \psi_\beta(x) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Die vier Größen γ^ν sind quadratische Matrizen vom Range 4 mit den Matrixelementen $\gamma^\nu_{\alpha\beta}$, und I ist die Einheitsmatrix ($I_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$), deren Symbol wir aber des öfteren weglassen werden. Die grundlegenden Eigenschaften der Dirac-Matrizen werden durch die (Anti-)Vertauschungsrelationen (5.1) bestimmt. Sie sind ausführlich im Anhang II. dargelegt. Aus (5.1) folgt unter anderem, daß die Dirac-Matrizen unitär gewählt werden können, d. h.

$$\gamma^\nu \overset{+}{\gamma}{}^\nu = \overset{+}{\gamma}{}^\nu \gamma^\nu = I\,, \quad \text{(keine Summationen über } \nu\text{!)}$$

wenn die hermitesch konjugierten Matrizen durch

$$\overset{+}{\gamma}{}^\nu = g_{\nu\mu}\gamma^\mu \equiv \gamma_\nu \tag{5.3}$$

definiert werden. Wie hieraus zu ersehen ist, erfolgt die Operation des Senkens und Hebens des Lorentz-Indexes bei den Dirac-Matrizen nach den üblichen Regeln. Der hermitesch konjugierte Spinor $\overset{*}{\psi}$ ist durch eine vierkomponentige Zeile $\overset{*}{\psi} = (\overset{*}{\psi}_1, \overset{*}{\psi}_2, \overset{*}{\psi}_3, \overset{*}{\psi}_4)$ gegeben, deren Elemente aus den Komponenten ψ_α durch komplexe Konjugation entstehen. Durch Rechtsmultiplikation dieses Spinors mit der Matrix γ^0 erhalten wir den sogenannten konjugierten Dirac-Spinor

$$\overline{\psi}(x) = \overset{*}{\psi}(x)\, \gamma^0\,,$$

den wir im weiteren einfach als *konjugierten Spinor* bezeichnen. Unter Verwendung von (5.3) kann man zeigen (siehe Anhang II.), daß der konjugierte Spinor $\overline{\psi}$, der Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_\nu \overline{\psi}(x)\, \gamma^\nu + m\overline{\psi}(x) = 0 \tag{5.4}$$

genügt.

Wie oben bereits erwähnt, erfüllt jede der Komponenten des Spinors $\psi(x)$ die Klein-Gordon-Gleichung. Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man auf Gl. (5.2) von links den Operator $\mathrm{i}\hat{\partial} + m$ anwendet und die Vertauschungsrelation 5.1) berücksichtigt.

Zum Schluß sei noch darauf verwiesen, daß gemäß der üblichen Konvention über Matrixmultiplikation das folgende Produkt $\overline{\psi}O\psi$ mit irgendeiner (4×4)-Matrix O die Summation über die Spinorindizes mit einschließt,

$$\overline{\psi}O\psi = \overline{\psi}_\alpha O_{\alpha\beta}\psi_\beta\,,$$

und daher eine Zahl repräsentiert; Ausdrücke der Art $\psi\overline{\psi}$ sind dagegen Matrizen

$$\psi\overline{\psi} = A \quad \text{mit} \quad A_{\alpha\beta} = \psi_\alpha\overline{\psi}_\beta\,.$$

$\overline{\psi}$ bzw. ψ werden hierbei wie einzeilige bzw. einspaltige Matrizen behandelt.

5.2. Der Lagrange-Formalismus

Die Dirac-Gleichung (5.2) und die zu ihr konjugierte Gl. (5.4) folgen über das Variationsprinzip aus der Lagrange-Dichte

$$\mathscr{L} = (\mathrm{i}/2)\,[\overline{\psi}(x)\,\gamma^\nu\partial_\nu\psi(x) - \partial_\nu\overline{\psi}(x)\,\gamma^\nu\psi(x)] - m\overline{\psi}(x)\,\psi(x)\,. \tag{5.5}$$

Die Besonderheit dieser Lagrange-Dichte besteht darin, daß sie Null wird, wenn die in sie eingehenden Feldfunktionen $\bar{\psi}$ und ψ die Bewegungsgleichungen erfüllen.

Unter Verwendung des Noether-Theorems erhalten wir aus dieser Lagrange-Dichte den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = (i/2)\,[\bar{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi(x) - \partial^{\nu}\bar{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\psi(x)] \tag{5.6}$$

und den Stromdichtevektor

$$J^{\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\psi(x)\,. \tag{5.7}$$

Bei der Herleitung von (5.6) wurden die Bewegungsgleichungen ausgenutzt.

Zur Berechnung des Spindrehimpulstensors sei zunächst bemerkt, daß nach Ausführung der Summation über die Spinorindizes die Formel (2.24) die Gestalt

$$S^{\tau(\mu\nu)} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{,\tau}}A^{\psi(\mu\nu)}\psi(x) - \bar{\psi}(x)\,A^{\bar{\psi}(\mu\nu)}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}_{,\tau}}$$

annimmt. Die hier auftretenden infinitesimalen Generatoren A^{ψ} und $A^{\bar{\psi}}$ ergeben sich aus den Formeln für infinitesimale Lorentz-Transformationen

$$\psi'(x') = \left(1 - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\varphi\right)\psi(x)\,, \qquad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}\varphi\right),$$

welche ihrerseits aus den Gleichungen (A II.16, 18, 20) folgen, zu

$$A^{\psi(\mu\nu)} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}\,, \qquad A^{\bar{\psi}(\mu\nu)} = \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu\nu}$$

(siehe Aufg. A 29). $\sigma^{\mu\nu}$ ist hierbei die Matrix $1/(2\mathrm{i})\,(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}$ (siehe Formel (A II.2)). Deshalb gilt

$$S^{\tau(\mu\nu)} = \tfrac{1}{4}\,\bar{\psi}(x)\,(\gamma^{\tau}\sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^{\tau})\,\psi(x)\,. \tag{5.8}$$

5.3. Die Impulsdarstellung

Unter Berücksichtigung dessen, daß die Komponenten $\psi_{\alpha}(x)$ des Dirac-Spinors die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, schreiben wir die Impulsdarstellung in der Form

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}p\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\,\delta(p^2 - m^2)\,\tilde{\psi}(p)\,.$$

Hierbei genügt die Amplitude $\tilde{\psi}$ der Dirac-Gleichung in der Impulsdarstellung

$$(\hat{p} + m)\,\tilde{\psi}(p)|_{p^2=m^2} = 0\,.$$

(Es sei daran erinnert, daß in unseren Bezeichnungen $\hat{p} = \gamma^{\nu}p_{\nu}$ gilt.)

Zerlegen wir, wie üblich, die Feldfunktionen in ihre Frequenzanteile $\psi = \psi^{+} + \psi^{-}$ und führen die Integration über p_0 explizit aus, so erhalten wir die dreidimensionale Impulsdarstellung in der Form

$$\psi^{\pm}(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\;\psi^{\pm}(\boldsymbol{p})\exp(\pm\mathrm{i}px)\,, \tag{5.9}$$

$$\psi^{\pm}(\boldsymbol{p}) = \Theta(p^0)\frac{\psi^{\pm}(p)}{2p_0}.$$

Hierbei ist im Integranden (wie auch im weiteren)

$$p_0 = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

zu setzen. Die Spinoren $\psi^{\pm}(\boldsymbol{p})$ genügen folgenden Matrix-Gleichungen:

$$(m \pm \hat{p})\, \psi^{\pm}(\boldsymbol{p}) = 0\,. \tag{5.10}$$

Die entsprechenden Gleichungen für die konjugierten Spinoren lauten

$$\overline{\psi}^{\pm}(\boldsymbol{p})\,(m \mp \hat{p}) = 0\,. \tag{5.11}$$

Die explizite Gestalt der Komponenten $\psi_\alpha^{\pm}$ und $\overline{\psi}_\beta^{\pm}$ ist allerdings von der Darstellung der Dirac-Matrizen γ abhängig und kann wie folgt bestimmt werden: Auf Grund ihrer Kovarianz kann man die Gleichung (5.10) in irgendeinem fixierten Bezugssystem betrachten, da es stets möglich ist, mit Hilfe der im Anhang II. angegebenen Transformationen den Übergang in ein beliebiges anderes System zu vollziehen. Wir wählen als System dasjenige, in dem $\boldsymbol{p} = 0$ ist, und erhalten aus (5.10)

$$(\gamma^0 \pm I)\, \psi^{\pm}(0) = 0\,.$$

In der Standarddarstellung (A II.5) erhalten wir dann

$$\psi_\alpha^-(0) = c_1\delta_{1\alpha} + c_2\delta_{2\alpha}\,, \qquad \psi_\beta^+(0) = c_3\delta_{3\beta} + c_4\delta_{4\beta}\,. \tag{5.12}$$

Hierbei sind α und β Spinorindizes, und $\delta_{\alpha\beta}$ ist das Kronecker-Symbol.

Die Lösung für einen beliebigen von Null verschiedenen Vektor $\boldsymbol{p}$ erhält man aus (5.12) durch eine entsprechende Lorentz-Transformation. Wir stellen die Gleichungen, denen ψ^+ und ψ^- genügen, in der Form

$$(\pm\gamma^0 p_0 - \gamma\boldsymbol{p} + m)\, \psi^{\pm}(\pm\boldsymbol{p}) = 0$$

dar, in welcher sie sich voneinander nur durch das Vorzeichen bei p_0 unterscheiden. Jede dieser Gleichungen hat, wie eben festgestellt wurde, zwei linear unabhängige Lösungen. Daraus folgt aber, daß die Dirac-Gleichung für jeden vorgegebenen Wert des Vektors p (das Vorzeichen der Komponente p_0 ist fixiert!) nur zwei linear unabhängige Lösungen hat.

Dementsprechend hat auch der konjugierte Spinor $\overline{\psi}$ bei fixiertem Vorzeichen zwei linear unabhängige Lösungen. Nun folgt aus der Tatsache, daß die betrachteten Lösungen der Dirac-Gleichung komplex sind, daß sie Teilchen mit einander entgegengesetzter Ladung, oder genauer Teilchen und Antiteilchen beschreiben. Das Auftreten zweier linear unabhängiger Lösungen bedeutet, daß diese Teilchen sich nur in zwei verschiedenen Zuständen befinden können, die sich, wie wir weiter unten sehen werden, durch das Vorzeichen der Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung unterscheiden.

5.4. Zerlegung nach Spinzuständen

Die normierten linear unabhängigen Lösungen der Dirac-Gleichung mit $p_0 > 0$ bzw. $p_0 < 0$ bezeichnen wir mit $v^{s+}(\boldsymbol{p})$ bzw. $v^{s-}(\boldsymbol{p})$ $(s = 1, 2)$; das entspricht dem oberen bzw. unteren Vorzeichen in Gl. (5.10) (Normierungsbedingungen siehe unten, Formel (5.16)). Damit können wir die Zerlegung der Funktionen $\psi^{\pm}(\boldsymbol{p})$ nach Spinzuständen in der Form

$$\psi_\alpha^{\pm}(\boldsymbol{p}) = \sum_{s=1,2} a_s^{\pm}(\boldsymbol{p})\, v_\alpha^{s\pm}(\boldsymbol{p}) \equiv a_s^{\pm}(\boldsymbol{p})\, v_\alpha^{s\pm}(\boldsymbol{p}) \tag{5.13}$$

schreiben. Entsprechend gilt für den konjugierten Spinor

$$\overline{\psi}^{\pm}(\boldsymbol{p}) = \overset{*}{a}{}_s^{\pm}(\boldsymbol{p})\, \overline{v}^{s\pm}(\boldsymbol{p}) \equiv \overset{*}{a}{}_s^{\pm}(\boldsymbol{p})\, \overset{*}{v}{}^{s\pm}(\boldsymbol{p})\, \gamma^0\,. \tag{5.14}$$

Da $\bar{\psi}^+$ und $\bar{\psi}^-$ positiv- und negativ-frequente Anteile der Funktion $\bar{\psi}$ sind, werden die zu den normierten Spinoren v hermitesch konjugierten Spinoren wie folgt definiert:

$$\left(v^{s\pm}(\boldsymbol{p})\right)^* = \overset{*}{v}{}^{s\mp}(\boldsymbol{p}) . \tag{5.15}$$

Deshalb kann man die Orthonormierungsbedingungen für die Spinoren v in der Gestalt

$$\overset{*}{v}{}^{s\pm}(\boldsymbol{p})\, v^{r\mp}(\boldsymbol{p}) \equiv \sum_{\alpha=1,2,3,4} \overset{*}{v}{}^{s\pm}_{\alpha}(\boldsymbol{p})\, v^{r\mp}_{\alpha}(\boldsymbol{p}) = \delta^{sr} \tag{5.16}$$

schreiben.

Durch rein algebraische Transformationen erhält man aus (5.15), (5.16) und der Dirac-Gleichung eine Reihe nützlicher Beziehungen für quadratische Formen aus den Spinoren v und $\bar{v} = \overset{*}{v}\gamma_0$. Die wichtigsten von ihnen sind:

Die Orthonormierungsbedingung für die konjugierten Spinoren

$$\bar{v}^{s\pm}(\boldsymbol{p})\, v^{r\mp}(\boldsymbol{p}) = \pm \frac{m}{p_0} \delta^{sr}; \tag{5.17}$$

die Bedingung für die gegenseitige Orthogonalität von Spinoren mit unterschiedlichem Vorzeichen der Argumente

$$\overset{*}{v}{}^{s\pm}(\boldsymbol{p})\, v^{r\pm}(-\boldsymbol{p}) = 0; \tag{5.18}$$

die Beziehungen ($l, n = 1, 2, 3$)

$$\left.\begin{aligned} &\overset{*}{v}{}^{s\pm}(\boldsymbol{p})\, (p^n\gamma^l - p^l\gamma^n - m\gamma^n\gamma^l)\, v^{r\pm}(-\boldsymbol{p}) = 0\,, \\ &\sum_n p_n \overset{*}{v}{}^{s\pm}(\boldsymbol{p})\, (\gamma^n\gamma^l - \gamma^l\gamma^n)\, v^{r\mp}(-\boldsymbol{p}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

und schließlich die Formeln zur Summation über die Spinrichtung s

$$v^{s\pm}_{\alpha}(\boldsymbol{p})\, \bar{v}^{s\mp}_{\beta}(\boldsymbol{p}) = \frac{(\hat{p} \mp m)_{\alpha\beta}}{2p_0}. \tag{5.20}$$

5.5. Dynamische Erhaltungsgrößen

Durch Einsetzen von (5.9), (5.13) und (5.14) in (5.6) und anschließende Integration von $T^{0\nu}$ über $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ erhalten wir unter Berücksichtigung der Orthonormierungsbedingungen (5.16) den Energie-Impuls-Vektor in der Form

$$P_\nu = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, k_\nu [\overset{*}{a}{}^{+}_{s}(\boldsymbol{k})\, a^{-}_{s}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}^{-}_{s}(\boldsymbol{k})\, a^{+}_{s}(\boldsymbol{k})] . \tag{5.21}$$

Unter Beachtung dessen, daß die komplex konjugierten Amplituden in der Impulsdarstellung durch $(a^\pm)^* = \overset{*}{a}{}^{\mp}$ gegeben sind, überzeugt man sich leicht davon, daß der aus (5.21) folgende Ausdruck für die Energie

$$P_0 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, k_0 [\overset{*}{a}{}^{+}_{s}(\boldsymbol{k})\, a^{-}_{s}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}^{-}_{s}(\boldsymbol{k})\, a^{+}_{s}(\boldsymbol{k})] \tag{5.22}$$

nicht positiv definit ist. Positive Definitheit der Energie des Spinorfeldes wird erst in der Quantentheorie vermöge der Fermi-Dirac-Quantisierung erzielt.

Gehen wir zur Berechnung des Spindrehimpulsvektors über. Als erstes sei bemerkt, daß in der Standarddarstellung (A II.5) die Komponenten $\sigma^{\mu\nu}$ des Spin-

tensors durch die Matrizen α_i und σ_j folgendermaßen ausgedrückt werden können:

$$\sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^{00} & \sigma^{01} & \sigma^{02} & \sigma^{03} \\ \sigma^{10} & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{20} & \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{30} & \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha_1 & -i\alpha_2 & i\alpha_3 \\ -i\alpha_1 & 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 \\ -i\alpha_2 & -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 \\ -i\alpha_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Setzen wir in (5.8) $\tau = 0$ und $\mu, \nu = 1, 2, 3$, dann erhalten wir nach einer Ortsraumintegration den Spindrehimpulsvektor

$$\boldsymbol{S} = \tfrac{1}{2} \int \overset{*}{\psi}(x)\, \boldsymbol{\sigma}\psi(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{5.24}$$

Die im Integranden erscheinende Spindrehimpulsdichte enthält — wie es sein sollte — die verallgemeinerten Pauli-Matrizen (siehe A II.6).

Im Gegensatz zum Spin für das Vektorfeld und das elektromagnetische Feld ist der Spindrehimpulsvektor (5.24) keine Erhaltungsgröße. (Das hängt damit zusammen, daß der Energie-Impuls-Tensor nicht symmetrisch ist.) Wenn jedoch die Felder ψ, $\bar{\psi}$ nicht von allen Koordinaten x^9, x^1, ... abhängen, kann man leicht erreichen, daß einzelne Komponenten des Tensors S die Kontinuitätsgleichung erfüllen und folglich die entsprechenden Integrale erhalten bleiben; z.B. ergibt sich, wenn wir $\partial/\partial x_1 = \partial/\partial x_2 = 0$ setzen,

$$\partial_\nu S^{\nu(12)} = 0\,,$$

woraus folgt, daß die Projektion des Spindrehimpulsvektors auf die Achse x^3

$$S_3 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, S^{0(12)}$$

erhalten bleibt. In der Impulsdarstellung entspricht dies der Erhaltung der Projektion des Spindrehimpulsvektors auf die Bewegungsrichtung.

Gehen wir in der Gleichung (5.24) zur dreidimensionalen Impulsdarstellung über und führen wir die Integration über den dreidimensionalen Konfigurationsraum aus, so folgt

$$\Delta\boldsymbol{S} \sim (1/2)\, \{\overset{*}{\psi}{}^+(\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{\sigma}\psi^-(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{\psi}{}^-(\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{\sigma}\psi^+(\boldsymbol{k})$$
$$+ \mathrm{e}^{2ik_0x_0}\, \overset{*}{\psi}{}^+(\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{\sigma}\psi^+(\boldsymbol{k}) + \mathrm{e}^{-2ik_0x_0}\, \overset{*}{\psi}{}^-(\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{\sigma}\psi^-(\boldsymbol{k})\}\,.$$

Beschränken wir uns im weiteren auf die Betrachtung der Komponente S_3, und verwenden wir die erste Beziehung (5.19) in der Form

$$\overset{*}{v}{}^\pm(\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{\sigma} v^\pm(-\boldsymbol{k}) = \frac{i}{m} \overset{*}{v}{}^\pm(\boldsymbol{k})\, [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\gamma}]\, v^\pm(-\boldsymbol{k})\,,$$

so verschwinden in einem Bezugssystem, für das $k_1 = k_2 = 0$ gilt, die zeitabhängigen Glieder von S_3. Auf diese Weise gelangen wir zum Ausdruck

$$\Delta S_\parallel \sim (1/2)\, [\overset{*}{a}{}_s^+(\boldsymbol{k})\, a_r^-(\boldsymbol{k})\, \overset{*}{v}{}^{s+}(\boldsymbol{k})\, \sigma_3 v^{r-}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{a}{}_s^-(\boldsymbol{k})\, a_r^+(\boldsymbol{k})\, \overset{*}{v}{}^{s-}(\boldsymbol{k})\, \sigma_3 v^{r+}(\boldsymbol{k})]\,. \tag{5.25}$$

Um diesen nun noch weiter zu konkretisieren, ist es angebracht, zu irgendeiner speziellen Darstellung der Dirac-Matrizen überzugehen. In der Standarddarstellung ist die Matrix σ_3 diagonal

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}.$$

Als normierte Spinoren in dem durch $k_1 = k_2 = 0$ gegebenen System wählen wir

$$\left.\begin{aligned} v^{1-} &= N^{-1}\left(1,\quad 0,\quad \frac{k_3}{k_0+m},\quad 0\right)^{\mathrm{T}}, \\ v^{2-} &= N^{-1}\left(0,\quad 1,\quad 0,\quad \frac{-k_3}{k_0+m}\right)^{\mathrm{T}}, \\ v^{1+} &= N^{-1}\left(\frac{k_3}{k_0+m},\quad 0,\quad 1,\quad 0\right)^{\mathrm{T}}, \\ v^{2+} &= N^{-1}\left(0,\quad \frac{-k_3}{k_0+m},\quad 0,\quad 1\right)^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

mit dem Normierungsfaktor:

$$N = \left[1 + \left(\frac{k_3}{k_0+m}\right)^2\right]^{1/2} = \left(\frac{2k_0}{k_0+m}\right)^{1/2}.$$

Somit nimmt die Gleichung (5.25) folgende Form an:

$$\Delta S_3 \sim (1/2)\,[\overset{*}{a}{}_1^+ a_1^- - \overset{*}{a}{}_2^+ a_2^- + \overset{*}{a}{}_1^- a_1^+ - \overset{*}{a}{}_2^- a_2^+]\,. \tag{5.27}$$

Vergleichen wir nun die Ausdrücke für den Energie-Impuls-Vektor (5.21), für die Projektion des Spindrehimpulsvektors (5.27) und für die direkt aus (5.7) folgende Ladung

$$Q = \int \overset{*}{\psi}(x)\,\psi(x)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}[\overset{*}{a}{}_s^+(\boldsymbol{k})\,a_s^-(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{a}{}_s^-(\boldsymbol{k})\,a_s^+(\boldsymbol{k})]\,, \tag{5.28}$$

so stellen wir fest, daß das Dirac-Feld massive geladene Teilchen beschreibt, deren Spinprojektion auf eine vorgegebene Achse die Werte $\pm\frac{1}{2}$ annehmen kann. Eine detailliertere Klassifikation der möglichen Werte von Energie, Impuls, Ladung und Spinprojektion werden wir nach der Quantisierung vornehmen (Vorlesung 9.), wo sie auch eine vollständige und eindeutige Begründung erfährt.

Die Quantisierung freier Felder

6. Die Quantisierung von Feldern

6.1. Das Wesen der Quantisierungsprozedur für Felder

Die Quantisierung von Wellenfeldern ist eine Prozedur, die der Quantisierung der nichtrelativistischen Mechanik von Massepunktsystemen analog ist. Ihre Spezifik besteht darin, daß im Unterschied zu den gewöhnlich in der Quantenmechanik betrachteten physikalischen Systemen mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden den Wellenfeldern Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden entsprechen. Diese Systeme kann man aber als Grenzwerte von Systemen mit einer großen Anzahl N von Freiheitsgraden für $N \to \infty$ auffassen. Als Beispiel hierfür werden in der Quantenmechanik gewöhnlich die aus einer großen Anzahl von Teilchen bestehenden Systeme, und als Spezialfall dieses Typs ein System von N Oszillatoren, herangezogen.

Ein wichtiger technischer Aspekt der Quantisierungsprozedur für Felder ist die Einführung der *Besetzungszahldarstellung* (der sogenannten zweiten Quantisierung[1])). Sie wird häufig bei der Untersuchung von Systemen mit einer Vielzahl identischer Teilchen benutzt. Wegen der technischen Details verweisen wir den Leser auf die Standardliteratur zur Quantenmechanik (siehe z.B. [8], § 33; [18], Kapitel XII; [11], Kapitel III, § 12; [17], Teil III, § 10). Hier wollen wir nur an das Prinzip der Quantisierung erinnern, das man besonders einfach am Beispiel des harmonischen Oszillators erläutern kann.

Den Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit der Masse $m = 1$ schreiben wir in der Form

$$\mathrm{H} = \tfrac{1}{2}\,(p^2 + \omega^2 q^2)\,. \tag{6.1}$$

Die Wellenfunktionen ψ_n der verschiedenen stationären Zustände des Oszillators erfüllen dann die Gleichung

$$\mathrm{H}\psi_n = E_n\psi_n \quad \text{mit} \quad E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})\,.$$

Von einer vorgegebenen Wellenfunktion ausgehend, kann man nun mit Hilfe der folgenden Operatoren a und $\overset{+}{a}$ schrittweise zu Wellenfunktionen mit höherem oder niederem Index gelangen:

$$\overset{+}{a}\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}\,, \qquad a\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}\,. \tag{6.2}$$

Diese Operatoren sind durch Linearkombinationen des Orts- und Impulsoperators $\check{q}$ bzw. $\check{p}$ gegeben:

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\check{q} + \frac{i\check{p}}{\omega}\right), \qquad \overset{+}{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\check{q} - \frac{i\check{p}}{\omega}\right)$$

---

[1]) Der Terminus „zweite Quantisierung“ scheint das Vorhandensein einer ersten Quantisierung anzuzeigen. In Wirklichkeit wird aber nur einmal quantisiert, und dieser Terminus erweist sich daher als desorientierend. Wir werden ihn nach Möglichkeit vermeiden.

(hierbei wurde $\hbar = 1$ gesetzt, und das aufgesetzte Häkchen „$\vee$“ symbolisiert den Operatorcharakter). Im Ortsraum sind diese Operatoren durch $\check{p} = -\mathrm{i}\partial/\partial q$, $\check{q} = q$ und im Impulsraum durch $\check{p} = p$, $\check{q} = \mathrm{i}\partial/\partial p$ gegeben. Der Operator a erhöht also den Index des Zustandes um 1 (und die Energie um $\hbar\omega$), während der Operator a um dieselben Werte erniedrigt. Der Grundzustand muß als niedrigster Zustand die Beziehung

$$a\psi_0 = 0 \tag{6.3}$$

erfüllen. Die Zahlenfaktoren $\sqrt{n+1}$ und $\sqrt{n}$ wurden wegen der Normierung der Zustände in (6.2) eingeführt (siehe unten (6.6)).

Auf Grund der Vertauschungsrelationen zwischen $\check{p}$ und $\check{q}$ gilt

$$\left.\begin{aligned} [a, a^+] &= a\overset{+}{a} - \overset{+}{a}a = 1\,, \\ [a, a] &= [\overset{+}{a}, \overset{+}{a}] = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Aus (6.2) liest man ferner ab, daß die Zustände ψ_n Eigenfunktionen der Produkte $a\overset{+}{a}$ und $\overset{+}{a}a$ mit den Eigenwerten $n+1$ und n sind. Es ist deshalb möglich, einen Operator $\check{n}$ mit den Eigenschaften

$$a\overset{+}{a} = \check{n} + 1\,, \qquad \overset{+}{a}a = \check{n}\,, \qquad \check{n}\psi_n = n\psi_n$$

einzuführen; er könnte als Operator des Zustandsindex bezeichnet werden. Der Hamilton-Operator stellt sich nun folgendermaßen dar:

$$\mathrm{H} = \omega\left(\check{n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\omega}{2}(a\overset{+}{a} + \overset{+}{a}a)\,. \tag{6.5}$$

6.2. Die korpuskulare Deutung der Besetzungszahldarstellung

Die Besetzungszahldarstellung ist dadurch charakterisiert, daß der Zustand des Oszillators nicht durch die Angabe der ψ-Funktion in Abhängigkeit von der Koordinate (im Ortsraum) oder dem Impuls (im Impulsraum), sondern durch die Besetzungszahl n, d. h. die Nummer des Zustandes, beschrieben wird. Im Falle des Oszillators bildet die lineare Abhängigkeit des Hamilton-Operators (6.5) vom Besetzungszahloperator $\check{n}$ die Grundlage einer korpuskularen Deutung.

Dazu stellen wir uns vor, jedem angeregten Zustand ψ_n ($n \geqq 1$) des Oszillators entsprächen n Anregungsquanten, welche jeweils die Energie ω (genauer: $\hbar\omega$) haben. Auf Grund des konstanten Abstandes benachbarter Energieniveaus, was durch eine lineare Abhängigkeit der Energie von n ausgedrückt wird, sind diese Anregungsquanten nicht unterscheidbar. Bei einer solchen Deutung erhalten die Operatoren $\overset{+}{a}$ und a den Sinn von *Erzeugungs-* und *Vernichtungsoperatoren* der Anregungsquanten; der Index n fällt mit der Anzahl dieser Quanten im Zustand ψ_n zusammen, so daß der Operator $\check{n}$ als *Anzahloperator* zu deuten ist.

Den Zustand ψ_n, der n Quanten (Teilchen) enthält, kann man aus dem Grundzustand ψ_0, der keine Teilchen enthält (und infolgedessen als Vakuumzustand bezeichnet wird), durch n-malige Anwendung des Erzeugungsoperators

$$\psi_n = \frac{(\overset{+}{a})^n}{\sqrt{n!}}\psi_0 \tag{6.6}$$

erhalten. Der Zahlenfaktor $(n!)^{-1/2}$ befindet sich in Übereinstimmung mit den Formeln (6.2) und gewährleistet die gleiche Normierung für alle Zustände ψ_n.

Die Beziehungen (6.2) bis (6.6) beschreiben die Quantisierung des harmonischen Oszillators in der *Besetzungszahl-* oder *Fock-Darstellung.* Wichtig dabei ist, daß die Teilchen nicht dem Oszillator selbst, sondern seinen Anregungsquanten entsprechen, sie „entstehen" im Ergebnis der Quantisierung.

Im Falle vieler Freiheitsgrade $N > 1$ wird ein Satz von N Oszillatoren mit jeweils verschiedenen Frequenzen ω_k $(1 \leqq k \leqq N)$ eingeführt. Der Hamilton-Operator ist dann durch die Summe

$$\mathrm{H} = \sum_k H_k = \sum_k \omega_k(\overset{+}{a}_k a_k + \tfrac{1}{2})$$

gegeben. Die Operatoren a_k und a_l genügen bei gleichen Indizes $k = l$ den Vertauschungsrelationen (6.4) und kommutieren miteinander für $k \neq l$, d. h.

$$[a_k, \overset{+}{a}_l] = \delta_{kl}\,, \qquad [a_k, a_l] = [\overset{+}{a}_k, \overset{+}{a}_l] = 0\,.$$

Ein beliebiger Zustand des Systems wird nunmehr durch einen Satz von Besetzungszahlen $n_1, n_2, \ldots, n_N$ charakterisiert, wobei der Zustand

$$\psi(\ldots n_k \ldots) = \prod_{1 \leqq k \leqq N} \left\{\frac{(\overset{+}{a}_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}\right\} \psi_0 \tag{6.7}$$

n_1 Teilchen der ersten Sorte mit der Energie ω_1, n_2 Teilchen einer zweiten Sorte mit der Energie ω_2 usw. enthält.

Um den eben in Abschnitt 6.1. angedeuteten Übergang zur Feldquantisierung vornehmen zu können, zeigen wir jetzt, daß das reelle skalare Feld $u(x)$, das der Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box - m^2)\, u(x) = 0$$

genügt, durch einen abzählbar unendlichen Satz von Oszillatoren dargestellt werden kann. Dazu gehen wir zunächst vom unbegrenzten Konfigurationsraum zu einem „großen Würfel" mit dem Volumen $V = L^3$ über und erlegen den Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung folgende Periodizitätsbedingungen auf:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1 + L, x_2, x_3) \\ &= u(t, x_1, x_2 + L, x_3) = u(t, x_1, x_2, x_3 + L)\,. \end{aligned}$$

Stellen wir u nun als Fourier-Reihe dar,

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{k_1, k_2, k_3} \left(\frac{2\pi}{V\omega_k}\right)^{1/2} \{a(t, \boldsymbol{k})\, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{kx}} + \overset{*}{a}(t, \boldsymbol{k})\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{kx}}\}\,,$$

so erhalten wir als Bewegungsgleichung für die Amplituden $a(t, k)$:

$$\ddot{a}(t, \boldsymbol{k}) + \omega_{\boldsymbol{k}}^2 a(t, \boldsymbol{k}) = 0\,,$$

wobei $\omega_{\boldsymbol{k}}^2 = \boldsymbol{k}^2 + m^2$ gilt. Das ist aber gerade die Gleichung für einen harmonischen Oszillator mit der Amplitude $a(t, \boldsymbol{k})$ und der Frequenz $\omega_{\boldsymbol{k}} = (\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{1/2}$.

Durch die oben geforderte Periodizität im x-Raum sind die möglichen Impulswerte

$$\boldsymbol{k}(n_1, n_2, n_3) = \left\{\frac{2\pi}{L} n_1, \frac{2\pi}{L} n_2, \frac{2\pi}{L} n_3\right\} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}$$

diskret, und zu jedem $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{n})$ gehört ein Oszillator mit der Energie

$$\omega(\boldsymbol{n}) = \left\{m^2 + \frac{4\pi^2}{L^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\right\}^{1/2}.$$

Auf diese Weise wird also dem der Klein-Gordon-Gleichung genügenden relativistischen Feld eine Hamilton-Dichte vom Typ eines Oszillators zugeordnet, wobei die Oszillatoren durch drei ganze Zahlen n_1, n_2 und n_3 durchnumeriert sind.

Der Übergang zum realen (unendlichen) Konfigurationsraum ($L \to \infty$) hat einen kontinuierlichen Impulsraum zur Folge. Dabei werden alle Summen nach der Regel

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\boldsymbol{k}} \to \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

durch Integrale, und das Kronecker-Symbol gemäß

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \to \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$$

durch die Deltafunktion ersetzt. Gleichzeitig ändert sich die Normierung der Operatoren

$$a_{\boldsymbol{k}} \to \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{3/2} a(\boldsymbol{k}),$$

und wir erhalten die Vertauschungsrelationen

$$\left.\begin{aligned} [a(\boldsymbol{k}), \overset{+}{a}(\boldsymbol{k}')] &= \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \\ [a(\boldsymbol{k}), a(\boldsymbol{k}')] &= [\overset{+}{a}(\boldsymbol{k}), \overset{+}{a}(\boldsymbol{k}')] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Die Formel (6.7) behält auch im kontinuierlichen Fall ihren Sinn (das kontinuierliche Produkt ist wohldefiniert, sofern nur endlich viele Besetzungszahlen $n(\boldsymbol{k})$ von Null verschieden sind). Die entsprechenden Zustände enthalten jeweils $n(\boldsymbol{k})$ Quanten mit streng fixiertem Impuls $\boldsymbol{k}$. Im Ortsraum entsprechen den zugehörigen Wellenfunktionen ebene Wellen; deshalb haben solche Zustände keine endliche Norm (siehe Aufgabe B 3).

Zum Schluß sei noch die wichtige Bemerkung angefügt, daß durch die Quantisierung (6.8) das der Klein-Gordon-Gleichung genügende Feld $u(x) = u(t, \boldsymbol{x})$ als dreidimensionales Impulsraumintegral über eine Linearform der Operatoren $a(\boldsymbol{k})$ und $\overset{+}{a}(\boldsymbol{k})$ dargestellt und somit selbst zu einem Operator wird.

6.3. Kanonische Quantisierung

Die oben formulierte Quantisierung des harmonischen Oszillators mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren kann man recht einfach im Rahmen des kanonischen Formalismus der klassischen Mechanik ableiten.

Die grundlegenden dynamischen Variablen des kanonischen Formalismus sind die Koordinaten q und die zugehörigen konjugierten Impulse

$$p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}\right).$$

Die Hamilton-Funktion des Oszillators hat in diesen Variablen q und p die Gestalt (6.1). Die Bewegungsgleichung einer beliebigen von q und p abhängigen dynamischen Variablen $A(q, p)$, die jedoch nicht explizit von der Zeit abhängt, lautet

$$\frac{dA(q, p)}{dt} = \{A, H\}; \tag{6.9}$$

hierbei ist die klassische Poisson-Klammer durch

$$\{a, b\} \equiv \frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q} \tag{6.10}$$

definiert. Insbesondere gilt

$$\{q, p\} = 1 \tag{6.11}$$

und

$$\dot{q} = \{q, H\} = p, \qquad \dot{p} = \{p, H\} = -\omega^2 q.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen, den kanonischen Bewegungsgleichungen, folgt, daß die Lösungen gemäß

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a^{(+)}(t) + a^{(-)}(t)\right), \qquad p(t) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a^{(+)}(t) - a^{(-)}(t)\right) \tag{6.12}$$

in positiv- und negativ-frequente Anteile zerlegt werden können, wobei

$$\dot{a}^{(\pm)}(t) = \pm\mathrm{i}\omega a^{(\pm)}(t), \qquad a^{(\pm)}(t) = a^{(\pm)}(0)\exp(\pm\mathrm{i}\omega t)$$

gilt. Werden die Gleichungen (6.12) nach $a^{(\pm)}(t)$ aufgelöst, so folgt aus (6.11)

$$\{a^{(-)}(t), a^{(+)}(t)\} = -\mathrm{i}. \tag{6.13}$$

Setzen wir (6.12) in die Hamilton-Funktion (6.1) ein, so erhalten wir

$$H = (\omega/2)\left(a^{(+)}(t)\,a^{(-)}(t) + a^{(-)}(t)\,a^{(+)}(t)\right) = (\omega/2)\,(\overset{+}{a}a + a\overset{+}{a}).$$

Hierbei wurde die sich aus (6.1) ergebende Reihenfolge der Faktoren beibehalten (das wird später für die Quantisierung noch von Nutzen sein); ferner wurden die kompakteren Bezeichnungen

$$a^{(-)} \equiv a, \qquad a^{(+)} \equiv \overset{+}{a}$$

eingeführt.

Nach unseren bisherigen Erkenntnissen kann die Quantisierung also mit Hilfe der folgenden *Vorschriften der kanonischen Quantisierung* vollzogen werden:

Kanonisch konjugierte dynamische Variablen q, p bzw. a, $\overset{+}{a}$, und deren Funktionen (z. B. die Hamilton-Funktion H) sind als Operatoren aufzufassen, die auf die Zustandsfunktion wirken.

Die Vertauschungsrelationen dieser Operatoren werden durch das folgende „Korrespondenz-Prinzip" festgelegt: Im Rahmen des kanonischen Formalismus (siehe Gleichungen (6.9), (6.11) oder (6.13)) ist die klassische Poisson-Klammer durch die „Quantenklammer"

$$\{a, b\}_{\text{quant}} = \frac{1}{\mathrm{i}}[a, b] \equiv \frac{1}{\mathrm{i}}(ab - ba)$$

zu ersetzen, d. h.

$$\{a, b\}_{\text{kl}} \to \frac{1}{\text{i}} [a, b] . \tag{6.14}$$

Nach der Quantisierung lautet daher die Bewegungsgleichung (6.9) für die (Operator-)Größe A

$$\text{i} \frac{\text{d}A}{\text{d}t} = [A, H] . \tag{6.15}$$

(6.11) und (6.13) gehen in die Vertauschungsrelationen

$$[q, p] = i , \qquad [a, \overset{+}{a}] = 1 \tag{6.16}$$

über, und der Hamilton-Operator erhält mit Hilfe dieser Vertauschungsrelationen die Gestalt (6.5).

Damit haben wir uns aber gleichzeitig davon überzeugt, daß die soeben durchgeführte kanonische Quantisierung für den Oszillator zu der im Abschnitt 6.1. dargelegten Quantisierung äquivalent ist. Das Postulat kann daher, wenn man es auf physikalische Felder anwendet, als Grundlage der Quantisierung von Feldern angesehen werden, wobei man sofort die Besetzungszahldarstellung erhält.

Um die Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Formulierungen der Quantisierung von Systemen mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden weiter diskutieren zu können, müssen einige elementare Kenntnisse aus der Darstellungstheorie der Quantenmechanik rekapituliert werden.

6.4. Die Schrödinger- und Heisenberg-Darstellung

In der Quantenmechanik wird vorwiegend die Schrödinger-Darstellung benutzt. In dieser Darstellung wird die zeitliche Entwicklung eines Systems durch die explizit zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(t)$ beschrieben, welche der Schrödinger-Gleichung

$$\text{i} \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \text{H} \psi(t)$$

genügt. Hierbei ist H der Hamilton-Operator, der der Gesamtenergie des Systems entspricht und für konservative Systeme natürlich nicht von der Zeit abhängt. Die dynamischen Variablen werden in der Schrödinger-Darstellung durch Operatoren B charakterisiert, die nicht explizit von der Zeit abhängen. Allerdings können ihre Erwartungswerte

$$\overline{B}_t = \overset{*}{\psi}(t) \text{B} \psi(t) \tag{6.17}$$

über die Wellenfunktionen $\psi(t)$ von der Zeit abhängen. Dabei bezeichnet z.B. $\overset{*}{\psi}_1(t)\, \psi_2(t)$ das Skalarprodukt der beiden Zustandsvektoren $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ (im Falle der Quantenmechanik siehe [4] und [20]).

Die in der Beziehung (6.17) enthaltene Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes $\overline{B}_t$ der dynamischen Variablen B kann jedoch auch direkt auf den Operator B übertragen werden. Mit dieser Zielstellung integrieren wir die Schrödinger-

Gleichung formal, indem wir gemäß

$$\psi(t) = U(t)\,\psi \tag{6.18}$$

den Operator der zeitlichen Entwicklung

$$\mathrm{U}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{iH}t} \tag{6.19}$$

einführen. Unter Verwendung von (6.18) schreibt sich die rechte Seite von (6.17) folgendermaßen:

$$\overset{*}{\psi}(t)B\psi(t) = \overset{*}{\psi}\overset{*}{U}(t)BU(t)\,\psi = \overset{*}{\psi}B_H(t)\,\psi\,,$$

wobei

$$B_H(t) = \overset{*}{U}(t)\mathrm{B}U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{iH}t}\,\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{iH}t} \tag{6.20}$$

gilt. Damit haben wir den Erwartungswert $\overline{B}_t$ als Mittelung des explizit zeitabhängigen Operators (6.20) über die zeitunabhängige Funktion ψ dargestellt. Auf diese Weise sind wir zur Heisenberg-Darstellung gelangt, in welcher die Operatoren zeitabhängig, die Zustandsvektoren aber zeitunabhängig sind. Differenziert man nun (6.20) nach t, so folgt die Bewegungsgleichung in der Form

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}B_H(t)}{\mathrm{d}t} = [B_H(t), \mathrm{H}]\,. \tag{6.21}$$

Zusammenfassend bemerken wir, daß also zwei verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines Systems bestehen. Um den Übergang vom Zeitpunkt 0 zum Zeitpunkt t zu beschreiben, können wir *entweder* die Wellenfunktion ψ gemäß Formel (6.18) *oder* aber den Operator B gemäß (6.20) transformieren.

Aus dem Vergleich der Gleichungen (6.21) und (6.15) schließen wir, daß die im Abschnitt 6.2. beschriebene Methode der kanonischen Quantisierung notwendig zur Heisenberg-Darstellung für die quantisierten Wellenfelder führt.

Im kanonischen Formalismus spielt die Zeit eine Sonderrolle. Deshalb könnte der Eindruck entstehen, daß die kanonische Quantisierung der Wellenfelder deren relativistische Invarianz zerstört. Tatsächlich trifft dies aber nicht zu, und die kanonische Quantisierung führt zu relativistisch kovarianten Ausdrücken. Es existiert allerdings ein Quantisierungsverfahren, bei dem die relativistische Invarianz auch in allen Zwischenschritten gesichert ist. Diese Methode basiert auf der Darstellungstheorie stetiger Transformationsgruppen, genauer gesagt, auf der Forderung nach Korrespondenz der Transformationsgesetze für Quanten- und klassische Felder gegenüber Transformationen des Bezugssystems. Diese Methode, die auf Arbeiten von SCHWINGER Ende der vierziger Jahre zurückgeht, nennen wir *relativistisches Quantisierungsverfahren*; seine Grundgedanken sollen nachfolgend kurz erläutert werden (eine vollständigere Darlegung findet man z.B. in [1], § 9).

6.5. Das relativistische Verfahren zur Feldquantisierung

Durch die Quantisierung erhalten die Felder Operatorcharakter und lassen sich linear durch *Erzeugungs-* und *Vernichtungsoperatoren* der zugeordneten Teilchen ausdrücken. Zwischen diesen Operatoren bestehen Vertauschungsrelationen, und sie wirken auf eine für alle Felder gemeinsame Wellenfunktion Φ.

In Übereinstimmung mit der Quantenmechanik charakterisiert die Wellenfunktion Φ den physikalischen Zustand des quantisierten Wellenfeldes vollständig. In völliger Analogie zur quantenmechanischen Wellenfunktion ψ kann die Größe Φ als Vektor in einem linearen Raum angesehen werden. Deshalb wird Φ auch als *Zustandsamplitude* oder *-vektor* bezeichnet.

Wie in der Quantenmechanik, haben auch hier nicht alle Vektoren Φ eine endliche Norm (z.B. ebene Wellen). Allerdings können die Normen realer physikalischer Zustände immer endlich gewählt werden. Die Erwartungswerte dynamischer Größen und die Übergangswahrscheinlichkeiten können wiederum als quadratische Formen von Φ aufgefaßt werden.

Betrachten wir jetzt die Transformationseigenschaften der Vektoren Φ gegenüber Transformationen der Koordinaten und Felder, wie wir sie in den Vorlesungen 1. und 2. (vgl. Formeln (1.1), (1.3), (2.10)) eingeführt haben

$$x \to x' = P(\omega; x)\,, \qquad u(x) \to u'(x') = \Lambda(\omega)\, u(x)\,.$$

Solchen Transformationen entspricht eine Transformation der Zustandsvektoren, die wegen des Superpositionsprinzips linear,

$$\Phi \to \Phi' = U(\omega)\, \Phi\,, \tag{6.22}$$

und wegen der Erhaltung der Norm, unitär sein muß:

$$\overset{*}{U}(\omega)\, U(\omega) = 1\,. \tag{6.23}$$

Der Operator U hat im einfachsten Fall einer Translation $u'(x) = u(x - \omega)$ die Gestalt

$$U(\omega) = \exp\,(\mathrm{i} P_\mu \omega^\mu)\,. \tag{6.24}$$

Die hierbei auftretende exponentielle Abhängigkeit von den Parametern ω geht auf den Gruppencharakter der Transformationen zurück. Wegen der Unitaritätsbedingung (6.23) müssen die Translationsoperatoren hermitesch sein: $\overset{+}{P}_\mu = P_\mu$. Gl. (6.24) ist für den Spezialfall $\omega_\nu = -\delta_{\nu 0} t$ mit (6.19) zu identifizieren. Daher ist P_μ der Operator des Gesamtimpulses. In Analogie zu (6.20) folgt für den Feldoperator

$$u'(x) = u(x - \omega) = U^{-1}(\omega)\, u(x)\, U(\omega)\,. \tag{6.25}$$

Für infinitesimal kleine Werte von ω stimmen die Transformationsgesetze der Zustandsamplitude

$$\Phi' = (1 + \mathrm{i}\omega P)\, \Phi\,,$$

und der klassischen Felder

$$u'(x) = u(x - \omega) = (1 + \mathrm{i}\check{p}\omega)\, u(x)\,, \tag{6.26}$$

der Form nach überein. Falls $u(x)$ eine gewöhnliche Wellenfunktion (d. h. ein klassisches Feld) ist, dann ist $\check{p}_\nu$ der quantenmechanische Impulsoperator, d. h.

$$\check{p}_\nu = \mathrm{i}\partial_\nu = \mathrm{i}\partial/\partial x^\nu\,.$$

Dabei muß beachtet werden, daß die Impulsoperatoren $\check{\mathfrak{p}}_\nu$ als Erzeugende der Translationen im Raum der Feldfunktionen $u(x)$ wirken, während die Operatoren P_ν die Erzeugenden der Translationen im Raum der Zustandsvektoren Φ sind, also Operatoren in der Besetzungszahldarstellung oder in der zweiten Quantisierung. (Gerade dieses Wechselspiel der Definitionen war seinerzeit der Grund für die Einführung des Terminus „zweite" Quantisierung.)

Die bisher aufgeschriebenen Formeln kann man ohne Schwierigkeiten auf allgemeine Poincaré-Transformationen $x' = Lx + a$ erweitern

$$U = \exp \mathrm{i}(P_\nu a^\nu + \tfrac{1}{2} M_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}) \,,$$

$$\Phi' = \left(1 + \mathrm{i}P_\nu a^\nu + \frac{\mathrm{i}}{2} M_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\Phi \,, \tag{6.27}$$

$$u'(x) = \left(1 + \mathrm{i}\check{\mathrm{p}}_\nu a^\nu + \frac{\mathrm{i}}{2} \check{m}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) u(x) \,. \tag{6.28}$$

Hierbei sind $\check{m}_{\mu\nu} = \mathrm{i}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$ die Erzeugenden der vierdimensionalen Lorentz-Drehungen. Die Operatoren P_ν und $M_{\mu\nu}$ in den Gleichungen (6.27) interpretieren wir auf Grund ihrer Korrespondenz zu den entsprechenden quantenmechanischen Größen als Operatoren des Energie-Impuls-Vektors bzw. des Drehimpulstensors.

Wir betrachten schließlich noch Phasentransformationen der Felder

$$\varphi \to \varphi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\varphi \,, \qquad \overset{*}{\varphi} \to \overset{*}{\varphi}{}' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\,\overset{*}{\varphi} \,. \tag{6.29}$$

Auch hier hat der entsprechende unitäre Operator $\mathrm{U}(\alpha)$,

$$\Phi' = \mathrm{U}(\alpha)\Phi \,,$$

aus gruppentheoretischen Gründen wieder eine exponentielle Struktur,

$$\mathrm{U}(\alpha) = \exp(\mathrm{i}\alpha Q) \,, \tag{6.30}$$

wobei der hierbei auftretende hermitesche Operator Q als Ladungsoperator zu interpretieren ist.

In Anbetracht der erzielten Resultate postulieren wir als grundlegendes *Prinzip der Quantisierung der klassischen Felder* (Wellenfelder), daß sich die hermiteschen Operatoren des Energie-Impuls-Vektors P_ν, des Drehimpulstensors $M_{\mu\nu}$, der Ladung Q usw., die gerade die Erzeugenden infinitesimaler Transformationen der Zustandsvektoren Φ sind (vgl. Formeln (6.27) und (6.30)), als Funktionen der Feldoperatoren durch die gleichen Beziehungen vom Typ (2.6), (7.22), (6.30) wie in der klassischen Theorie ausdrücken lassen. Dabei versteht sich allerdings, daß bei Operatormultiplikationen eine geeignete Reihenfolge der Operatoren festzulegen ist. Diese Vorschriften stellen eine weitere Anwendung des Korrespondenzprinzips dar und bestimmen auch das Transformationsgesetz für die Zustandsamplituden in der zweiten Quantisierung.

7. Vertauschungsrelationen

7.1. Physikalische Interpretation der positiv- und negativ-frequenten Anteile der Feldoperatoren

Studieren wir die Beziehung (6.25) für den Fall einer infinitesimalen Translation. Für $U(\omega)$ benutzen wir (6.24), die Exponentialfunktion entwickeln wir nach Potenzen von ω_μ und berücksichtigen nur die bezüglich ω_μ linearen Glieder. Dann folgt

$$\mathrm{i}\frac{\partial u(x)}{\partial x^\mu} = [u(x), P_\mu] \,, \tag{7.1}$$

d. h., es ergeben sich vier Gleichungen, die die Bewegungsgleichung (6.21) verallgemeinern. Diese Relationen eignen sich besonders zur Untersuchung der Frequenzanteile der Felder in der Impulsdarstellung. Setzt man nämlich in (7.1) die dreidimensionalen Fourier-Entwicklungen der Feldoperatoren (3.8), (4.22), (5.9) ein, so erhält man die algebraischen Operatorgleichungen

$$k_\mu u^\pm(\boldsymbol{k}) = \mp [u^\pm(\boldsymbol{k}), P_\mu] . \tag{7.2}$$

Bezeichnen wir ferner einen beliebigen Zustand, der Eigenzustand des Energie-Impuls-Vektors P_ν zu dem festen Wert p_ν ist, mit Φ_p, d. h.

$$P_\nu \Phi_p = p_\nu \Phi_p , \tag{7.3}$$

dann folgt für $P_\nu u^\pm(\boldsymbol{k})\, \Phi_p$ unter Beachtung der Gleichungen (7.2) und (7.3)

$$P_\nu u^+(\boldsymbol{k})\, \Phi_p = (p_\nu + k_\nu)\, u^+(\boldsymbol{k})\, \Phi_p$$

bzw.

$$P_\nu u^-(\boldsymbol{k})\, \Phi_p = (p_\nu - k_\nu)\, u^-(\boldsymbol{k})\, \Phi_p ,$$

wobei jeweils $k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2} > 0$ gilt.

Aus diesen Beziehungen ist unmittelbar ersichtlich, daß der Ausdruck $u^+(\boldsymbol{k})\, \Phi_p$ entweder gleich Null ist oder aber einen Zustandsvektor mit dem Energie-Impuls-Vektor $p + k$ verkörpert, dagegen ist $u^-(\boldsymbol{k})\, \Phi_p$ ein Zustandsvektor mit dem Energie-Impuls-Vektor $p - k$ (oder Null). Da hierbei außerdem $k^2 = m^2$ gilt, kann man sagen, daß der Operator $u^+(\boldsymbol{k})$ die Erzeugung eines Teilchens mit der Masse m und dem Impuls $\boldsymbol{k}$, und der Operator $u^-(\boldsymbol{k})$ die Vernichtung eines solchen Teilchens beschreibt.

Wir unterstreichen, daß diese Eigenschaft der Frequenzanteile der Feldoperatoren ganz allgemein gilt, d. h., sie trifft sowohl für reelle als auch für komplexe Felder beliebige Tensorstufen zu; darüber hinaus ist sie auch von der konkreten Realisierung der Vertauschungsrelationen unabhängig, d. h., sie gilt sowohl für die Bose-Einstein- als auch für die Fermi-Dirac-Quantisierung (siehe unten Abschnitt 7.4.).

Wir bemerken noch, daß eine (ebenfalls von Gleichungen des Typs (6.25) ausgehende) analoge Behandlung der Phasentransformationen (6.29) und (6.30)

$$e^{i\alpha} u = U^{-1}(\alpha)\, u U(\alpha) , \qquad e^{-i\alpha} \overset{*}{u} = U^{-1}(\alpha)\, \overset{*}{u} U(\alpha)$$

zu den Relationen

$$u(x) = [u(x), Q] , \qquad \overset{*}{u}(x) = -[\overset{*}{u}(x), Q] \tag{7.4}$$

führt, wenn man die Koeffizienten der in α linearen Glieder gleichgesetzt.

Diese Gleichungen ergänzen die Formel (7.2). Aus ihnen folgt u. a., daß die Operatoren u (und deren Frequenzanteile $u^\pm$) den Eigenwert der Ladung Q des Systems um Eins erniedrigen; die konjugierten Operatoren $\overset{*}{u}$ (und $\overset{*}{u}{}^\pm$) erhöhen ihrerseits den Eigenwert um Eins. Wir überlassen es dem Leser, die entsprechenden Rechnungen selbständig auszuführen. Im Falle eines komplexen Feldes erzeugt der Operator $\overset{*}{u}{}^+$ somit ein Teilchen der Ladung $+1$, wohingegen der Operator $\overset{*}{u}{}^-$ ein Teilchen der Ladung -1 vernichtet usw.

7.2. Der Vakuumzustand und die Fock-Darstellung

Nun sind wir in der Lage, auf natürliche Weise den Vakuumzustand zu definieren. Darüber hinaus werden Regeln angegeben, um Zustände vorgegebener Teilchenzahlen verschiedener Sorten zu konstruieren.

Dazu betrachten wir ein aus mehreren, nicht wechselwirkenden Quantenfeldern bestehendes dynamisches System, das durch die Operatorfunktionen $u_1(x), \dots, u_n(x)$ charakterisiert ist. Falls sich u_i und $\overset{*}{u}_i$ voneinander unterscheiden, werden in diesen Satz von Operatoren auch die entsprechenden konjugierten Funktionen mit eingeschlossen.

Als erstes definieren wir den *Vakuumzustand* Φ_0 des gegebenen dynamischen Systems. Da es im Vakuum keine Teilchen gibt, ist der Impuls des Vakuums gleich Null, und seine Energie ist minimal. (Man kann sie auch auf Null normieren.) Da nun die negativ-frequenten Operatoren u^- die Energie verringern, die Energie des Vakuumzustandes Φ_0 aber minimal ist, so muß

$$u_i^-(x)\,\Phi_0 = 0 \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{7.5}$$

für alle x gelten. Eine analoge Argumentation führt zur Beziehung

$$\overset{*}{\Phi}_0 u_i^+(x) = 0\,.$$

In der Impulsdarstellung schreiben sich diese Formeln wie folgt:

$$\begin{aligned} u_i^-(\boldsymbol{k})\,\Phi_0 &= 0\,, \\ \overset{*}{\Phi}_0 u_i^+(\boldsymbol{k}) &= 0\,. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Diese beiden Beziehungen kann man zusammen mit der Normierungsbedingung

$$\overset{*}{\Phi}_0 \Phi_0 = 1 \tag{7.7}$$

als Definition des Vakuums freier Felder ansehen.

Damit ist man in der Lage, einen beliebigen Zustand des betrachteten dynamischen Systems mit Hilfe des soeben eingeführten Vakuums und der Erzeugungsoperatoren der entsprechenden Teilchen darzustellen. So gilt z.B. für einen Zustand, der s Teilchen der Sorten $j_1, \dots, j_s$ enthält (die Indizes j dürfen dabei partiell oder vollständig übereinstimmen),

$$\int F_s^{(j_1,\dots,j_s)}(\boldsymbol{k}_1, \dots, \boldsymbol{k}_s)\, u_{j_1}^+(\boldsymbol{k}_1) \dots u_{j_s}^+(\boldsymbol{k}_s)\, d\boldsymbol{k}_1 \dots d\boldsymbol{k}_s\, \Phi_0\,.$$

Die Funktionen $F_s^{(\dots j \dots)}$ haben hierbei den Charakter gewöhnlicher quantenmechanischer Wellenfunktionen eines Systems aus s Teilchen in der Impulsdarstellung. Der Zustand, in dem genau s Teilchen mit den gegebenen Werten $j_1, \dots, j_s$ vorliegen, wird vollständig durch eine solche Funktion beschrieben.

Im allgemeinen Fall, wenn die Teilchenzahl nicht fixiert ist, wird der Zustand durch eine Folge von Funktionen F_s mit verschiedenen Werten von s charakterisiert. Summieren wir nun über die diskreten Indizes $j_1, \dots, j_s$ und über s,

$$\Phi = \sum_{(j,\, s \geqq 0)} \int F_s^{(\dots j \dots)}(\dots \boldsymbol{k} \dots)\, u_{j_1}^+(\boldsymbol{k}_1) \dots u_{j_s}^+(\boldsymbol{k}_s)\, d\boldsymbol{k}_1 \dots d\boldsymbol{k}_s\, \Phi_0\,, \tag{7.8}$$

dann erhalten wir die sogenannte *Fock-Darstellung* des Zustands. Nach Übergang zur Koordinatendarstellung erhalten wir vermöge

$$F_s(\ldots \boldsymbol{k} \ldots) = \frac{1}{(2\pi)^{3s/2}} \int e^{i \sum_j \boldsymbol{k}_j \boldsymbol{x}_j} \varphi_s(\ldots \boldsymbol{x} \ldots)\, d\boldsymbol{x}_1 \ldots d\boldsymbol{x}_s$$

und

$$u^+(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\, u^+(0, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,, \qquad u(0, \boldsymbol{x}) = u(x)|_{x^0=0}$$

anstelle von (7.8) folgenden Ausdruck für den Zustandsvektor

$$\Phi = \sum_{(j,s \geqq 0)} \int \varphi_s(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s) \prod_{1 \leqq \nu \leqq s} \{u^+_{j_\nu}(0, \boldsymbol{x}_\nu)\, d\boldsymbol{x}_\nu\}\, \Phi_0\,. \tag{7.9}$$

Die hierbei eingeführten Funktionen φ_s sind im nichtrelativistischen Fall die gewöhnlichen Wellenfunktionen im Konfigurationsraum.

Wie wir sehen, ist die Zeitabhängigkeit aus Φ herausgefallen. Das ist ganz natürlich, denn bei fehlender Wechselwirkung ist der Zustandsvektor in der von uns gewählten Darstellung konstant.

7.3. Die verschiedenen Typen von Vertauschungsrelationen

Wir gehen nun zur Aufstellung der Vertauschungsrelationen für die Feldoperatoren über. Für klassisch freie Felder mit quadratischer Lagrange-Dichte hängen die Felder im Rahmen des kanonischen Formalismus linear von den kanonisch konjugierten Koordianten und Impulsen ab. Die klassischen Poisson-Klammern der Felder $\{u(x), u(y)\}$ sind dabei Funktionen von x und y (genauer gesagt, von deren Differenz $x - y$), die nicht explizit von u abhängen. Deshalb wird unter Berufung auf das Korrespondenzprinzip bei der Quantisierung der freien Felder oft angenommen, daß das Vertauschungsgesetz der Feldoperatoren $u(x)$ folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned}[u_a(x), u_b(y)]_- &\equiv [u_a(x), u_b(y)] \\ &= u_a(x)\, u_b(y) - u_b(y)\, u_a(x) = \Delta_{ab}(x - y)\,. \end{aligned} \tag{7.10B}$$

Der Kommutator zweier Feldoperatoren allein erweist sich jedoch als unzureichend, denn damit werden eine Reihe physikalisch wichtiger Fälle nicht erfaßt. Als Alternative zu (7.10B) wählt man daher

$$[u_a(x), u_b(y)]_+ \equiv u_a(x)\, u_b(y) + u_b(y)\, u_a(x) = \Delta_{ab}(x - y)\,, \tag{7.10F}$$

d. h., man nimmt an, daß nicht der Kommutator sondern der *Antikommutator* zweier Feldoperatoren eine c-Zahl ist.

Wir möchten hier darauf hinweisen, daß in der Literatur für den Antikommutator häufig das Klammersymbol $\{\ldots, \ldots\}$ benutzt wird. Wir werden dieses Klammersymbol stattdessen immer dann verwenden, wenn damit *sowohl* der Kommutator *als auch* der Antikommutator bezeichnet werden soll; in jedem konkreten Fall benutzen wir dann *entweder* $[\ldots, \ldots]$ für den Kommutator, *oder* $[\ldots, \ldots]_+$ für den Antikommutator.

Da die dynamischen Größen (wie Energie und Impuls) stets Bilinearformen der Feldoperatoren sind, lassen sich deren Kommutatoren durch die Vertauschungs-

funktionen Δ ausdrücken, auch wenn die Feldoperatoren gemäß (7.10F) antikommutieren. In diesem Sinn gilt auch das Korrespondenzprinzip für den zweiten Fall.

Die Feldquanten, die den Beziehungen (7.10B) genügen, ordnen sich der Bose-Einstein-Statistik unter; die entsprechenden Teilchen heißen *Bosonen*. Dagegen genügen die Gl. (7.10F) erfüllenden Feldquanten der Fermi-Dirac-Statistik, und die zugehörigen Teilchen heißen *Fermionen*.

Die konkrete Gestalt der Vertauschungsfunktionen Δ für ein beliebiges Feld wird durch die Gleichungen (7.1) und (7.4) und die Struktur des betreffenden Energieoperators bestimmt. Unabhängig davon folgt jedoch, daß die Vertauschungsfunktion der freien Felder nur von der Differenz $x - y$ abhängt, d. h.

$$\{u_a(x), u_b(y)\} = \Delta_{ab}(x - y) . \tag{7.11}$$

Um uns hiervon zu überzeugen, untersuchen wir die Vertauschungsrelation (7.10) in der Impulsdarstellung. Aus der Linearität der Fourier-Transformation folgt, daß die Kommutatoren bzw. die Antikommutatoren der Frequenzanteile $u^{\pm}(\boldsymbol{k})$ in der Impulsdarstellung ebenfalls c-Zahlen sind. Nunmehr zeigen wir, daß gleichfrequente Operatoren streng kommutieren oder antikommutieren:

$$\{u_a^{\pm}(\boldsymbol{k}) , u_b^{\pm}(\boldsymbol{q})\} = 0 . \tag{7.12}$$

Dazu betrachten wir den oben bereits eingeführten Zustand Φ_p mit einem festen Impulseigenwert p. Die Anwendung der Operatoren $u_a^+(\boldsymbol{k})$ und $u_b^+(\boldsymbol{q})$ in unterschiedlicher Reihenfolge auf Φ_p führt zu den neuen Zuständen

$$\Phi_1 = u_a^+(\boldsymbol{k})\, u_b^+(\boldsymbol{q})\, \Phi_p , \qquad \Phi_2 = u_b^+(\boldsymbol{q})\, u_a^+(\boldsymbol{p})\, \Phi_p ,$$

die gemäß (7.3) die Gleichungen

$$P_0 \Phi_{1,2} = (p_0 + k_0 + q_0)\, \Phi_{1,2}$$

erfüllen.

Nach Bildung von Summe und Differenz dieser Gleichungen erhalten wir

$$P_0(\Phi_1 \pm \Phi_2) = P_0\{u_a^+(\boldsymbol{k}), u_b^+(\boldsymbol{q})\}\, \Phi_p = (p_0 + k_0 + q_0)\, \{u_a^+, u_b^+\}\, \Phi_p .$$

Unter der Annahme, daß $\{u_a^+, u_b^+\}$ eine von Null verschiedene c-Zahl-Funktion ist, folgt

$$P_0 \Phi_p = (p_0 + k_0 + q_0)\, \Phi_p ,$$

d. h., wir geraten in Widerspruch zur Voraussetzung (7.3). Damit ist dann aber (7.12) bewiesen. Auf die gleiche Art beweist man, daß

$$\{u_a^{\pm}(\boldsymbol{k}), u_b^{\mp}(\boldsymbol{q})\} = 0 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{q} \tag{7.13}$$

gilt.

Die Beziehungen (7.12) und (7.13) haben einen einfachen physikalischen Sinn: Die Erzeugungs- oder Vernichtungsprozesse von Teilchen unterschiedlicher Felder interferieren nicht miteinander; das trifft auch für die Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen desselben Feldes mit unterschiedlichen Impulsen zu.

Nimmt man jetzt an, daß im allgemeinen Fall an die Stelle der Null auf der rechten Seite von (7.13) die Funktion $\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q})$ tritt, so gelangt man in der Koordinatendarstellung zur Relation (7.11). Es sei hier angemerkt, daß dadurch die Translationsinvarianz der Vertauschungsrelationen widergespiegelt wird. Es ist deshalb auch ganz natürlich, daß wir für ihren Beweis die Eigenschaften des Energie-Impuls-Vektors als Erzeugenden der Translationen heranziehen mußten.

Weiterhin läßt sich leicht zeigen, daß im Fall komplexer Felder neben (7.12) auch die Kommutatoren bzw. Antikommutatoren von Operatoren verschwinden, die Teilchen verschiedener Ladung entsprechen:

$$\{u^+, u^-\} = \{\overset{*}{u}{}^+, \overset{*}{u}{}^-\} = 0\,. \tag{7.14}$$

Zum Beweis dessen muß man Zustände Φ_q mit bestimmten Werten der Ladung betrachten und ähnliche Überlegungen wie beim Beweis von (7.12) anstellen. Dies auszuführen, sei dem Leser überlassen. Der physikalische Sinn der Relationen (7.14) besteht wiederum in der gegenseitigen Unabhängigkeit der Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen mit unterschiedlichen Ladungen.

Mit der obigen Betrachtung haben wir also festgestellt, daß für ein beliebiges (komplexes) Feld nur die (Anti-)Kommutatoren von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\{u_\alpha^-(\boldsymbol{p}), \overset{*}{u}{}_\alpha^+(\boldsymbol{p})\}$ und $\{\overset{*}{u}{}_\alpha^-(\boldsymbol{p}), u_\alpha^+(\boldsymbol{p})\}$, die sich auf Teilchen mit gleichem Energie-Impuls-Vektor und gleicher Ladung beziehen, von Null verschieden sein können. Die entsprechenden Ausdrücke in der Koordinatendarstellung sind translationsinvariant:

$$\{u^\pm(x), \overset{*}{u}{}^\pm(y)\} = \Delta^\pm(x - y)\,,$$

aus ihnen ergibt sich die vollständige Vertauschungsfunktion

$$\{u(x), \overset{*}{u}(y)\} = \Delta^+(x - y) + \Delta^-(x - y) = \Delta(x - y)\,.$$

Zur expliziten Bestimmung dieser Vertauschungsfunktionen hat man die konkrete Form des Energie-Impuls-Vektors zu untersuchen und die Gleichungen (7.1) und (7.4) zu verwenden.

7.4. Fermi-Dirac- und Bose-Einstein-Quantisierung

Um nun die konkrete Form der Vertauschungsrelationen herzuleiten, benutzen wir (7.1) und (7.2), wobei wir den Energie-Impuls-Operator in der Form

$$P_\nu = \sum_s \int d\boldsymbol{q}\; q_\nu \big(\overset{*}{a}{}_s^+(\boldsymbol{q})\, a_s^-(\boldsymbol{q}) \pm \overset{*}{a}{}_s^-(\boldsymbol{q})\, a_s^+(\boldsymbol{q})\big) \tag{7.15}$$

schreiben. In Übereinstimmung mit den für die klassischen Felder abgeleiteten Ausdrücken (3.9), (3.28), (4.26) und (5.21) haben wir ihn durch die unabhängigen Operatoren $a^\pm$, $\overset{*}{a}{}^\pm$ ausgedrückt, die mit $u^\pm$, $\overset{*}{u}{}^\pm$ über die linearen Relationen

$$u_a^\pm(\boldsymbol{k}) = \sum_s v_a^{s\pm}(\boldsymbol{k})\, a_s^\pm(\boldsymbol{k})$$

mit c-Zahl-Koeffizienten $v^\pm$ verknüpft sind.

Da die Operatoren $a^\pm$ und $\overset{*}{a}{}^\pm$ nicht kommutieren, entspricht ihre Reihenfolge in Gleichung (7.15) der Ordnung der Funktionen u und $\overset{*}{u}$ in den zugehörigen Lagrange-Dichten. Es sei darauf hingewiesen, daß die Operatoren $a^\pm$ und $\overset{*}{a}{}^\pm$ durch *hermitesche* Konjugation

$$\big(a^\pm(\boldsymbol{k})\big)^* = \overset{*}{a}{}^\mp(\boldsymbol{k})$$

auseinander hervorgehen.

Das obere Vorzeichen in Gl. (7.15) bezieht sich auf Felder mit ganzzahligem Spin (z.B. skalare und vektorielle Felder, insbesondere das elektromagnetische Feld), das untere Vorzeichen auf Felder mit halbzahligem Spin (also Spinorfelder).

Zur Herleitung der Vertauschungsrelationen bemerken wir zunächst, daß die Kommutatoren der Operatoren $a^{\pm}$ mit den in Gl. (7.15) eingehenden bilinearen Kombinationen $\overset{*}{a}{}^{\pm}(\boldsymbol{q})\, a^{\mp}(\boldsymbol{q})$ in der Form

$$[a^{\pm}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q})\, a^{-}(\boldsymbol{q})] = \{a^{\pm}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q})\}\, a^{-}(\boldsymbol{q}) - \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q})\, \{a^{-}(\boldsymbol{q}), a^{\pm}(\boldsymbol{k})\} \tag{7.16}$$

dargestellt werden können, wobei unter dem Symbol $\{a, b\}$ wiederum *entweder* der Kommutator *oder* der Antikommutator der Operatoren a und b, und zwar in beiden Termen der Relation (7.16) einheitlich, zu verstehen ist. Analog hierzu gilt

$$[a^{\pm}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q})\, a^{+}(\boldsymbol{q})] = \{a^{\pm}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q})\}\, a^{+}(\boldsymbol{q}) - \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q})\, \{\overset{+}{a}(\boldsymbol{q}), a^{\pm}(\boldsymbol{k})\}\,. \tag{7.17}$$

Wegen (7.12) und (7.14) folgt dann

$$[a^{+}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q})\, a^{-}(\boldsymbol{q})] = [a^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q})\, a^{+}(\boldsymbol{q})] = 0\,,$$

$$[a^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q})\, a^{-}(\boldsymbol{q})] = \{a^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{q})\}\, a^{-}(\boldsymbol{q})\,,$$

$$[a^{+}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q})\, a^{+}(\boldsymbol{q})] = \{a^{+}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{q})\}\, a^{+}(\boldsymbol{q})\,.$$

Einsetzen von (7.15) in (7.2) liefert daher

$$k_{\nu} a_{a}^{-}(\boldsymbol{k}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\; q_{\nu} \sum_{b} \{a_{a}^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_{b}^{+}(\boldsymbol{q})\}\, a_{b}^{-}(\boldsymbol{q})\,,$$

$$\mp k_{\nu} a_{a}^{+}(\boldsymbol{k}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\; q_{\nu} \sum_{b} \{a_{a}^{+}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_{b}^{-}(\boldsymbol{q})\}\, a_{b}^{+}(\boldsymbol{q})\,,$$

woraus sich die folgenden (Anti-)Kommutatoren der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ergeben:

$$\{a_{a}^{-}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_{b}^{+}(\boldsymbol{q})\} = \delta_{ab}\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q})\,, \tag{7.18}$$

$$\{a_{a}^{+}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_{b}^{-}(\boldsymbol{q})\} = \mp\delta_{ab}\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q})\,. \tag{7.19}$$

Die Wahl des Vorzeichens ($\pm$) ist in Übereinstimmung mit Formel (7.15) zu treffen. Damit haben wir für die Felder *jeden* Typs zwei Varianten von Vertauschungsrelationen erhalten. Erst die zusätzliche Forderung nach Symmetrie dieser Beziehungen bezüglich der Ladungsvertauschung, genauer gesagt, der Vertauschung von Teilchen und Antiteilchen,

$$a_{a}^{\pm}(\boldsymbol{k}) \leftrightarrow \overset{*}{a}{}_{a}^{\pm}(\boldsymbol{k})\,, \tag{7.20}$$

fixiert die Quantisierungsvorschrift eindeutig. Diese Symmetrie (7.20) spiegelt die Tatsache wider, daß die Wahl der „fundamentalen" Feldfunktionen u und der komplex Konjugierten $\overset{*}{u}$ eine Frage der Konvention ist; die entgegengesetzte Wahl $\omega = \overset{*}{u}$, $\overset{*}{\omega} = u$ würde nur zur Vertauschung der „fundamentalen" Teilchen mit deren Antiteilchen führen. Eine solche Vertauschung wirkt sich aber auf den Ladungsoperator aus, der bezüglich der Transformation (7.20) nicht invariant ist; allerdings darf sie die Bewegungsgleichungen (7.1) und den Energie-Impuls-Vektor nicht ändern. Diese Symmetrieforderung bezüglich der Transformationen (7.20) gewährleistet außerdem den richtigen Übergang vom komplexen zum reellen Feld:

$$\overset{*}{u}(x) = u(x)\,, \qquad \overset{*}{a}{}^{\pm}(\boldsymbol{k}) = a^{\pm}(\boldsymbol{k})\,.$$

Transformationen vom Typ (7.20) werden als Ladungskonjugation und die ihnen entsprechende Symmetrie als Ladungssymmetrie bezeichnet (siehe Abschnitt 9.3.). Wenn wir jetzt in (7.19) das obere, den Feldern mit ganzzahligem Spin entsprechende Vorzeichen wählen, so führt die Forderung nach Symmetrie der Gleichungen (7.18) und (7.19) bezüglich der Transformation (7.20) dazu, daß man das Symbol $\{a, b\}$ als Kommutator zu interpretieren hat; bei entgegengesetzter Wahl, d. h. für Spinorfelder, wird die Symmetrie bezüglich (7.20) gerade durch die Bedingung

$$\{a, b\} = [a, b]_+$$

garantiert.

Damit folgt eindeutig, daß Felder mit ganzzahligem Spin nach BOSE-EINSTEIN,

$$[a_a^-(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_b^+(\boldsymbol{q})] = [\overset{*}{a}{}_a^-(\boldsymbol{k}), a_b^+(\boldsymbol{q})] = \delta_{ab}\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) \,, \tag{7.21}$$

und Felder mit halbzahligem Spin nach FERMI-DIRAC,

$$[a_a^-(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_b^+(\boldsymbol{q})]_+ = [\overset{*}{a}{}_a^-(\boldsymbol{k}), a_b^+(\boldsymbol{q})]_+ = \delta_{ab}\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) \,, \tag{7.22}$$

quantisiert werden müssen. Abschließend sei noch bemerkt, daß die Vertauschungsrelationen auch die Normierung der Feldoperatoren festlegen.

7.5. Verknüpfung von Spin und Statistik. Das Pauli-Theorem

Die soeben erhaltenen Resultate sind Spezialfälle eines fundamentalen Theorems von PAULI, welches einen Zusammenhang zwischen den Transformationseigenschaften der Felder und der Art ihrer Quantisierung herstellt (Zusammenhang von Spin und Statistik):

Felder, die Teilchen mit ganzzahligem Spin beschreiben, werden nach BOSE-EINSTEIN *quantisiert; Felder, die Teilchen mit halbzahligem Spin beschreiben, werden nach* FERMI-DIRAC *quantisiert.*

Das Pauli-Theorem gilt für Felder mit beliebig hohen Werten des Spins.

Für unseren Beweis haben wir die Symmetrie bezüglich der Ladungskonjugation herangezogen. Es gibt aber auch andere Beweismöglichkeiten. So führt eine Verletzung des Zusammenhangs von Spin und Statistik, wie sie von dem Pauli-Theorem gefordert wird, zu einer Reihe tiefgreifender Widersprüche.

Verwendet man z.B. anstelle von (7.20) die positive Definitheit der Metrik im Hilbert-Raum

$$\overset{*}{\Phi}\overset{*}{A}A\Phi = \overset{*}{\Phi}\,|A|^2\,\Phi > 0 \,,$$

dann folgen die Relationen (7.21) und (7.22) ebenfalls aus der Relation (7.19) (siehe Aufgabe B 8). Ferner führt die Quantisierung eines Feldes mit ganzzahligem Spin nach FERMI-DIRAC zu einem akausalen Verhalten des Kommutators der Felder (siehe Abschnitt 8.1. und Aufgabe B 9). Gut bekannt ist schließlich auch, daß das negative Vorzeichen des zweiten Terms im Operatorausdruck für die Energie des Spinorfeldes (5.22) eine Quantisierung dieses Feldes nach BOSE-EINSTEIN unmöglich macht.[1])

[1]) Ausnahmen vom Pauli-Theorem können bei Hilfsfeldern auftreten, die keinen physikalischen Sinn haben (z.B. bei Geisterfeldern in quantisierten Eichfeldtheorien).

8. Felder mit ganzzahligem Spin

8.1. Das skalare Feld

In dieser Vorlesung werden wir die Quantentheorie des skalaren, des massiven vektoriellen und des elektromagnetischen Feldes darlegen.

Auf Grund der Ergebnisse von Abschnitt 7.4. haben die Vertauschungsrelationen für das skalare Feld in der Impulsdarstellung folgende Gestalt:

a) Für das reelle Feld

$$[\varphi^-(\boldsymbol{k}), \varphi^+(\boldsymbol{q})] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) , \qquad [\varphi^\pm(\boldsymbol{k}), \varphi^\pm(\boldsymbol{q})] = 0 ; \tag{8.1}$$

b) für das komplexe Feld

$$[\overset{*}{\varphi}{}^-(\boldsymbol{k}), \varphi^+(\boldsymbol{q})] = [\varphi^-(\boldsymbol{k}), \overset{*}{\varphi}{}^+(\boldsymbol{q})] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) \tag{8.2}$$

(alle anderen Kommutatoren verschwinden).

Nach dem Übergang zur Koordinatendarstellung treten an die Stelle der Delta-Funktion gemäß

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\sqrt{2q_0}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(qy - kx)} \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{2k_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(y-x)} = \frac{1}{i} D^-(x - y) ,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{2k_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)} = \frac{1}{\mathrm{i}} D^-(y - x) = \mathrm{i}D^+(x - y)$$

die negativ- bzw. positiv-frequenten Anteile der sogenannten Pauli-Jordan-Funktion:

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x) = \mathrm{i}(2\pi)^{-3} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \varepsilon(k_0)\, \delta(k^2 - m^2)\, \mathrm{d}k . \tag{8.3}$$

Bei Einschränkung auf das reelle Feld schreiben sich die Kommutatorrelationen für die Feldoperatoren im Ortsraum wie folgt:

$$\begin{aligned} [\varphi^-(x), \varphi^+(y)] &= -\mathrm{i}D^-(x - y) , \\ [\varphi^+(x), \varphi^-(y)] &= -\mathrm{i}D^+(x - y) , \\ [\varphi(x), \varphi(y)] &= -\mathrm{i}D(x - y) . \end{aligned} \tag{8.4}$$

Die explizite Gestalt der Funktionen $D^\pm$ und D findet man im Anhang V.

Eine wichtige Eigenschaft der Funktion $D(x)$ ist ihr Verschwinden in raumartigen Gebieten (siehe auch (18.17)):

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad \text{für} \quad (x - y)^2 < 0 . \tag{8.5}$$

Diese Eigenschaft wird als *lokale Kommutativität* der Feldoperatoren bezeichnet und spiegelt die kausale Unabhängigkeit von Ereignissen wider, die voneinander durch raumartige Abstände getrennt sind.

Bevor wir die Lagrange-Dichte und die dynamischen Variablen für das skalare Quantenfeld angeben, sollen noch einige wichtige und nützliche Definitionen eingeführt werden.

8.2. Darstellung von dynamischen Variablen mit Hilfe der Normalprodukte

Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der Normalform eines Operators und des Normalprodukts von Operatoren ein.

Man spricht von der *Normalform* eines Operators, wenn in jedem seiner Summanden alle Erzeugungsoperatoren u^+ links von allen Vernichtungsoperatoren u^- stehen. Es ist leicht zu sehen, daß für konkrete Berechnungen die Normalform von Operatoren die geeignetste ist. Tatsächlich hat man bei der Berechnung von Matrixelementen $\overset{*}{\Phi} A \Phi$ irgendeines in Normalform befindlichen Operators A lediglich die in ihm enthaltenen Operatoren u^- der Reihe nach mit allen a^+ des Zustandes Φ, und in gleicher Weise die Operatoren u^+ mit allen a^- aus $\overset{*}{\Phi}$ solange zu kommutieren, bis ein u^- auf Φ_0 bzw. ein u^+ auf $\overset{*}{\Phi}_0$ wirkt, was jeweils Null ergibt.

Schreiben wir dazu als Beispiel das Produkt zweier Bose-Operatoren $\overset{*}{u}(x)$ und $u(x)$ in Normalform um:

$$\begin{aligned}\overset{*}{u}(x)\,u(y) &= \overset{*}{u}{}^+(x)\,u^+(y) + \overset{*}{u}{}^+(x)\,u^-(y) + \overset{*}{u}{}^-(x)\,u^+(y) + \overset{*}{u}{}^-(x)\,u^-(y)\\ &= \overset{*}{u}{}^+(x)\,u^+(y) + \overset{*}{u}{}^+(x)\,u^-(y) + u^+(y)\,\overset{*}{u}{}^-(x) + \overset{*}{u}{}^-(x)\,u^-(y)\\ &\quad - \mathrm{i}\Delta^-(x-y)\,.\end{aligned}$$

Hieraus wird ersichtlich, daß die Umschreibung des Produkts einer beliebigen Anzahl von Feldoperatoren u in die Normalform zu einer Summe von Produkten der Frequenzanteile u^+, u^- und der Vertauschungsfunktion Δ^- führt. Die allgemeine Vorschrift einer solchen Umformung wird durch das erste Wicksche Theorem gegeben, das wir in Vorlesung 17. ausführlicher betrachten. Den entstandenen Ausdruck kann man in gewisser Weise als Polynom in den Potenzen der Δ^--Funktionen ansehen. Das nullte Glied dieses Polynoms, d. h. die Summe aller Terme, die die Δ^--Funktion nicht enthalten, heißt *Normalprodukt* des ursprünglichen Produkts von Feldoperatoren.

Das Normalprodukt der Operatoren $u_1, u_2, \ldots, u_n$ wird durch das Symbol $:u_1 u_2 \ldots u_n:$ gekennzeichnet. Für das oben betrachtete Beispiel gilt demnach

$$\overset{*}{u}(x)\,u(y) = :\overset{*}{u}(x)\,u(y): - \mathrm{i}\Delta^-(x-y)\,.$$

Man kann das Normalprodukt auch dadurch definieren, daß unter dem Symbol $:\ldots:$ die Feldoperatoren ohne Berücksichtigung der Vertauschungsrelationen in die Normalform zu überführen sind.

Jetzt wollen wir festlegen, daß alle dynamischen Variablen, die quadratisch von Operatoren mit übereinstimmenden Argumenten abhängen (wie Lagrange-Dichte, Energie-Impuls-Vektor, Stromdichte usw.), per definitionem die Form von Normalprodukten haben. Die Lagrange-Dichte des komplexen skalaren Feldes hat dann folgendes Aussehen:

$$\mathcal{L} = :\overset{*}{\varphi}{}_{,\nu}\varphi^{,\nu}: - m^2 :\overset{*}{\varphi}\varphi:\,. \tag{8.6}$$

Wegen der Definition des Vakuumzustandes Φ_0

$$\varphi^-(x)\,\Phi_0 = \overset{*}{\varphi}{}^-(x)\,\Phi_0 = 0$$

und den hierzu konjugierten Beziehungen

$$\overset{*}{\Phi}_0 \varphi^+(x) = \overset{*}{\Phi}_0 \overset{*}{\varphi}^+(x) = 0 \,,$$

folgt, daß die Vakuumerwartungswerte aller dynamischen Größen verschwinden. Damit schließen wir also von vornherein alle pseudophysikalischen Größen, wie beispielsweise die Energie und die Ladung des Vakuums, aus.

Dann wird auch offensichtlich, daß alle in der klassischen Theorie aufgestellten Erhaltungssätze auch für die quantisierten, in Normalform dargestellten Größen ihre Gültigkeit beibehalten, da die in den Beweis des Noether-Theorems eingehenden algebraischen Identitäten erhalten bleiben.

Dieses Vorgehen entspricht den hier zu behandelnden Problemen. Jedoch ist das Vakuum ein kompliziertes und wichtiges physikalisches Objekt. Betrachtet man das quantisierte Feld als Satz harmonischer Oszillatoren (siehe Abschnitt 6.1. und 6.2.), dann ergibt sich die Vakuumenergie des Feldes als Summe der Nullpunktsenergien dieser Oszillatoren. Das ist ein unendlich großer Energiewert der unbeobachtbar ist und subtrahiert werden kann.

In besonderen Fällen können aber Differenzen von Vakuumenergien beobachtbar werden; so kann man beispielsweise das freie quantisierte elektromagnetische Feld zwischen zwei parallelen, unendlich großen leitenden Metallplatten betrachten. Hier sind bei der Quantisierung die Randbedingungen an den Platten zu beachten, was zu einer Einschränkung der zulässigen Feldoszillatoren führt. Betrachtet man zum Vergleich das freie quantisierte elektromagnetische Feld im unbegrenzten Raum und berechnet die Differenz der Nullpunktsenergien beider Felder oder genauer gesagt den Grenzwert

$$\mathscr{E} = \lim_{L\to\infty} \frac{E_{||} - E_0}{L^2}$$

(L: Kantenlängen der Metallplatten, $E_{||}$ Nullpunktsenergie des Feldes mit Randbedingungen, E_0 Nullpunktsenergie des Feldes ohne Randbedingungen), dann der abstandsabhängige Teil dieser Energiedifferenz endlich. Es ist sogar eine Annäherung der Platten energetisch bevorzugt. Daraus folgt die Existenz einer Anziehungskraft zwischen den Platten

$$\mathscr{F} = \lim_{L\to\infty} \frac{F}{L^2} = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^4}$$

(a: Abstand der Platten). Das ist der sogenannte *Casimir-Effekt*; er konnte experimentell überprüft werden (siehe [13], Kapitel 4. und [14], Kapitel 3.24). Nach diesen Zwischenbemerkungen wenden wir uns wieder den vorangegangenen Untersuchungen zu.

Die wichtigsten dynamischen Größen des komplexen skalaren Feldes schreiben wir jetzt in der Gestalt

$$T_{\mu\nu} = :(\overset{*}{\varphi}_{,\mu}\varphi_{,\nu} + \overset{*}{\varphi}_{,\nu}\varphi_{,\mu}): -g_{\mu\nu}\mathscr{L} \,, \tag{8.7}$$

$$P^\nu = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\; k^\nu\big(\overset{*}{\varphi}^+(\boldsymbol{k})\,\varphi^-(\boldsymbol{k}) + \varphi^+(\boldsymbol{k})\,\overset{*}{\varphi}^-(\boldsymbol{k})\big) \,, \tag{8.8}$$

$$Q = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\big(\overset{*}{\varphi}^+(\boldsymbol{k})\,\varphi^-(\boldsymbol{k}) - \varphi^+(\boldsymbol{k})\,\overset{*}{\varphi}^-(\boldsymbol{k})\big) \,. \tag{8.9}$$

Aus der Struktur der Operatoren P^ν und Q folgt, daß $\overset{*}{\varphi}^+(\boldsymbol{k})$ der Erzeugungsoperator für ein Teilchen mit dem Energie-Impuls-Vektor k^ν und der Ladung $+1$, und $\varphi^-(\boldsymbol{k})$ der Vernichtungsoperator für ein derartiges Teilchen ist; $\varphi^+(\boldsymbol{k})$ ist dann

der Erzeugungsoperator für ein Teilchen mit dem Energie-Impuls-Vektor k^ν und der Ladung -1, und $\overset{*}{\varphi}{}^-(\boldsymbol{k})$ der Vernichtungsoperator für ein solches Teilchen. Mit den in Vorlesung 7. zur physikalischen Interpretation der Frequenzanteile der Feldfunktionen φ^+ und φ^- geführten Betrachtungen wurde deren Normierung noch nicht festgelegt. Wir können sie jetzt mit Hilfe des Energie-Impuls-Vektors (8.8) bestimmen. Dazu betrachten wir einen Zustand, der ein skalares Teilchen mit nichtnormierter Verteilungsfunktion $c(\boldsymbol{k})$ der Impulse enthält,

$$\Phi_1 = \int c(\boldsymbol{k})\, \varphi^+(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \Phi_0\,, \tag{8.10}$$

und berechnen den Erwartungswert des Operators P^ν in diesem Zustand. Das ergibt nach Ausführen der erforderlichen Vertauschungen der Operatoren:

$$\langle P^\nu \rangle_1 = \frac{\overset{*}{\Phi}_1 P^\nu \Phi_1}{\overset{*}{\Phi}_1 \Phi_1} = \frac{\int \overset{*}{c}(\boldsymbol{k})\, c(\boldsymbol{k})\, k^\nu\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\int |c(\boldsymbol{k})|^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}}\,.$$

Der Übergang zu einem Zustand mit fixiertem Impuls k kann nun durch Lokalisierung der Funktion $c(\boldsymbol{k})$ in einer kleinen Umgebung des Wertes $k = K$ (z.B. durch einen Grenzübergang $c(\boldsymbol{k}) \to \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{K})$) vollzogen werden. Wir erhalten dann

$$\langle P^\nu \rangle_1 \to K^\nu\,.$$

Damit ist der Erwartungswert des Operators P^ν in einem Zustand mit fixiertem Wert K^ν des Impulses gerade K^ν, und folglich entspricht die durch die Vertauschungsrelationen (8.1) und (8.2) festgelegte Normierung der Operatoren $\varphi^\pm(\boldsymbol{k})$, $\overset{*}{\varphi}{}^\pm(\boldsymbol{k})$ der durch die Ausdrücke (8.8) und (8.9) bestimmten Normierung dynamischer Größen.

8.3. Das komplexe Vektorfeld

Die Quantisierungsregeln für das Vektorfeld lassen sich nicht einfach durch formale Verallgemeinerung der Quantisierungsvorschrift für das skalare Feld gewinnen. Eine unabhängige Quantisierung jeder Komponente des Potentials U_ν nach dem Vorbild des skalaren Feldes würde die Positivität des Erwartungswertes der Energie verletzen, und würde auch mit der Nebenbedingung (3.13) unvereinbar sein. Das Quantisierungsverfahren muß deshalb mit dieser Nebenbedingung verknüpft sein, die, wie wir in Vorlesung 3. gesehen haben, automatisch die Positivität von P_0 gewährleistet. Im einzelnen wurde dort gezeigt, daß sich der Energie-Impulsvektor nach dem Übergang zu den longitudinalen und transversalen Komponenten mit Hilfe von (3.24) und (3.27) durch die drei linear unabhängigen Amplituden $b_a(\boldsymbol{k})$ ausdrücken läßt

$$P^\nu = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, k^\nu \big(\overset{*}{b}{}_a^+(\boldsymbol{k})\, b_a^-(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{b}{}_a^-(\boldsymbol{k})\, b_a^+(\boldsymbol{k})\big)\,. \tag{3.28}$$

In dieser Darstellung des klassischen Impulsvektors ist die Nebenbedingung (3.13) berücksichtigt und die Positivität des unquantisierten P^0 gesichert. Es ist ferner klar, daß die unmittelbare Bose-Einstein-Quantisierung der drei unabhängigen Amplituden b_a $(a = 1, 2, 3)$ zu positiv definiten Erwartungswerten des Energieoperators führt.

Infolgedessen legen wir fest, daß die Operatoren b_a den Vertauschungsrelationen

$$[b_a^-(\boldsymbol{k}), \overset{*}{b}{}_b^+(\boldsymbol{q})]_- = [\overset{*}{b}{}_a^-(\boldsymbol{k}), b_b^+(\boldsymbol{q})]_- = \delta_{ab}\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) \tag{8.11}$$

genügen und alle anderen Kommutatoren verschwinden sollen. Analoge Kommutatorrelationen ergeben sich auch für die Operatoren $a_a^{\pm}$ und $\overset{*}{a}{}_a^{\pm}$.

Für die Ladung und die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung erhalten wir gemäß (3.29) und (3.30)

$$Q = \int d\boldsymbol{k}\big(\overset{*}{b}{}_a^{+}(\boldsymbol{k})\, b_a^{-}(\boldsymbol{k}) - b_a^{+}(\boldsymbol{k})\, \overset{*}{b}{}_a^{-}(\boldsymbol{k})\big)\,, \tag{8.12}$$

$$S_{\|} \sim \big(\overset{*}{b}{}_1^{+}(\boldsymbol{k})\, b_1^{-}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{b}{}_2^{+}(\boldsymbol{k})\, b_2^{-}(\boldsymbol{k}) - b_1^{+}(\boldsymbol{k})\, \overset{*}{b}{}_1^{-}(\boldsymbol{k}) + b_2^{+}(\boldsymbol{k})\, \overset{*}{b}{}_2^{-}(\boldsymbol{k})\big)\,. \tag{8.13}$$

Durch Berechnung der entsprechenden Erwartungswerte überzeugt man sich davon, daß $\overset{*}{b}{}_1^{+}(\boldsymbol{k})$ und $b_1^{-}(\boldsymbol{k})$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für Teilchen mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$, der Ladung $+1$ und der Spinprojektion $+1$ sind, daß ferner $\overset{*}{b}{}_2^{+}(\boldsymbol{k})$ und $b_2^{-}(\boldsymbol{k})$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für Teilchen mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$, der Ladung $+1$ und der Spinprojektion -1, und schließlich $\overset{*}{b}{}_3^{+}(\boldsymbol{k})$ und $b_3^{-}(\boldsymbol{k})$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für Teilchen mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$, der Ladung $+1$ und der Spinprojektion Null sind. Die physikalische Interpretation der Operatoren b_a^{+} und $\overset{*}{b}{}_a^{-}$ ergibt sich hieraus durch Anwendung folgender Regel:

Der Übergang von $b_a^{\pm}$ zu $\overset{*}{b}{}_a^{\pm}$ hat sowohl die Umkehr des Vorzeichens der Ladung als auch der Spinprojektion zur Folge.

Wir haben uns soeben davon überzeugt, daß das komplexe Vektorfeld geladene Teilchen mit der Masse m und drei möglichen Werten $(+1, 0, -1)$ der Spinprojektion auf eine vorgegebene Achse beschreibt, oder anders ausgedrückt, daß die Quanten dieses Feldes geladene Mesonen mit dem Spin 1 sind; man nennt sie auch *Vektormesonen.*

Die Amplituden a_n haben ebenfalls einen einfachen Sinn: Der Amplitude a_3 entsprechen Teilchen mit Spinprojektion Null, und die Amplituden a_1 und a_2 beschreiben Gemische von Zuständen mit Spinprojektionen $+1$ und -1, die einer linearen (transversalen) Polarisation entsprechen.

Nun können wir auch die Vertauschungsrelationen für die vier linear abhängigen Funktionen U_ν angeben. Mit Hilfe von (3.24) gelangt man leicht zu den Kommutatoren für die drei Operatoren U_n $(n = 1, 2, 3)$

$$[\overset{*}{U}{}_n^{-}(\boldsymbol{k}),\, U_m^{-}(\boldsymbol{q})] = [U_n^{+}(\boldsymbol{k}),\, \overset{*}{U}{}_m^{+}(\boldsymbol{q})] = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\left(\delta_{nm} + \frac{k_n k_m}{m^2}\right).$$

Unter Ausnutzung der Bedingung $k_0 U_0 - k_n U_n = 0$ lassen sich hieraus die Vertauschungsrelationen bestimmen, die U_0 enthalten

$$[\overset{*}{U}{}_0^{-}(\boldsymbol{k}),\, U_n^{+}(\boldsymbol{q})] = [U_0^{-}(\boldsymbol{k}),\, \overset{*}{U}{}_n^{+}(\boldsymbol{q})] = +\frac{k_0 k_n}{m^2}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\,,$$

$$[\overset{*}{U}{}_0^{-}(\boldsymbol{k}),\, U_0^{+}(\boldsymbol{q})] = [U_0^{-}(\boldsymbol{q}),\, \overset{*}{U}{}_0^{+}(\boldsymbol{q})] = \left(\frac{k_0^2}{m^2} - 1\right)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\,.$$

Das Ergebnis kann man in der folgenden Formel zusammenfassen:

$$[\overset{*}{U}{}_\nu^{-}(\boldsymbol{k}),\, U_\mu^{+}(\boldsymbol{q})] = [U_\nu^{-}(\boldsymbol{k}),\, \overset{*}{U}{}_\mu^{+}(\boldsymbol{q})] = \left(\frac{k_\nu k_\mu}{m^2} - g_{\nu\mu}\right)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\,, \tag{8.14}$$

die relativistisch kovariant und mit der Nebenbedingung (3.22) verträglich ist. Im Ortsraum ergibt sich daraus

$$
\begin{aligned}
&[\overset{*}{U}{}_\nu^-(x),\, U_\mu^+(y)] = [U_\nu^-(x),\, \overset{*}{U}{}_\mu^+(y)] = \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\nu\, \partial x^\mu}\right) \mathrm{i}D^-(x-y)\,, \\
&[\overset{*}{U}_\nu(x),\, U_\mu(y)] = \left(g_{\nu\mu} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\nu\, \partial x^\mu}\right) \mathrm{i}D(x-y)\,.
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

Man kann sich nun davon überzeugen, daß die abgeleiteten Vertauschungsrelationen sowohl mit den Feldgleichungen als auch mit der Nebenbedingung vereinbar sind. Dazu braucht man nur auf beiden Seiten von (8.15) den Klein-Gordon-Operator $\Box_x - m^2$ anzuwenden. Das führt zur Identität $0 = 0$, denn in Übereinstimmung mit (8.3) gilt

$$(\Box - m^2)\, D(x) = 0\,.$$

8.4. Die Schwierigkeiten bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes ist zu beachten, daß man nicht nur die Positivität der Energiedichte zu gewährleisten, sondern neben der Lorentz-Bedingung auch noch die Transversalitätsbedingung zu erfüllen hat; und schließlich muß die Formulierung der quantisierten Theorie relativistisch kovariant sein.

Eine ähnliche Situation lag bereits bei der Quantisierung des Vektormesonfeldes vor. Beide Fälle unterscheiden sich aber voneinander dadurch, daß sich die Vektormesonen in drei, die Photonen dagegen wegen der Transversalität nur in zwei verschiedenen Spinzuständen befinden können. Die Ursache hierfür liegt darin, daß, im Gegensatz zu den Mesonen, die Ruhmasse der Photonen gleich Null ist. Das führt dazu, daß das Potential des elektromagnetischen Feldes noch mehr „überflüssige“ Variablen in sich birgt als dies schon beim Vektorfeld der Fall war. Obwohl vier Komponenten des Potentials in die Beschreibung eingehen, können sich reale Photonen nur in zwei verschiedenen Zuständen befinden.

Das Verschwinden der Ruhmasse $m = 0$ macht es unmöglich, auf das elektromagnetische Feld die gleiche Prozedur anzuwenden, die zur Quantisierung des Vektorfeldes führte. Selbst die Quantisierung eines hypothetischen Vektorfeldes mit verschwindend kleiner Masse, d. h. eines Feldes, das sich vom elektromagnetischen nur durch das Fehlen der Eichtransformation unterscheidet und darum aus drei Komponenten besteht, ist bereits mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Bei einem solchen Vorgehen erhält man z. B. sinnlose Ausdrücke beim Diagonalisieren des Energie-Impuls-Vektors mit Hilfe des Ansatzes (3.24) oder beim Aufstellen der Vertauschungsrelationen für das Potential A_ν in der Form (8.14) und (8.15), und zwar beide Male wegen der verschwindend kleinen Masse im Nenner der genannten Ausdrücke.

Deshalb wird die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes in folgender Weise durchgeführt: Wir betrachten die vier Komponenten des Vektorpotentials als unabhängige Größen, womit insbesondere die Lorentz-Bedingung als Operatorgleichung aufgegeben wird. Dann führt die allgemeine Quantisierungsvorschrift, ausgehend von der Zerlegung des Energie-Impuls-Vektors in die transversalen, die longitudinale und die skalare („zeitliche“) Komponente gemäß

$$P^\nu = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\; k^\nu \big(-a_\lambda^+(\boldsymbol{k})\, a_\mu^-(\boldsymbol{k})\big)\, g^{\mu\lambda} \tag{8.16}$$

zu den folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[a_\nu^-(\boldsymbol{k}), a_\mu^+(\boldsymbol{q})] = -g_{\nu\mu}\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) . \tag{8.17}$$

Diese Quantisierung (8.17) führt zur Interpretation der Operatoren $a_\nu^\pm$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für vier unabhängige Arten von Photonen, nämlich die zwei transversalen, die „longitudinalen" und die „skalaren" („zeitlichen") Photonen. Dabei tritt jedoch folgende Schwierigkeit auf. Die Komponente a_0 genügt der Relation

$$[a_0^-(\boldsymbol{k}), a_0^+(\boldsymbol{q})] = -\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) ,$$

die beim Vergleich mit (7.19) unmittelbar zu der Erkenntnis führt, daß die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der skalaren Photonen ihre Bedeutung gewechselt haben, was auf das negative Vorzeichen des Gliedes $a_0^+a_0^-$ im Ausdruck (8.16) zurückzuführen ist. Diese Vertauschungsrelation widerspricht damit der Voraussetzung der positiven Definitheit der Metrik im Hilbert-Raum der Zustände (siehe Aufgabe B 12).

Die aufgezeigte Schwierigkeit kann durch einen formalen, von Gupta und Bleuler stammenden Trick beseitigt werden, der darauf beruht, daß das Problem einzig und allein von den real nicht existierenden „skalaren" Photonen hervorgerufen wird. Das Auftreten skalarer Photonen in den Zwischenstufen ist lediglich auf den Übergang von den observablen Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ zum Potential A_ν zurückzuführen, der vorgenommen wurde, um die Theorie relativistisch kovariant und symmetrisch formulieren zu können.

8.5. Die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes nach Gupta und Bleuler

In diesem Abschnitt stellen wir lediglich die Grundlage der Gupta-Bleuler-Methode vor und geben dann die Resultate an. Die Einzelheiten findet der Leser in der Spezialliteratur (vgl. [1], § 12.2; [2], § 2.3).

Im folgenden spielt die Lorentz-Bedingung eine zentrale Rolle. Bei der Quantisierung (8.17) wurde angenommen, daß die Komponenten des Potentials A_ν unabhängig voneinander sind, so daß die Lorentz-Bedingung nicht als Forderung an die Operatoren formuliert werden kann. Man überzeugt sich leicht davon, daß die Lorentz-Bedingung auch nicht den physikalisch erlaubten Zuständen in der Gestalt

$$\partial A(x)\,\Phi = 0 \qquad (\partial A \equiv \partial^\nu A_\nu)$$

auferlegt werden kann, weil diese Bedingung u. a. der Definition des Vakuums widerspräche. Wenn man nämlich $\Phi = \Phi_0$ setzt, so folgt einerseits

$$\partial A(x)\,\Phi_0 = \partial A^+(x)\,\Phi_0 = 0;$$

andererseits ergibt sich nach linksseitiger Multiplikation mit $A_\mu^-(y)$

$$\begin{aligned} A_\mu^-(y)\,\partial^\nu A_\nu^+(x)\,\Phi_0 &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(A_\mu^-(y)\,A_\nu^+(x)\right)\Phi_0 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}[A_\nu^+(x)\,A_\mu^-(y) - \mathrm{i}g_{\mu\nu}D_0^+(x-y)]\,\Phi_0 \\ &= -\mathrm{i}\partial_\mu D_0^+(x-y)\,\Phi_0 \neq 0 . \end{aligned}$$

Hierbei ist D_0^+ der positiv-frequente Anteil der Vertauschungsfunktion D_0, die unten in Gl. (8.22) für das elektromagnetische Feld eingeführt wird.

Deshalb wird die quantisierte Lorentz-Bedingung zur Eliminierung unerlaubter Zustände in folgender Weise abgeschwächt:

$$\partial A^-(x)\,\Phi = \frac{\partial A_\nu^-(x)}{\partial x_\nu}\,\Phi = 0\,, \qquad \overset{*}{\Phi}(\partial A^+) = 0\,. \tag{8.18}$$

Auch mit dieser abgeschwächten Forderung ist die Lorentz-Bedingung für die Erwartungswerte streng erfüllt,

$$\langle \partial A \rangle = \overset{*}{\Phi}\,\partial A(x)\,\Phi = 0\,,$$

was für die Korrespondenz mit der klassischen Theorie voll und ganz genügt.

Wie wir bereits in Vorlesung 4. bemerkten, erfüllt die skalare Funktion $\chi(x) = \partial A(x)$ in der hier betrachteten diagonalen Eichung die d'Alembert-Gleichung (4.15) auch im Falle einer Wechselwirkung mit äußeren Quellen. Deshalb behält die abgeschwächte Lorentz-Bedingung (8.18) ihre Form auch beim Einschalten einer Wechselwirkung des quantisierten elektromagnetischen Feldes mit einem erhaltenen Strom geladener Teilchen, für den also die Kontinuitätsgleichung $\partial^\mu j_\mu = 0$ erfüllt ist, bei.

Geht man zur Impulsdarstellung und den Variablen des lokalen Repère über, so erhält man unter Berücksichtigung von $k_0 = |\boldsymbol{k}|$ anstelle von (8.18)

$$F^-(\boldsymbol{k})\,\Phi = 0\,, \qquad \overset{*}{\Phi}F^+(\boldsymbol{k}) = 0\,, \tag{8.19}$$

wobei

$$F^\pm(\boldsymbol{k}) = a_0^\pm(\boldsymbol{k}) - a_3^\pm(\boldsymbol{k})$$

gesetzt wurde. Hieraus folgt, daß die Kombination $a_3^+a_3^- - a_0^+a_0^-$ keinen Beitrag zu den erlaubten Zuständen liefert, denn es ist

$$\langle a_3^+a_3^- - a_0^+a_0^- \rangle = \overset{*}{\Phi}(a_3^+ - a_0^+)\,a_3^-\Phi = 0\,.$$

Somit tragen die longitudinalen und skalaren Pseudophotonen nicht zu Energie und Impuls der erlaubten Zustände bei.

Man sieht unmittelbar ein, daß die mit den Bedingungen (8.18) bzw. (8.19) in Einklang stehenden Zustände folgende Struktur haben:

$$\Phi = \Phi_{\mathrm{T}}^0 + \sum_n c_n \prod_{1\leq m\leq n} \left(a_3^+(\boldsymbol{k}_m) - a_0^+(\boldsymbol{k}_m)\right) \Phi_{\mathrm{T}}^n\,, \tag{8.20}$$

wobei Φ_{T}^0 und Φ_{T}^n reale Photonzustände ohne Beimischungen von Pseudophotonen sind.

Wir zeigen nun, daß nur die transversalen Anteile

$$A_\nu^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}) = e_\nu^1(\boldsymbol{k})\,a_1(\boldsymbol{k}) + e_\nu^2(\boldsymbol{k})\,a_2(\boldsymbol{k})$$

in der Darstellung von A_ν durch (4.23) mittels des lokalen Repère von Bedeutung sind. Dazu stellen wir die rechte Seite von (4.23) in der Form

$$\begin{aligned} A_\nu^-(\boldsymbol{k}) &= A_\nu^{\mathrm{T}-}(\boldsymbol{k}) + \left(\frac{k_\nu}{|\boldsymbol{k}|} - \delta_{\nu 0}\right) a_3^-(\boldsymbol{k}) + \delta_{\nu 0}a_0^-(\boldsymbol{k}) \\ &= A_\nu^{\mathrm{T}-}(\boldsymbol{k}) + k_\nu \Lambda(\boldsymbol{k}) + \delta_{\nu 0}F^-(\boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

dar. Hierbei hat das Glied $k_\nu A = k_\nu a_3^-(\boldsymbol{k})/|\boldsymbol{k}|$ die Form eines Gradienten und kann daher durch eine geeignete Eichtransformation beseitigt werden, und $F^-(\boldsymbol{k})\,\Phi$ verschwindet wegen (8.19). Deshalb haben wir

$$A_\nu^-(\boldsymbol{k})\,\Phi = A_\nu^{\mathrm{T}-}(\boldsymbol{k})\,\Phi$$

und folglich

$$\overset{*}{\Phi} A_\nu \Phi = \overset{*}{\Phi} A_\nu^{\mathrm{T}} \Phi\,.$$

Weiterhin kann man zeigen, daß folgende allgemeinere Behauptung gilt:

$$\overset{*}{\Phi} K(A)\,\Phi = \overset{*}{\Phi} K(A^{\mathrm{T}})\,\Phi = \overset{*}{\Phi}{}_{\mathrm{T}}^{0} K(A^{\mathrm{T}})\,\Phi_{\mathrm{T}}^{0}\,, \tag{8.21}$$

wobei $K(A)$ ein polynomial von A abhängender Operator, Φ_{T}^{0} der in (8.20) eingeführte Anteil von Φ ist. Das bedeutet aber, daß der Erwartungswert eines beliebigen Potentials A bezüglich der erlaubten Zustände gleich dem Erwartungswert des transversalen Potentials A^{T} bezüglich der realen physikalischen Zustände ist.

Es sei noch darauf verwiesen, daß eine folgerichtige Durchführung dieses Programms die Einführung einer indefiniten Metrik in jenem Teil des Hilbertschen Unterraums der erlaubten Zustände zur Folge hat, der die skalaren Pseudophotonen enthält. Wir haben hier keine Möglichkeit, darauf näher einzugehen.

Zum Abschluß des Abschnitts wollen wir noch einige Formeln für das quantisierte elektromagnetische Feld in der Lorentz-Eichung angeben. Der Kommutator der Potentiale ist gegeben durch

$$[A_\nu(x), A_\mu(y)] = \mathrm{i} g_{\nu\mu} D_0(x-y) \tag{8.22}$$

mit

$$D_0(x) = D(x)|_{m=0} = -\mathrm{i}(2\pi)^{-3} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\delta(k^2)\,\varepsilon(k^0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,; \tag{8.23}$$

die Feldgleichungen lauten

$$\Box A_\nu = 0\,; \tag{8.24}$$

die Lorentz-Bedingung für die erlaubten Zustände ist

$$\left(\frac{\partial^\nu A^-(x)}{\partial x^\nu}\right)\Phi = 0 \tag{8.25}$$

und der Erwartungswert des Impulses für erlaubte Zustände lautet

$$\langle P_\nu\rangle = \langle \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, k_\nu \sum_{\sigma=1,2} a_\sigma^+(\boldsymbol{k})\, a_\sigma^-(\boldsymbol{k})\rangle\,. \tag{8.26}$$

9. Die Spinorfelder

9.1. Die Quantisierung des Dirac-Feldes

Aus der Struktur des Energie-Impuls-Vektors für das Dirac-Feld

$$P^\nu = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, k^\nu \big(\overset{*}{a}{}_s^+(\boldsymbol{k})\, a_s^-(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}_s^-(\boldsymbol{k})\, a_s^+(\boldsymbol{k})\big) \tag{5.21}$$

ist ersichtlich, daß die unabhängigen Amplituden a_s $(s = 1, 2)$ einer Quantisierung gemäß Vorlesung 7. unterzogen werden können. Wie wir bereits erwähnt hatten führt die Forderung nach Positivität des Erwartungswertes des Energieoperators P

dazu, daß das Spinorfeld nach FERMI-DIRAC quantisiert werden muß. Deshalb hat man anzunehmen, daß die operatorwertigen Fourier-Amplituden $a_s(\boldsymbol{k})$ des Spinorfeldes den Fermi-Dirac-Vertauschungsrelationen genügen

$$[\overset{*}{a}{}_s^-(\boldsymbol{k}), a_r^+(\boldsymbol{q})]_+ = [a_s^-(\boldsymbol{k}), \overset{*}{a}{}_r^+(\boldsymbol{q})]_+ = \delta_{sr}\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) \,. \tag{9.1}$$

(Alle anderen Antikommutatoren sind gleich Null.)

Die Vertauschungsrelationen für die Operatoren $\psi(x)$ erhält man hieraus mit Hilfe der aus (5.9), (5.13) und (5.14) folgenden Formeln der Fourier-Transformation,

$$\psi^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\; \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}\, a_s^\mp(\boldsymbol{k})\, v^{s\pm}(\boldsymbol{k}) \,, \tag{9.2}$$

$$\bar\psi^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\; \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}\, \overset{*}{a}{}_s^\mp(\boldsymbol{k})\, \bar v^{s\pm}(\boldsymbol{k}) \,, \tag{9.3}$$

und den Formeln (5.20) für die Summation über die Spinindizes; und zwar folgt:

$$\begin{aligned}
[\psi_\alpha^-(x), \bar\psi_\beta^+(y)]_+ &= (2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(y-x)} \sum_\sigma v_\alpha^{\sigma-}(\boldsymbol{k})\, \bar v_\beta^{\sigma+}(\boldsymbol{k}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(y-x)} \frac{(\hat{k} + m)_{\alpha\beta}}{2k_0} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}k (\hat{k} + m)_{\alpha\beta}\, \delta(k^2 - m^2)\, \Theta(k^0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(y-x)} \\
&= (\mathrm{i}\gamma^\nu \partial/\partial x^\nu + m)_{\alpha\beta} \frac{1}{\mathrm{i}} D^-(x - y)
\end{aligned}$$

sowie, in vollständiger Analogie dazu,

$$[\psi^+(x), \bar\psi^-(y)]_+ = (\mathrm{i}\hat\partial_x + m)\, (1/\mathrm{i})\, D^+(x - y) \,.$$

Führen wir nun die Bezeichnungen

$$S_{\alpha\beta}^\pm(x) = (\mathrm{i}\hat\partial + m)_{\alpha\beta}\, D^\pm(x) \,, \qquad S = S^+ + S^-$$

ein, so erhalten wir

$$[\psi(x), \bar\psi(y)]_+ = \frac{1}{\mathrm{i}} S(x - y) \tag{9.4}$$

mit

$$S(x) = (\mathrm{i}\hat\partial + m)\, D(x) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \delta(k^2 - m^2)\, \varepsilon(k^0)\, (\hat{k} + m)\, \mathrm{d}k \,. \tag{9.5}$$

Diese Vertauschungsrelationen sind mit den Feldgleichungen vereinbar, weil

$$(\mathrm{i}\hat\partial - m)\, S(x) = (\Box - m^2)\, D(x) = 0$$

gilt.

Schreibt man die Lagrange-Dichte mit Hilfe des Normalprodukts in der Form

$$\mathcal{L} = (\mathrm{i}/2)\colon (\bar\psi\gamma^\nu\psi_{,\nu} - \bar\psi_{,\nu}\gamma^\nu\psi)\colon - m\colon \bar\psi\psi\colon \,, \tag{9.6}$$

so folgt für den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = (\mathrm{i}/2)\colon (\bar\psi\gamma^\mu\psi^{,\nu} - \bar\psi^{,\nu}\gamma^\mu\psi)\colon \,, \tag{9.7}$$

den Spindrehimpulstensor

$$S^{\lambda(\mu\nu)} = \tfrac{1}{4}\colon \bar\psi\gamma^\lambda\sigma^{\mu\nu}\psi\colon + \tfrac{1}{4}\colon \bar\psi\sigma^{\mu\nu}\gamma^\lambda\psi\colon \tag{9.8}$$

und den Stromdichtevektor

$$J^\nu(x) = :\bar{\psi}(x)\, \gamma^\nu \psi(x):. \tag{9.9}$$

Nach dem Übergang zur Impulsdarstellung vermöge der Formeln (9.2) und (9.3) nehmen die entsprechenden Bewegungsintegrale in Übereinstimmung mit (5.21), (5.27) und (5.28) folgende Gestalt an:

Der Energie-Impuls-Vektor

$$P^\nu = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, k^\nu \big(\overset{*}{a}{}_s^+(\boldsymbol{k})\, a_s^-(\boldsymbol{k}) + a_s^+(\boldsymbol{k})\, \overset{*}{a}{}_s^-(\boldsymbol{k})\big)\,, \tag{9.10}$$

die Ladung

$$Q = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} \big(\overset{*}{a}{}_s^+(\boldsymbol{k})\, a_s^-(\boldsymbol{k}) - a_s^+(\boldsymbol{k})\, \overset{*}{a}{}_s^-(\boldsymbol{k})\big) \tag{9.11}$$

und die Spinprojektion auf die Bewegungsrichtung

$$\Delta S_{\parallel} \sim (1/2)\, \big(\overset{*}{a}{}_1^+(\boldsymbol{k})\, a_1^-(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{a}{}_2^+(\boldsymbol{k})\, a_2^-(\boldsymbol{k}) - a_1^+(\boldsymbol{k})\, \overset{*}{a}{}_1^-(\boldsymbol{k}) + a_2^+(\boldsymbol{k})\, \overset{*}{a}{}_2^-(\boldsymbol{k})\big)\,. \tag{9.12}$$

Aus den Ausdrücken (9.10)—(9.12) folgt, daß die Operatoren $\overset{*}{a}{}_s^+(\boldsymbol{k})$ und $a_s^-(\boldsymbol{k})$ Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren von Teilchen mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$, der Energie $k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$, der Ladung $+1$ und der Spinprojektion $\frac{1}{2}(s = 1)$ bzw. $-\frac{1}{2}$ $(s = 2)$ auf die Richtung von $\boldsymbol{k}$ sind. Die Operatoren $a_s^+(\boldsymbol{k})$ und $\overset{*}{a}{}_s^-(\boldsymbol{k})$ korrespondieren zu Teilchen, die sich von den soeben beschriebenen nur durch das Vorzeichen der Ladung (-1) und der Projektion des Spins (d. h. $\frac{1}{2}$ für $s = 2$ und $-\frac{1}{2}$ für $s = 1$) unterscheiden.

9.2. Das Spinorfeld mit der Masse Null

Von besonderem Interesse ist das Spinorfeld mit der Masse Null, das dem Neutrino entspricht.[1]) Setzen wir in der Dirac-Gleichung $m = 0$, so ergibt sich

$$\mathrm{i}\gamma^\nu \partial_\nu \psi(x) = 0\,.$$

Die Gleichung für den 4-komponentigen Dirac-Spinor ψ zerfällt dann in zwei unabhängige Gleichungen für die jeweils 2-komponentigen Spinoren $\varphi_\pm$. Um das zu zeigen, machen wir davon Gebrauch, daß bei Fehlen eines Massenterms der Dirac-Operator $\mathrm{i}\gamma^\nu\partial_\nu$ mit der Matrix γ_5 antikommutiert.

Dazu führen wir die Projektionsoperatoren

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$$

ein und erhalten

$$P_\pm\, \hat{\partial}\psi = P_\pm \gamma^\nu \partial_\nu \psi = \gamma^\nu P_\mp\, \partial_\nu \psi\,,$$

d. h. zwei separate Gleichungen für $\psi_\pm = P_\pm \psi$

$$\mathrm{i}\hat{\partial}\psi_+ = 0\,, \qquad \mathrm{i}\hat{\partial}\psi_- = 0\,. \tag{9.13}$$

[1]) In den letzten Jahren wurde häufig das Problem einer kleinen, nichtverschwindenden Masse des Neutrinos diskutiert. Bei den am Institut für Theoretische und Experimentelle Physik in Moskau durchgeführten Experimenten ergaben sich Anzeichen dafür, daß die Neutrinomasse von Null verschieden ist und im Intervall von 19 bis 46 eV liegt.

In der Standarddarstellung gilt

$$\psi_\pm = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 \mp \psi_3 \\ \psi_2 \mp \psi_4 \\ \mp\psi_1 + \psi_3 \\ \mp\psi_2 + \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Damit enthält also jede der Funktionen ψ_+ und ψ_- nur noch zwei unabhängige Komponenten und kann gemäß

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \varphi_{(+)} \\ -\varphi_{(+)} \end{pmatrix}, \qquad \psi_- = \begin{pmatrix} \varphi_{(-)} \\ \varphi_{(-)} \end{pmatrix}$$

aus den 2-komponentigen Spinoren

$$\varphi_{(+)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 - \psi_3 \\ \psi_2 - \psi_4 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_{(-)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_3 \\ \psi_2 + \psi_4 \end{pmatrix}$$

aufgebaut werden.

Unter Verwendung der entsprechenden blockdiagonalen Darstellung der Dirac-Matrizen (A II.7) erhält man anstelle von (9.13)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\varphi_{(\pm)}(x) = 0\,. \tag{9.14}$$

Gleichungen dieses Typs wurden erstmalig von Weyl untersucht. Um uns den physikalischen Sinn der 2-komponentigen Funktionen $\varphi_\alpha[\alpha = (+), (-)]$ zu verdeutlichen, gehen wir zur Impulsdarstellung

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha^+ + \varphi_\alpha^- \,, \qquad \varphi_\alpha^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \tilde{\varphi}_\alpha^\pm(\boldsymbol{p})\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}px}$$

über. Die *Weyl-Gleichungen* lauten dann

$$(p_0 \mp \boldsymbol{\sigma p})\, \tilde{\varphi}_{(\pm)}(\boldsymbol{p}) = 0\,. \tag{9.15}$$

Wie im Abschnitt 5.3. (siehe (5.24)) festgestellt wurde, beschreibt der Vektor $\boldsymbol{\sigma}$ (dessen Komponenten Matrizen sind) den Spin des Fermions. Aus den Gleichungen (9.15) folgt aber (siehe hierzu Aufgabe B 16), daß der Spin des Neutrinos entweder in Bewegungsrichtung weist oder ihr entgegengerichtet ist. Deshalb beschreibt jede der 4-komponentigen Amplituden $\psi_\pm$ nur einen Spinzustand.

Der doppelte Wert der Spinprojektion des Fermions auf die Richtung seines Impulses $\lambda = (\boldsymbol{\sigma p})/|\boldsymbol{p}|$ heißt *Helizität* (oder *Spiralität*) des Fermions. Experimentell wurde festgestellt, daß der Spin des Neutrinos dem Impuls entgegen gerichtet, d. h. die Helizität des Neutrinos gleich -1 ist. (Das gilt gleichermaßen für das Elektron- wie auch für das Müon-Neutrino.) Wie wir weiter unten zeigen werden, beschreibt die Funktion ψ_- Teilchen mit negativer, und ψ_+ Teilchen mit positiver Helizität.

Auf Grund dieser Feststellungen definieren wir den Feldoperator für das Neutrino wie folgt:

$$\nu(x) = P_-\psi(x)\,.$$

Er genügt der masselosen Dirac-Gleichung

$$\mathrm{i}\,\hat{\partial}\nu(x) = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$P_+\nu(x) = \frac{1+\gamma_5}{2}\nu(x) = 0\,. \tag{9.16}$$

Der zu ihm konjugierte Spinor $\bar{\nu} = \overset{*}{\nu}\gamma^0$ erfüllt die konjugierte Gleichung

$$\mathrm{i}\,\partial_\mu\bar{\nu}(x)\,\gamma^\mu = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$\bar{\nu}(x)\,P_- = \bar{\nu}(x)\frac{1-\gamma_5}{2} = 0\,.$$

Die Lagrange-Dichte des quantisierten freien Neutrinofeldes erhält damit die Form

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}:\!\left(\bar{\nu}(x)\,\gamma^\mu\nu_{,\mu}(x) - \bar{\nu}_{,\mu}(x)\,\gamma^\mu\nu(x)\right)\!:\,. \tag{9.17}$$

Die Ausdrücke für den Energie-Impuls-Tensor und den Spindrehimpulstensor in der Koordinatendarstellung ergeben sich aus den Gleichungen (9.7) und (9.8) durch bloßes Ersetzen von $\psi(x)$ durch $\nu(x)$; zur Formel für P^μ in der Impulsdarstellung gelangt man durch Weglassen der Summation über den Spinorindex in (9.10)

$$P^\mu = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\;p^\mu\left(\overset{*}{a}{}^+(\boldsymbol{p})\,a^-(\boldsymbol{p}) + a^+(\boldsymbol{p})\,\overset{*}{a}{}^-(\boldsymbol{p})\right)\,. \tag{9.18}$$

Den Ausdruck für den Spin des Neutrinofeldes wollen wir jedoch nochmals unabhängig herleiten. Dabei gehen wir von der Beziehung (5.25) für die Dichte des Spinvektors

$$(1/2)\;:\!\left(\overset{*}{a}{}^+(\boldsymbol{p})\,a^-(\boldsymbol{p})\,\overset{*}{v}{}^+(\boldsymbol{p})\,\sigma_3 v^-(\boldsymbol{p}) + \overset{*}{a}{}^-(\boldsymbol{p})\,a^+(\boldsymbol{p})\,\overset{*}{v}{}^-(\boldsymbol{p})\,\sigma_3 v^+(\boldsymbol{p})\right)\!: \tag{9.19}$$

aus, die für das Bezugssystem mit $p_1 = p_2 = 0$ richtig ist, d. h. falls die Achse x_3 in Richtung des Impulses weist. In diesem System kann man die normierten Spinoren, die den Gleichungen

$$\hat{p}v^\pm(\boldsymbol{p}) = \overset{*}{v}{}^\pm(\boldsymbol{p})\,\hat{p} = 0\,,$$

und den Nebenbedingungen

$$(1+\gamma^5)\,v^\pm(\boldsymbol{p}) = \overset{*}{v}{}^\pm(\boldsymbol{p})\,(1+\gamma^5) = 0$$

genügen, in folgender Gestalt wählen (wir benutzen dabei die Standarddarstellung der Dirac-Matrizen):

$$v^\pm(\boldsymbol{p}) = 2^{-1/2}\begin{pmatrix}\omega(\boldsymbol{p})\\ \omega(\boldsymbol{p})\end{pmatrix} \equiv v(\boldsymbol{p})\,, \qquad \overset{*}{v}(\boldsymbol{p}) = 2^{-1/2}\left(\overset{*}{\omega}(\boldsymbol{p}),\,\overset{*}{\omega}(\boldsymbol{p})\right)\,.$$

Hierbei sind die $\omega(\boldsymbol{p})$ 2-komponentige Spinoren, die die Weyl-Gleichung (9.15) erfüllen,

$$(p_0 + \sigma_3 p_3)\,\omega(\boldsymbol{p}) = 0$$

und folgendes Aussehen haben:

$$\omega(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß für das masselose Neutrino $p_0 = p_3$ gilt. Es ist auch klar, daß

$$\overset{*}{\omega}(\boldsymbol{p}) = (0, 1)$$

ist, weshalb

$$\overset{*}{v}{}^{\pm}(\boldsymbol{p})\, \sigma_3 v^{\mp}(\boldsymbol{p}) = -1$$

gilt.

Setzt man nun dieses Ergebnis in (9.19) ein, erhält man

$$\Delta S_{\parallel} \sim -\tfrac{1}{2}\, \overset{*}{a}{}^{+}(\boldsymbol{p})\, a^{-}(\boldsymbol{p}) + \tfrac{1}{2}\, a^{+}(\boldsymbol{p})\, \overset{*}{a}{}^{-}(\boldsymbol{p})\,. \tag{9.20}$$

Das erste Glied entspricht dem linkshändigen Neutrino mit negativer Helizität $\lambda = -\frac{1}{2}$ und das zweite dem rechtshändigen Antineutrino mit positiver Helizität $\lambda = +\frac{1}{2}$. Offensichtlich fällt der Ausdruck (9.20) mit (9.12) zusammen, wenn wir dort $a_1 = 0$ und $a_2 = a$ setzen. Betrachtet man nun anstelle des Spinors $\nu = \psi_-$ den Spinor ψ_+, so folgt gerade die Beziehung (9.12) mit $a_2 = 0$ und $a_1 = a$. Diese beschreibt dann Teilchen mit positiver Helizität und deren Antiteilchen mit negativer Helizität.

Es sei noch bemerkt, daß bei der Untersuchung von Prozessen der schwachen Wechselwirkung, an denen ja linkshändige Neutrinos beteiligt sind, manchmal folgende Darstellung der Dirac-Matrizen gewählt wird ($n = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 = \Gamma^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^n = -\Gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ -\sigma_n & 0 \end{pmatrix}, \\ &\Gamma_5 = \Gamma^5 = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3 = \mathrm{i}\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\,. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Hierbei haben wir die blockdiagonale Schreibweise mit 2×2 Matrizen $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{0}$ und den Pauli-Matrizen (siehe Anhang II.) verwendet. In dieser Darstellung sind die Projektionsoperatoren $P_{\pm}$ diagonal, so daß der Spinor mit negativer Helizität eine einfachere Gestalt annimmt:

$$\nu(x) = P_{-}\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist deshalb angebracht, die Darstellung (9.21) als *Helizitäts-Darstellung* der Dirac-Matrizen zu bezeichnen. Mit der Standarddarstellung (A II.5) und (A II.7) ist sie durch die Transformation

$$\Gamma = O^{-1}\gamma O\,, \qquad O = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

verbunden.

9.3. Die Ladungskonjugation

Man kann sich mit Hilfe der Formeln der Vorlesung 2. leicht davon überzeugen, daß im Fall eines komplexen, geladene Teilchen beschreibenden Feldes mit ganz-

zahligem Spin, die folgende Transformation

$$\begin{aligned} \varphi_a(x) &\to \varphi_a'(x) = \overset{*}{\varphi}_a(x)\,, \\ \overset{*}{\varphi}_a(x) &\to \overset{*}{\varphi}{}_a'(x) = \varphi_a(x)\,, \end{aligned} \tag{9.22}$$

die Ausdrücke für alle dynamischen Größen, außer der Stromdichte und der Ladung (bei denen sich das Vorzeichen ändert), invariant läßt. Deshalb wird diese Transformation als *Ladungskonjugation* bezeichnet.

Die Ladungskonjugation für das Spinorfeld ist wegen seines Matrizencharakters, d. h. wegen des Auftretens mehrkomponentiger Spinorwellenfunktionen, komplizierter als (9.22); sie ist eine Matrix-Transformation der Form

$$\psi'(x) = C\bar{\psi}(x)^{\mathrm{T}}\,, \qquad \bar{\psi}' = \psi^{\mathrm{T}}\overset{\mathrm{T}}{C}{}^{-1} = (C^{-1}\psi)^{\mathrm{T}}\,. \tag{9.23}$$

Damit diese Gleichungen miteinander vereinbar sind, muß

$$C\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_0\overset{*}{C}\gamma_0 = 1 \tag{9.24}$$

gelten. Die zu (9.23) inverse Transformation ist

$$\psi(x) = C\bar{\psi}'(x)^{\mathrm{T}}\,, \qquad \bar{\psi} = \psi'^{\mathrm{T}}\overset{\mathrm{T}}{C}{}^{-1} = (C^{-1}\psi')^{\mathrm{T}}\,.$$

Hieraus sehen wir, daß die vermöge (9.23) definierte Ladungskonjugation außer der trivialen Eigenschaft, nach zweimaliger Transformation auf die Identität zu führen, auch noch über Spiegelsymmetrie verfügt, d. h., sie stimmt der Form nach mit ihrer inversen Transformation überein.

Die explizite Gestalt der Matrizen C bestimmen wir aus der Forderung, daß die Lagrange-Dichte des freien Feldes, und damit auch der Energie-Impuls-Vektor, seine Form beibehält und der Stromdichtevektor sein Vorzeichen ändert, d. h., es sollen folgende Beziehungen gelten:

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}(\psi')\,, \qquad T(\psi) = T(\psi')\,, \qquad J_\nu(\psi) = -J_\nu(\psi')\,.$$

Dazu erweist es sich als hinreichend, daß die beiden Relationen

$$:\bar{\psi}_1(x)\,\gamma^\nu\psi_2(x): \;=\; -:\bar{\psi}_2'(x)\,\gamma_\nu\psi_1'(x): \tag{9.25}$$

und

$$:\bar{\psi}(x)\,\psi(x): \;=\; :\bar{\psi}'(x)\,\psi'(x): \tag{9.26}$$

erfüllt sind (siehe Aufgabe B 17), wobei ψ_1 und ψ_2 entweder mit ψ oder aber dessen Ableitung $\partial_\mu\psi$ zu identifizieren sind, und sich gemäß (9.23) transformieren.

Wir betrachten nun die Bedingungen, die den Matrizen C auf Grund der Festlegungen (9.25) und (9.26) auferlegt werden. Setzen wir (9.23) in (9.25) ein, so erhalten wir

$$:\bar{\psi}_1(x)\,\gamma_\nu\psi_2(x): \;=\; :\overset{\mathrm{T}}{\psi}{}_1'(x)\,\overset{\mathrm{T}}{C}{}^{-1}\gamma_\nu C\overset{\mathrm{T}}{\bar{\psi}}{}_2'(x):\,.$$

Unter Berücksichtigung der Antikommutativität der quantisierten Spinoren ψ' und $\bar{\psi}'$ wird daraus

$$:\bar{\psi}_1\gamma_\nu\psi_2: \;=\; -\;:\bar{\psi}_2'\overset{\mathrm{T}}{C}\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\nu C^{-1}\psi_1':\,.$$

Der Vergleich mit (9.25) führt auf die erste Bedingung für die Matrix C,

$$\overset{\mathrm{T}}{C}\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\nu C^{-1} = \gamma_\nu\,,$$

oder, in transponierter Form,

$$\overset{\mathrm{T}}{C}{}^{-1}\gamma_\nu C = \overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\nu\,. \tag{9.27}$$

Auf analoge Weise gelangt man durch Einsetzen von (9.23) in (9.26) zu

$$:\bar{\psi}\psi: \;=\; :\overset{\mathrm{T}}{\psi}{}'\overset{\mathrm{T}}{C}{}^{-1}C\overset{\mathrm{T}}{\bar{\psi}}{}': \;=\; -\; :\bar{\psi}'\overset{\mathrm{T}}{C}C^{-1}\psi':\,,$$

d. h., die zweite Bedingung für die Matrizen C lautet $\overset{\mathrm{T}}{C}C^{-1} = -1$ oder

$$\overset{\mathrm{T}}{C} = -C\,. \tag{9.28}$$

Damit können wir (9.27) in der Form

$$C^{-1}\gamma^\nu C = -\overset{\mathrm{T}}{\gamma}{}^\nu \tag{9.29}$$

schreiben. Wie sich leicht zeigen läßt (siehe Aufgabe B 17), folgt aus den Bedingungen (9.28), (9.29) und (9.24) die Unitarität der Matrix der Ladungskonjugation:

$$C\overset{+}{C} = 1\,. \tag{9.30}$$

Die Formeln (9.29) und (9.30) ermöglichen es nun, die explizite Form der Matrix C in einer beliebigen Darstellung der Dirac-Matrizen zu bestimmen. Wir schlagen dem Leser vor, sich selbständig davon zu überzeugen, daß sowohl in der Standarddarstellung (A II.5) als auch in der Helizitäts-Darstellung (9.21) die Matrix C durch das Produkt aus der „nullten" und der „zweiten" Dirac-Matrix gegeben ist, d. h.

$$C_{\text{Standard}} = \gamma^0\gamma^2 = \alpha_2\,, \qquad C_{\text{Hel}} = \Gamma^0\Gamma^2\,.$$

In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß man allgemein im Fall des Übergangs von einer Darstellung γ der Dirac-Matrizen zu irgendeiner anderen Darstellung $\tilde{\gamma}$,

$$\gamma^\nu = O\tilde{\gamma}^\nu O^{-1}\,,$$

die neue Matrix der Ladungskonjugation $\tilde{C}$ über die Formel

$$C = O\tilde{C}\overset{\mathrm{T}}{O}$$

erhält, wobei $\overset{\mathrm{T}}{O}$ die bezüglich O transponierte Matrix ist.

Der physikalische Sinn der Ladungskonjugation besteht im Ersetzen der Teilchen durch deren Antiteilchen. Die Invarianz einer Theorie gegenüber der Ladungskonjugation C, welche z. B. im Fall der starken und elektromagnetischen Wechselwirkungen vorliegt, führt daher zu folgender allgemeiner Aussage: Wenn irgendein physikalischer Prozeß Π, der sich z. B. aus einer beliebigen Überlagerung starker und elektromagnetischer Wechselwirkungen ergibt, mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit W abläuft, dann läuft der Prozeß $C\Pi$, der daraus durch Ersetzen aller Teilchen durch deren Antiteilchen hervorgeht, mit derselben Wahrscheinlichkeit W ab.

9.4. Das *CPT*-Theorem

Die Untersuchung der quantisierten freien Felder wollen wir nicht abschließen, ohne auf eine der wichtigsten Aussagen der lokalen Feldtheorie, das sogenannte *CPT*-Theorem, hingewiesen zu haben. Dieses Theorem formuliert die Invarianz

eigenschaften einer Theorie bezüglich der folgenden drei diskreten Transformationen: der Ladungskonjugation C, der räumlichen Spiegelung P und der Zeitumkehr T. Die beiden erstgenannten Operationen kennen wir bereits genauer; die Ladungskonjugation C haben wir soeben betrachtet, und mit der Parität P, der Spiegelung aller drei räumlichen Koordinatenachsen, befaßten wir uns in Vorlesung 1. (siehe auch Anhang II.). Die dritte Operation T, die Umkehr der Zeitrichtung, hat folgendes Aussehen:

$$x \to x' : x_0' = -x_0 , \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} .$$

Im Unterschied zu den stetigen, zur Poincarè-Gruppe gehörenden Transformationen entsprechen die Operationen P und T keiner realen Bewegung eines physikalischen Systems. Sie verknüpfen jedoch, wie auch die Operation C, verschiedene physikalische Prozesse miteinander. Darauf werden wir am Ende dieses Abschnitts näher eingehen; zuvor wollen wir die Transformationen mehr von ihrer formalen Seite her untersuchen.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir das komplexe skalare Feld, das durch die Operatoren

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x) , \qquad \overset{*}{\varphi}(x) = \overset{*}{\varphi}{}^+(x) + \overset{*}{\varphi}{}^-(x)$$

beschrieben wird. Die Operationen P und T ändern das Vorzeichen des Arguments in der Koordinatendarstellung in folgender Weise:

$$PT\varphi^\pm(x) = PT\varphi^\pm(x_0, \boldsymbol{x}) = P\varphi^\pm(-x_0, \boldsymbol{x}) = \varphi^\pm(-x_0, -\boldsymbol{x}) = \varphi^\pm(-x) ,$$

wohingegen die Operation C die Teilchen in Antiteilchen verwandelt

$$C\varphi^\pm(x) = \overset{*}{\varphi}{}^\pm(x) , \qquad C\overset{*}{\varphi}{}^\pm(x) = \varphi^\pm(x) .$$

Deshalb haben wir

$$CPT\varphi^\pm(x) = \overset{*}{\varphi}{}^\pm(-x) , \qquad CPT\overset{*}{\varphi}{}^\pm(x) = \varphi^\pm(-x) .$$

Auf die gleiche Weise, wie zu den Transformationen der Lorentz-Gruppe L unitäre Operatoren U_L korrespondieren, die die Feldoperatoren und die Zustandsvektoren transformieren (siehe beispielsweise (6.25)), entsprechen im Quantenfall auch den Transformationen C, P, T bestimmte Operatoren U_C, U_P, U_T. Für das komplexe skalare Feld gilt z. B.

$$\varphi_C(x) = U_C^{-1}\varphi(x)\, U_C = \eta_\varphi(C)\, \overset{*}{\varphi}(x) ,$$

$$\varphi_P(x) = U_P^{-1}\varphi(x)\, U_P = \eta_\varphi(P)\, \varphi(x^0, -\boldsymbol{x})$$

und

$$\varphi_T(x) = U_T^{-1}\varphi(x)\, U_T = \eta_\varphi(T)\, \varphi(-x^0, \boldsymbol{x}) ,$$

wobei die η bestimmte, vom gegebenen Feld und der jeweiligen Transformation abhängige Vorzeichenfaktoren sind ($\eta^2 = 1$). Der Operator U_T ist jedoch ein *antiunitärer* Operator, d. h., er genügt der definierenden Gleichung

$$(\overset{*}{U}_T\varphi_2)\,(U_T\varphi_1) = \overset{*}{\varphi}_1\varphi_2$$

mit

$$\overset{*}{U}_T U_T = 1 ;$$

daraus folgt z. B.

$$U_T^{-1}\varphi_1\varphi_2 U_T = U_T^{-1}\varphi_2 U_T U_T^{-1}\varphi_1 U_T .$$

Das *CPT-Theorem* behauptet nun[1]), daß eine lokale, nach den „üblichen Regeln" konstruierte Lagrange-Dichte eines Systems von Quantenfeldern gegenüber der gleichzeitigen Anwendung aller drei Operationen invariant ist

$$\mathcal{L}_{CPT}(x') = U_C^{-1} U_P^{-1} U_T^{-1} \mathcal{L}(x')\, U_T U_P U_C = \mathcal{L}(x)\,, \qquad x' = -x\,.$$

Diese „üblichen Regeln" umfassen die Quantisierungsvorschriften für die Felder in Übereinstimmung mit dem Pauli-Prinzip und die Wahl der Kopplungskonstanten entsprechend der Bedingung der Hermitezität der Lagrange-Dichte.

Wir diskutieren nun die physikalischen Folgen des CPT-Theorems. Die Operation C substituiert die Teilchen durch deren Antiteilchen, und natürlich auch die Antiteilchen durch deren zugeordnete Teilchen; die Operation P ändert alle Richtungen im 3-dimensionalen Raum, d. h., sie transformiert alle räumlichen Vektoren (Impulse, Komponenten des elektrischen Feldes u. ä.) in die entgegengesetzt gerichteten Vektoren. Die Operation T transformiert die Anfangszustände in Endzustände und umgekehrt; es ändern sich dabei auch die Richtungen der Impulse und Spins. Unter Beachtung dessen folgt aus dem CPT-Theorem, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten für einen Prozeß Π und den vermöge $CPT\Pi$ zugeordneten Prozeß übereinstimmen; dabei entsteht der Prozeß $CPT\Pi$ aus Π durch die Substitution Teilchen $\leftrightarrow$ Antiteilchen, Umkehren aller Spins und Vertauschung von Anfangs- und Endzuständen. Speziell folgt aus dem CPT-Theorem die Gleichheit der Massen und mittleren Lebensdauern sowie das entgegengesetzte Vorzeichen (bei gleichem Betrag) der magnetischen Momente von Teilchen und Antiteilchen.

---

[1]) Eine genauere Formulierung im Rahmen der modernen axiomatischen Feldtheorie findet der Leser in [7] Kapitel 5.

Wechselwirkende Felder

10. Die Wechselwirkung von Feldern

10.1. Die Wechselwirkung von Teilchen

Die wichtigste Eigenschaft der Elementarteilchen ist ihre Fähigkeit, miteinander in Wechselwirkung zu treten und sich ineinander umwandeln zu können. Nach heutigen Vorstellungen wird die Vielfalt der verschiedenen Arten und Formen von Wechselwirkungen der Materie auf vier *elementare* (oder *fundamentale*) *Wechselwirkungstypen* der Elementarteilchen zurückgeführt. Das sind

1. die Gravitation,
2. die elektromagnetische Wechselwirkung
3. die schwache Wechselwirkung,
4. die starke Wechselwirkung.

Die Gravitationswechselwirkung ist universell, d. h., sie ist allen Materieformen und Elementarteilchen eigen. Im Unterschied dazu sind an der elektromagnetischen Wechselwirkung nur elektrisch geladene Teilchen unmittelbar beteiligt. Sowohl die Gravitation, als auch die elektromagnetische Wechselwirkung sind *langreichweitig*: Ihre Stärke nimmt für große Abstände langsam ($\sim r^{-1}$) ab. Deshalb spielen diese Wechselwirkungen die dominierende Rolle in der Makrophysik. Gleichzeitig ist, wie schon in Vorlesung 1. bemerkt wurde, in der Mikrowelt die Gravitationswechselwirkung wesentlich schwächer als die elektromagnetische. Aus diesem Grunde werden wir Gravitationseffekte nicht berücksichtigen.

Wir betrachten zunächst die *elektromagnetische Wechselwirkung*. Es ist bekannt, daß die Coulomb-Wechselwirkung zweier geladener Teilchen, obwohl sie phänomenologisch gesehen eine Fernwirkung ("action in distance") ist, aus der Wechselwirkung dieser Teilchen mit dem vom jeweils anderen Teilchen erzeugten elektromagnetischen Feld resultiert. Durch die Quantisierung wird das elektromagnetische Feld durch seine Quanten, die Photonen oder γ-Quanten, beschrieben. Der *elementare Akt* einer Wechselwirkung des geladenen Teilchens Q mit dem elektromagnetischen Feld besteht dann in der Emission bzw. Absorption eines γ-Quants durch dieses Teilchen

$$Q \to Q + \gamma \quad \text{oder} \quad Q + \gamma \to Q\,. \tag{10.1}$$

Wir wollen solche umkehrbaren Prozesse mit einem Doppelpfeil versehen bzw. durch das folgende Diagramm darstellen:

$Q \longleftrightarrow Q + \gamma$, · [Diagramm: Q ——< Q, γ] . (10.2)

In diesem Diagramm entsprechen die durchlaufenden geraden Linien den geladenen Teilchen Q und die Wellenlinie dem γ-Quant. Mit Hilfe dieser Symbolik wird die

Coulomb-Wechselwirkung zweier Teilchen Q_1 und Q_2

$$Q_1 + Q_2 \longrightarrow Q_1 + Q_2 , \tag{10.3}$$

durch den Austausch eines γ-Quants zwischen den geladenen Teilchen beschrieben. Dabei läuft die Zeit in allen Diagrammen in horizontaler Richtung von links nach rechts. Ein Diagramm, das die Vernichtung oder Erzeugung eines Teilchen-Antiteilchen-Paares darstellt, hat dann folgendes Aussehen:

$$Q + \bar{Q} \longleftrightarrow \gamma , \tag{10.4}$$

Im Vergleich zu (10.2) erscheinen jetzt zwei Teilchen auf der linken Seite des Diagramms. Bei einem solchen „Seitenwechsel" muß das Teilchen Q durch sein Antiteilchen $\overline{Q}$ ersetzt werden.

Wenn wir nun das Diagramm (10.3) im Uhrzeigersinn um 90° drehen, so erhalten wir das folgende Diagramm:

$$Q_2 + \bar{Q}_2 \longleftrightarrow Q_1 + \bar{Q}_1 , \tag{10.5}$$

Es beschreibt die Umwandlung des Paares $(Q_2, \overline{Q}_2)$ in das Paar $(Q_1, \overline{Q}_1)$ über einen Einphotonenaustausch.

Wie wir später sehen werden (siehe Abschnitt 10.3.), entspricht der elementaren elektromagnetischen Wechselwirkung (10.2) und (10.4) der Term

$$\mathcal{L}(x) \sim eA_\mu(x)\, J^\mu_Q(x) \tag{10.6}$$

in der Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes. Hierbei sind A_μ das Potential des Feldes und J^μ_Q die elektromagnetische Stromdichte der Teilchen Q. So gilt z.B. für das Elektron-Positron-Feld

$$\mathcal{L}(x) = eA_\mu(x)\, \bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu \psi(x) \, . \tag{10.7}$$

Ein typisches Beispiel für die *schwache Wechselwirkung* ist der β-Zerfall des Neutrons,

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} \, , \tag{10.8}$$

der sich graphisch in einer sehr „symmetrischen" Weise darstellt

$$n + \nu_e \longleftrightarrow p + e^- \quad \text{oder} \quad n + \bar{p} \longleftrightarrow e^+ + \bar{\nu}_e \tag{10.9}$$

Dies spiegelt zugleich eine allgemeine Eigenschaft der schwachen Wechselwirkung wider: Wegen ihrer kurzen Reichweite können die zugehörigen Elementarprozesse in guter Näherung als lokale 4-Fermion-Wechselwirkung aufgefaßt werden. Als weiteres Beispiel hierzu führen wir den Müonenzerfall ($\mu \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$) an, dem folgendes Diagramm entspricht:

$\mu + \nu_e \longleftrightarrow e^- + \nu_\mu$

oder

$\mu + \bar{\nu}_\mu \longleftrightarrow e^- + \bar{\nu}_e$

μ, e, ν_e, ν_μ . (10.10)

Die schwache Wechselwirkung, die Prozessen der Art (10.9) und (10.10) zugrunde liegt, wird in der Lagrange-Dichte durch eine „Strom $\times$ Strom"-Wechselwirkung

$$\mathcal{L} \sim G J^{\nu}_{W}(x)\, \overset{+}{J}{}^{W}_{\nu}(x) \tag{10.11}$$

beschrieben, wobei

$$J^{W}_{\nu}(x) = \bar{p}(x)\, O_\nu n(x) + \bar{\nu}_e(x)\, O_\nu\, e(x) + \bar{\nu}_\mu(x)\, O_\nu \mu(x) + \dots \tag{10.12}$$

der schwache Strom ist, und die O_ν gewisse Matrizen sind; G ist die Fermi-Kopplungskonstante. In Gl. (10.12) sind die operatorwertigen Feldfunktionen mit dem Symbol der ihnen entsprechenden Teilchen bezeichnet. Die Kopplungskonstante G kann zahlenmäßig durch die universellen Konstanten c, $\hbar$ und das Quadrat einer Masse ausgedrückt werden. Wenn wir hierfür die Nukleonenmasse M wählen, gilt

$$\frac{G}{\hbar c} \cdot \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \cong 1{,}02 \cdot 10^{-5}\,. \tag{10.13}$$

Im System $\hbar = c = 1$ ist die Dimension der Fermi-Konstante von Null verschieden ($[G] = m^{-2}$). Das bedeutet, daß die Stärke der schwachen Wechselwirkung wesentlich von der Energie abhängt. Bei Schwerpunktenergien von ungefähr 1 GeV, d. h. von der Größenordnung der Nukleonenmasse, wird sie durch den in (10.13) angegebenen Zahlenwert beschrieben. Im Energiebereich von 10^2 bis 10^3 GeV wächst sie jedoch bis zu Werten der Ordnung 1, und die Fermi-Wechselwirkung kann nicht mehr als schwach angesehen werden.

Der *starken Wechselwirkung* unterliegt eine große Gruppe von Teilchen, die eine relativ große Masse ($\geqq m_\pi$) haben und als *Hadronen* bezeichnet werden. Diese Wechselwirkung erweist sich als kurzreichweitig

$$F_s \sim \exp\,(-r/r_{\text{Kern}})\,.$$

Sie wirkt deshalb nur in Entfernungen, die in der Größenordnung des Wirkungsradius der Kernkräfte

$$r_{\text{Kern}} \simeq \frac{\hbar}{m_\pi c} \simeq 1{,}4\text{f} = 1{,}4 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}\,, \tag{10.14}$$

und damit der Compton-Wellenlänge des π-Mesons liegen.

Die starke Wechselwirkung ist für die Kernkräfte verantwortlich, die Protonen und Neutronen in den Atomkernen binden. Sie wird stark genannt, weil sie in der Mikrowelt zu quantitativ großen Effekten führt. Bei kleinen Abständen (bei $r < r_{\text{Kern}}$) übersteigt ihre Stärke wesentlich die der elektromagnetischen Wechselwirkung.

Wir machen hier darauf aufmerksam, daß es mehrere Möglichkeiten gibt, die Stärken verschiedener Wechselwirkungstypen miteinander zu vergleichen. Eine davon basiert auf der Gegenüberstellung charakteristischer Bindungsenergien. So kann man die elektromagnetische Wechselwirkung z. B. durch die Bindungsenergie des s-Elektrons im Wasserstoffatom beschreiben: $E_{\mathrm{El}} \cong 10$ eV. Die starke Wechselwirkung dagegen ist für den Zusammenhalt der Nukleonen im Kern verantwortlich; dabei liegt die Bindungsenergie der Nukleonen in der Größenordnung $E_{\mathrm{Kern}} \approx 10 \,\mathrm{MeV} = 10^6 \, E_{\mathrm{El}}$.

Eine zweite Möglichkeit besteht im Vergleich dimensionsloser Größen, die die Stärken der verschiedenen Wechselwirkungen charakterisieren. Die Lagrange-Dichte (10.7) der Wechselwirkung des Dirac-Feldes mit dem elektromagnetischen Feld enthält die Elektronenladung e, die ein Maß für die Stärke der Wechselwirkung ist. Die Coulomb-Wechselwirkung zweier geladener Teilchen verhält sich proportional zu e^2. Sie kann durch eine dimensionslose Größe, die sogenannte *Feinstrukturkonstante*

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137}\,, \tag{10.15}$$

beschrieben werden. Diese Größe (genauer gesagt $\alpha/\pi \simeq 1/430$) tritt in der elektrodynamischen Störungstheorie als Entwicklungsparameter auf. Deshalb ist es angemessen, der elektromagnetischen Wechselwirkung eine Stärke der Größenordnung $10^{-2} \dots 10^{-3}$ zuzusprechen. Gerade in dieser Größenordnung liegt auch die relative Massenaufspaltung innerhalb der Isospin-Multipletts, die man gewöhnlich auf elektromagnetische Effekte zurückführt. So ist z. B.

$$\frac{M_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{p}}}{M_{\mathrm{p}}} \simeq \frac{939{,}57 - 938{,}28}{938{,}28} \simeq 1{,}38 \cdot 10^{-3}\,,$$

$$\frac{m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0}}{m_{\pi^0}} \simeq \frac{139{,}57 - 134{,}96}{136{,}96} \simeq 3{,}4 \cdot 10^{-2}\,.$$

Wenn die Wechselwirkung zwischen Pionen und Nukleonen durch die Yukawa-Kopplung

$$N \longleftrightarrow N+\pi\,, \qquad N \Longrightarrow\!\!<^{\pi}_{N}\,, \tag{10.16}$$

d. h. durch die pseudoskalare Kopplung

$$\mathscr{L}(x) = g\overline{\Psi}(x)\,\gamma^5 \boldsymbol{\tau} \Psi(x)\,\boldsymbol{\pi}(x) \tag{10.17}$$

beschrieben wird, dann ist ihre Stärke durch die Kopplungskonstante g charakterisiert. Der Zahlenwert jener dimensionslosen Größe, die der Feinstrukturkonstante α entspricht, ist

$$\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \simeq 15 \tag{10.18}$$

und damit im Vergleich zu eins nicht klein. Wenn man jedoch entsprechend der modernen Behandlung der starken Wechselwirkung als nichtabelscher Eichfeldtheorie von Quarks und Gluonen (siehe Vorlesung 11. und 33.) ausgeht, dann ist die

Quark-Gluon-Wechselwirkung durch

$$\mathcal{L}_{QCD} = g_s \bar{q}_A^i(x)\, \gamma^\mu B_\mu^{AB}(x)\, q_B^i(x) \qquad (10.17\,\mathrm{a})$$

gegeben, wobei $q_A^i(x)$ das Spinorfeld der Quarks (mit Colour-Index $A = 1, 2, 3$ und Flavour-Index i) und $B^{AB}(x) = B^a(x)\, T_a^{AB}$ das nichtabelsche Eichfeld der Gluonen (mit Colour-Index $a = 1, \dots, 8$ und den Erzeugenden $(T_a)^{AB} = T_a^{AB}$ der Gruppe SU(3) in der fundamentalen Darstellung: siehe A III.) ist. Die hiermit eingeführte dimensionslose Feinstrukturkonstante α_s der Quantenchromodynamik hat für Energien $E^2 \simeq 10\ \mathrm{GeV}^2$ den Zahlenwert

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c} \simeq 0{,}1\,.$$

10.2. Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten

Bei der Untersuchung von gekoppelten Feldern, die die Wechselwirkungen entsprechender Teilchen beschreiben, geht man von der vollständigen Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ des Systems aus. Diese wird gewöhnlich als Summe dargestellt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I;$$

hierbei ist $\mathcal{L}_0$ die „freie" Lagrange-Dichte (d. h. die Summe der Lagrange-Dichten aller in das System eingehenden freien Felder) und $\mathcal{L}_i$ die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte. Beispiele für $\mathcal{L}_I$ wurden bereits in den Formeln (10.7), (10.11) und (10.17) angegeben.

Im folgendem formulieren wir einige allgemeine Eigenschaften solcher Lagrange-Dichten: Erstens sollte $\mathcal{L}_i$ eine lokale, hermitesche und lorentzinvariante Größe sein, die aus den Feldfunktionen der verschiedenen Felder und ihren Ableitungen gebildet ist. Ferner sollte $\mathcal{L}_i$ die Symmetrieeigenschaften und diskreten Erhaltungssätze widerspiegeln, die dem gegebenen Wechselwirkungsmechanismus eigen sind.

Wenn wir uns mit den einfachsten polynomialen (genauer: polylinearen) Formen begnügen, so zeigt sich z. B., daß die Wechselwirkung eines skalaren Feldes φ mit einem Spinorfeld ψ bei Erhaltung der Parität vom Typ „Skalar $\times$ Skalar", d. h. $\bar{\psi}(x)\, \psi(x)\, \varphi(x)$, oder vom Typ „Vektor $\times$ Vektor", d. h. $\bar{\psi}(x)\, \gamma^\nu \psi(x)\, \varphi_{,\nu}(x)$, sein kann. Analog dazu hat die durch Formel (10.17) gegebene, einfachste Wechselwirkung des pseudoskalaren Iso-Vektorfeldes der Pionen $\boldsymbol{\pi}(x)$ mit dem Nukleonenfeld $\bar{\Psi}(x)$ im Ortsraum die Gestalt „Pseudoskalar $\times$ Pseudoskalar" und im Isospin-Raum die Gestalt „Isovektor $\times$ Isovektor". Eine alternative Form, die nach dem Typ („Pseudovektor $\times$ Pseudovektor") $\times$ („Isovektor $\times$ Isovektor") aufgebaut ist, hat folgendes Aussehen:

$$\bar{\Psi}(x)\, \gamma^\nu \gamma^5 \boldsymbol{\tau} \Psi(x)\, \boldsymbol{\pi}_{,\nu}(x)\,. \qquad (10.19)$$

Sie wird pseudovektorielle Variante der Yukawa-Wechselwirkung genannt.

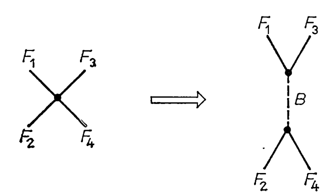
Wir vermerken hier, daß die Isospin-Symmetrie ein wichtiges Beispiel für eine gebrochene Symmetrie ist: Sie gilt nur für die starke Wechselwirkung. Ganz analog liegt Invarianz bezüglich räumlicher Spiegelung nur für die starke und elektromagnetische Wechselwirkung vor, während die schwache Wechselwirkung die räumliche Parität nicht erhält. Dem entspricht, daß der schwache Strom eine Linearkombination eines Vektors und eines Pseudovektors ist.

Andererseits gibt es auch Eigenschaften, die für alle bekannten Wechselwirkungen gelten. Zu ihnen gehören die Erhaltungssätze der elektrischen und der Baryonenladung, wie auch die Lorentz-Invarianz, die als absolut gültig angesehen werden. Aus der Erhaltung der elektrischen Ladung folgt, daß die Lagrange-Dichte bezüglich Phasentransformationen der die geladenen Teilchen beschreibenden, komplex-konjugierten Felder

$$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi\,, \qquad \overset{*}{\varphi} \to e^{-i\alpha}\overset{*}{\varphi}\,, \qquad (\alpha \text{ reell}) \tag{10.20}$$

invariant sein muß. Dies gilt für alle Felder, die elektrisch geladene Teilchen beschreiben. Ähnliche Beschränkungen werden auch durch die Erhaltungssätze von Baryonenladung, Strangeness usw. auferlegt.

Gewöhnlich wird die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte so eingeführt, daß experimentell beobachtbare Prozesse auf möglichst einfache Weise beschrieben werden können. Ein derartiges Vorgehen entbehrt natürlich einer tieferen theoretischen Begründung und kann deshalb zu Fehlern führen. Die intermediären Vektorbosonen, die durch ein (massives) Vektorfeld $B_\mu(x)$ beschrieben werden und die erst 1983 experimentell nachgewiesen werden konnten, gestatten eine „Auflösung" der 4-Fermion-Wechselwirkung (10.11) in Analogie zur Coulomb-Wechselwirkung (10.3). Durch zwei trilineare Wechselwirkungen des Typs $J^\mu_W(x)\,B_\mu(x)$ können die in (10.9) und (10.10) beschriebenen 4-Fermion-Prozesse durch Einführung eines neuen elementaren Wechselwirkungsaktes $F \leftrightarrow F' + B$, der der Photoemission (10.2) entspricht, folgendermaßen dargestellt werden:



Eine wichtige Rolle in der Quantenfeldtheorie spielen *einfache Modelle*. Sie sollen eine geringe Anzahl von Quantenfeldern enthalten, die auf einfache Art miteinander wechselwirken. Im weiteren werden wir häufig das Modell des reellen skalaren Feldes φ mit φ^4-Wechselwirkung betrachten, dessen vollständige Lagrange-Dichte folgendes Aussehen hat:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2(x) - h\varphi^4(x)\,. \tag{10.21}$$

Der letzte Summand, der die Kopplungskonstante h enthält, beschreibt die Wechselwirkung des Feldes mit sich selbst. Das Modell (10.21) wird kurz als *φ^4-Modell* bezeichnet. In der Lagrange-Dichte (10.21) kann das Feld φ sowohl ein Skalar, als auch ein Pseudoskalar sein. Aus diesem Grund ist das φ^4-Modell dem Modell der Pion-Pion-Wechselwirkung mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}(x)\,\partial^\mu\boldsymbol{\varphi}(x) - \frac{m^2}{2}\boldsymbol{\varphi}(x)\,\boldsymbol{\varphi}(x) - h(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi})^2 \tag{10.22}$$

verwandt, wobei φ das in (3.10) eingeführte Isovektorfeld ist. Das Wechselwirkungsglied $h(\varphi\varphi)^2$ beschreibt mehrere Prozesse:

$$\begin{aligned} &\pi^\pm + \pi^\pm \to \pi^\pm + \pi^\pm\,, \\ &\pi^+ + \pi^- \leftrightarrow \pi^0 + \pi^0\,, \\ &\pi^0 + \pi^0 \to \pi^0 + \pi^0\,. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Wir hatten schon bemerkt, daß es keinen ernsthaften Grund dafür gibt, die Wechselwirkung (10.22) als fundamental anzusehen. So erweisen sich z.B. im Quark-Gluon-Modell der starken Wechselwirkung (siehe Vorlesung 33.) die Pion-Pion-Wechselwirkungen (10.23), wie auch die Pion-Nukleon-Wechselwirkungen (10.16) und (10.17) als Folge einer fundamentaleren Quark-Gluon-Wechselwirkung. Trotz beachtlicher Erfolge sind jedoch wesentliche Probleme des Quark-Modells der Hadronen bisher noch ungelöst.

Ungeachtet der im allgemeinen noch unbefriedigenden Kenntnisse von der Wechselwirkung der Materie und ihrer Beschreibung durch die Feldtheorie gibt es jedoch im Falle der elektromagnetischen Wechselwirkung recht tiefgreifende Überlegungen, die es gestatten, deren Struktur grundsätzlich aufzuklären. Der Darlegung dieser Prinzipien, die sehr weitreichende Konsequenzen haben, wenden wir uns nun zu.

10.3. Das elektromagnetische Feld als Eichfeld

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die eigenartige Stellung des elektromagnetischen Feldes. Es ist gegenüber allen anderen Feldern (die wir im weiteren *Materiefelder* nennen werden) in besonderer Weise ausgezeichnet: Während die Felder $u(x)$ elektrisch geladener Teilchen, wie auch die quantenmechanische ψ-Funktion, nicht direkt beobachtbar sind und in die dynamischen physikalischen Größen stets als Bilinearformen von u und $\overset{*}{u}$ eingehen, können die elektromagnetischen Feldstärken direkt gemessen werden. Wegen dieser bilinearen Abhängigkeit sind die Feldfunktionen der Materiefelder nur bis auf einen Phasenfaktor bestimmt. In den Abschnitten 2.5. und 6.5. haben wir diese Unbestimmtheit ausgenutzt, um eine Eichtransformation des Typs (10.20) mit einer koordinatenunabhängigen Phase α einzuführen. Damit war es uns gelungen, einen Ausdruck für den Ladungsoperator zu finden. Wir fordern nun, daß die Theorie auch dann invariant bleibt, wenn der Parameter der Eichtransformation von x abhängt

$$u(x) \to u'(x) = e^{i\alpha(x)}\, u(x),\ \overset{*}{u}(x) \to \overset{*}{u}'(x) = e^{-i\alpha(x)}\, \overset{*}{u}(x)\,. \tag{10.24}$$

Es wird also verlangt, daß die relative Phase $\alpha(x) - \alpha(x')$ in zwei verschiedenen Raum-Zeit-Punkten x und x' vollkommen beliebig ist. Die *lokale Phasentransformation* (10.24) entspricht der Annahme, daß die Wahl des Phasenfaktors der Wellenfunktion eines Materiefeldes lokal erfolgen kann.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Lagrange-Dichten der betrachteten komplexen Felder (siehe z.B. (3.16) und (5.5)) wegen der darin auftretenden Ableitungen gegenüber solchen lokalen Phasentransformationen (10.24) nicht invariant sind: Die Gradienten der Felder erhalten außer dem Phasenfaktor noch einen additiven Zusatz, der proportional zum Gradienten der Funktion $\alpha(x)$ ist. Die Invarianz kann man wieder herstellen, indem man ein zusätzliches Vektor-

feld A_ν einführt, das sich gleichzeitig mit (10.24) gemäß

$$A_\nu(x) \to A'_\nu(x) = A_\nu(x) + f_{,\nu}(x) \tag{10.25}$$

transformiert. Dabei müssen alle Ableitungen $\partial_\nu u$, $\partial_\nu \overset{*}{u}$ in der Lagrange-Dichte durch die von A abhängenden Operatoren

$$\begin{aligned} D_\nu(A)\, u &\equiv \big(\partial_\nu - \mathrm{i}\, eA_\nu(x)\big)\, u(x)\,, \\ \overset{*}{D}_\nu(A)\, \overset{*}{u} &\equiv \big(\partial_\nu + \mathrm{i}\, eA_\nu(x)\big)\, \overset{*}{u}(x) \end{aligned} \tag{10.26}$$

ersetzt werden; man bezeichnet diese modifizierten Ableitungen (10.26) als *kovariante Ableitungen.*

Wenn die Relation $\alpha(x) = ef(x)$ erfüllt ist, dann verhalten sich bei gleichzeitiger Ausführung der Transformationen (10.24) und (10.25) die kovarianten Ableitungen in einer zu (10.24) analogen Weise, d. h., sie ändern lediglich ihre Phase

$$\begin{aligned} D_\nu(A')\, u'(x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}ef(x)}\, D_\nu(A)\, u(x)\,, \\ \overset{*}{D}_\nu(A')\, \overset{*}{u}'(x) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ef(x)}\, \overset{*}{D}_\nu(A)\, \overset{*}{u}(x)\,. \end{aligned} \tag{10.27}$$

Außer den Substitutionen der partiellen Ableitungen durch kovariante muß die Lagrange-Dichte des Materiefeldes noch durch eine Lagrange-Dichte für das freie Feld A_ν ergänzt werden

$$\mathscr{L}(u, \overset{*}{u}, \partial u, \partial \overset{*}{u}) \to \mathscr{L}\big(u, \overset{*}{u}, D(A)\, u, \overset{*}{D}(A)\, \overset{*}{u}\big) + \mathscr{L}_0(A)\,. \tag{10.28}$$

Natürlich muß $\mathscr{L}_0(A)$ seinerseits invariant bezüglich der Transformation (10.25) sein und kann deshalb in der Form (4.12) gewählt werden:

$$\mathscr{L}_0(A) = -\tfrac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \tag{10.29}$$

wobei

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.1}$$

der Feldstärketensor ist. Wir sehen hieraus, daß das Feld A_ν notwendigerweise masselos ist. Die Konstante e, die in (10.26) und (10.27) eingeht, kann mit der elektrischen Ladung und das Vektorfeld A_ν mit dem elektromagnetischen Potential identifiziert werden. Auf diese Weise tritt das elektromagnetische Potential, das durch die kovarianten Ableitungen D und $\overset{*}{D}$ eingeführt wurde, als *kompensierendes Feld* auf. Allgemein werden solche Felder, die die Phasenänderung von Materiefeldern kompensieren, auch *Eichfelder* genannt. Wegen des abelschen (d. h. kommutativen) Charakters der von den Transformationen (10.25) gebildeten Eichgruppe ist das elektromagnetische Feld ein Eichfeld.

Der Übergang von den üblichen partiellen zu kovarianten Ableitungen in der freien Lagrange-Dichte gemäß (10.28) und (10.26) führt zu einer Wechselwirkung zwischen dem Materiefeld u und dem elektromagnetischen Feld A. Diese Wechselwirkung, die durch die Ankopplung von A vermöge der kovarianten Ableitung entsteht, wird auch *minimale elektromagnetische Wechselwirkung* genannt. Im Falle der Spinorfelder, für die $\mathscr{L}_0(u, \overset{*}{u})$ in den Ableitungen linear ist, erweist sich die minimale elektromagnetische Wechselwirkung ebenfalls als linear bezüglich des Feldes A und hat die Form (10.7). Diese *spinorielle Elektrodynamik,* deren Prototyp die Wechselwirkung des Elektron-Positron-Feldes mit dem Maxwell-Feld ist, werden wir im folgenden zumeist behandeln und stets kurz als (Quanten-) Elektrodynamik bezeichnen.

Für Felder mit ganzzahligem Spin führt die minimale Wechselwirkung auch auf quadratische Glieder in den Potentialen A_ν; so hat z.B. die Lagrange-Dichte des komplexen skalaren Feldes die folgende Gestalt:

$$\mathcal{L}_I(x) = ie[\overset{*}{u}(x)\, u_{,\nu}(x) - \overset{*}{u}_{,\nu}(x)\, u(x)]\, A^\nu(x) + e^2\overset{*}{u}(x)\, u(x)\, A^\nu(x)\, A_\nu(x)\,. \tag{10.30}$$

Wir haben uns nunmehr davon überzeugt, daß die Einführung des elektromagnetischen Feldes die Invarianz der vollständigen Lagrange-Dichte bezüglich lokaler Phasentransformationen sichert. Diese sind eine Verallgemeinerung der „globalen" Phasentransformationen, die zur Erhaltung der elektrischen Ladung führen. Ein solcher Standpunkt stellt zugleich eine Verknüpfung zwischen den raum-zeitlichen Eigenschaften der Felder und den sogenannten inneren Symmetrien her. Als wichtigstes Beispiel einer inneren Symmetrie, die die Ladungssymmetrie unmittelbar verallgemeinert, ist die Isospin-Symmetrie anzuführen. Die Forderung nach Invarianz bezüglich lokaler (nichtabelscher) „Phasentransformationen" im Isospinraum macht es jedoch notwendig, ein neues kompensierendes Vektorfeld, das Yang-Mills-Feld, einzuführen.

11. Nichtabelsche Eichfelder

11.1. Das Yang-Mills-Feld

Die Forderung nach lokaler Invarianz der Lagrange-Dichte gegenüber den Transformationen einer stetigen Symmetriegruppe führt stets zum Auftreten eines entsprechenden kompensierenden Vektorfeldes. Ein solches Feld wurde für die nichtabelsche Gruppe der Isospin-Transformationen zum ersten Mal 1953 von Yang und Mills eingeführt, weshalb die nichtabelschen Eichfelder auch *Yang-Mills-Felder* genannt werden. In der modernen Elementarteilchentheorie finden die sogenannten speziellen unitären Gruppen SU(N) breite Anwendung: In der einheitlichen Theorie der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung (siehe Vorlesung 32.) ist dies die Gruppe SU(2), und in der Quantenchromodynamik (siehe Vorlesung 33.) die Gruppe SU(3) (Bezeichnungen und Begriffe der Theorie stetiger Gruppen werden im Anhang A III. erläutert).

Wir nehmen an, daß die aus R Komponenten bestehende Feldfunktion φ_A ($A = 1, \dots, R$) sich gemäß einer irreduziblen R-dimensionalen Darstellung der Eichgruppe G transformiert. Die infinitesimale Transformation

$$\varphi_A \to \varphi_A' = \varphi_A + ig\alpha_a(T_a)_{AB}\, \varphi_B \qquad (a = 1, \dots, K) \tag{11.1}$$

enthält K unabhängige reelle, unendlich kleine Parameter α_a, aus denen der Einfachheit halber ein gemeinsamer endlicher Faktor g herausgezogen wurde. Die Zahl K heißt die Dimension der Gruppe G. Im Falle der einparametrigen Gruppe U(1) der lokalen Phasentransformationen (10.24) ist sie gleich 1, während die Gruppe SU(N) die Dimension $K = N^2 - 1$ hat. Den hermiteschen Erzeugenden T_a stetiger Transformationen (11.1) entsprechen Matrizen derjenigen Darstellung, zu der die Felder φ_A gehören. Im Falle der einfachsten nichtabelschen Gruppe SU(2) sind die Erzeugenden für das Dublett ($R = N = 2$) den Pauli-Matrizen

proportional $T_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ $(a = 1, \dots, 3)$ (vgl. (A I.5)), und für das Triplett ($R = K = 3$) können sie durch den vollständig antisymmetrischen Einheitstensor dritten Ranges gemäß

$$(T_a)_{bc} = -\mathrm{i}\varepsilon_{abc} \qquad (a, b, c = 1, \dots, 3) \tag{11.2a}$$

ausgedrückt werden (vgl. A I.13).

In der fundamentalen Darstellung der Gruppe SU(3), die die Dimension $R = N = 3$ hat, werden die Erzeugenden durch die sogenannten Gell-Mann-Matrizen λ_a $(a = 1, \dots, 8)$ gemäß $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ ausgedrückt, während sie in der adjungierten Darstellung, die die Dimension $R = K = 8$ hat, durch einen vollständig antisymmetrischen Tensor dritten Ranges f_{abc} im 8-dimensionalen Raum gemäß

$$(T_a)_{bc} = -2\mathrm{i}f_{abc} \qquad (a, b, c = 1, \dots, 8) \tag{11.2b}$$

gegeben sind (siehe z. B. [14], § II.2.1.).

Wir weisen noch darauf hin, daß die Kommutatoren der Erzeugenden T_a in einer *beliebigen* Darstellung die folgende allgemeine Form haben:

$$[T_a, T_b] = -(t_c)_{ab}\, T_c\,, \tag{11.3}$$

wobei die Strukturkonstanten $c^c_{ab} = -(t_c)_{ab}$ mit den Matrixelementen der Erzeugenden in der adjungierten Darstellung $T_c \equiv t_c$ gemäß (11.2) verknüpft sind, d. h. $(t_c)_{ab} = -\mathrm{i}\varepsilon_{abc}$ im Fall der Gruppe SU(2) und $(t_c)_{ab} = -2\mathrm{i}f_{abc}$ für die Gruppe SU(3). Die Formel (11.1) mit den koordinatenunabhängigen Parametern α_a beschreibt (ähnlich der Formel (2.27)) eine globale Eichtransformation. Der Übergang zu lokalen Eichtransformationen des Typs (10.24) erfolgt durch Einführung beliebiger, x-abhängiger Funktionen anstelle der Parameter α_a:

$$\alpha_a \to \alpha_a(x)\,;$$

darüber hinaus ersetzen wir in Analogie zur Elektrodynamik die partiellen Ableitungen von φ durch deren kovariante Ableitungen

$$\partial_\nu\varphi_A \to \big(D_\nu(B)\,\varphi\big)_A = \partial_\nu\varphi_A - \mathrm{i}gB^a_\nu(x)\,(T_a)_{AB}\,\varphi_B\,, \tag{11.4}$$

die ein neues kompensierendes Vektorfeld B_ν enthalten. Dieses Feld hat im Unterschied zum elektromagnetischen Feld A_ν (obere) Gruppenindizes, und es transformiert sich im Falle infinitesimaler Eichtransformationen gemäß

$$B^a_\nu \to (B^a_\nu)' = B^a_\nu + \mathrm{i}g\alpha_b(x)\,t_{bac}B^c_\nu + \partial_\nu\alpha_a(x)\,. \tag{11.5}$$

Dieses Transformationsgesetz enthält neben dem Gradiententerm noch eine Drehung im Darstellungsraum. Die Erzeugenden $T_a = t_a$ dieser Drehung sind gerade die Matrizen der adjungierten Darstellung.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die vorhandene Eichfreiheit hier, wie auch in der Elektrodynamik (vgl. Abschnitt 4.3.), dazu führt, daß den vier Komponenten des Vektorpotentials B_ν lediglich zwei physikalische Freiheitsgrade entsprechen, und zwar sind dies wiederum die transversalen Feldkomponenten. Mit Hilfe der Kommutatorrelation (11.3) kann jetzt gezeigt werden, daß sich die kovariante Ableitung $D_\nu\varphi$ bei Eichtransformationen (11.1) und (11.5) ähnlich wie φ selbst transformiert

$$[D_\nu(B')\,\varphi']_A = [D_\nu(B)\,\varphi]_A + \mathrm{i}g\alpha_a(x)\,(T^a)_{AB}\,[D_\nu(B)\,\varphi]_B\,. \tag{11.6}$$

Das Analogon des elektromagnetischen Feldstärketensors im Fall nichtabelscher Eichgruppen ist der folgende Tensor

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu + \mathrm{i}gt_{abc}B^b_\mu B^c_\nu\,. \tag{11.7}$$

Für die Gruppe SU(2) kann er mit Hilfe von (11.2) auch in vektorieller Form

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{B}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{B}_\mu + g[\boldsymbol{B}_\mu \times \boldsymbol{B}_\nu] \tag{11.8}$$

geschrieben werden. Allgemein gilt, daß sich F gemäß der adjungierten Darstellung der Eichgruppe transformiert

$$F^a_{\mu\nu} \to (F^a_{\mu\nu})' = F^a_{\mu\nu} + ig\alpha_c(x)\,(t_c)_{ab}\,F^b_{\mu\nu}(x)\,. \tag{11.9}$$

Die direkte Verallgemeinerung der Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes auf den Fall nichtabelscher Eichfelder ergibt für die Lagrange-Dichte des reinen Yang-Mills-Feldes den Ausdruck

$$\mathcal{L}_{YM}(B) = -\tfrac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}\,. \tag{11.10}$$

Im Unterschied zur Lagrange-Dichte (10.29), in der jeder der Faktoren $F_{\mu\nu}$ eichinvariant ist, trifft dies jetzt nur für den Ausdruck (11.10) als Ganzes zu.

Wie im Fall der Elektrodynamik ist die Lagrange-Dichte (11.10) entartet und muß zum Zwecke der Quantisierung noch modifiziert werden. Die aus (11.10) folgenden Bewegungsgleichungen

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + igt^{abc} B^{b\mu} F^c_{\mu\nu} = 0 \tag{11.11}$$

sind nichtlinear und enthalten eine „Selbstwechselwirkung" des B-Feldes. Wenn wir daher versuchten, das Yang-Mills-Feld mittels der Gupta-Bleuler-Methode zu quantisieren, wobei die Lagrange-Dichte zuvor nach folgender Vorschrift zu verändern wäre,

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \frac{a}{2}(\partial B)^2\,,$$

so würden die longitudinalen Funktionen $\chi^a(x) = \partial B^a(x)$ nicht der freien d'Alembert-Gleichung, sondern der nichtlinearen Gleichung

$$\Box\,\chi^a(x) + igt^{abc} B^b_\nu(x)\,\partial^\nu \chi^c(x) = 0 \tag{11.12}$$

genügen.

Infolgedessen entkoppelt der longitudinale Freiheitsgrad nicht vom transversalen. Daraus folgt, daß im Prozeß der zeitlichen Entwicklung die „physikalischen Zustände", die (im Mittel) der Lorentz-Bedingung $\langle \chi^c \rangle = 0$ genügen, in Zustände übergehen können, deren longitudinaler Bestandteil ungleich Null ist. Deshalb muß die Gupta-Bleuler-Methode verallgemeinert werden; dies wird im Abschnitt 19.4. dargestellt.

11.2. Die Eichwechselwirkung der Felder

Wie im Abschnitt 10.3. gezeigt wurde, führt die Forderung der Eichinvarianz der Lagrange-Dichte von Materiefeldern gegenüber lokalen Phasentransformationen zur Einführung des kompensierenden elektromagnetischen Feldes A_μ. Darüber hinaus erfolgt die Kopplung *aller* elektrisch geladener Materiefelder an das Feld A_μ vermöge einer einzigen Konstante e. Die Transformation (10.24) entspricht der abelschen Gruppe U(1).

Auch in den komplizierteren Fällen, wo als Eichgruppe eine einfache, nichtabelsche Gruppe G auftritt, führt die Forderung nach lokaler Invarianz der Lagrange-Dichte über die Konstante g zu einer universellen Kopplung aller

Materiefelder an das Eichfeld B_ν. Sofern also die Materiefelder die mit der entsprechenden Eichgruppe verknüpften Eigenschaften aufweisen, wechselwirken sie unabhängig von etwaigen anderen Charakteristika (z.B. verschiedenen Spins) mit dem Feld B_ν auf eine universelle Weise. Die Wechselwirkungsterme, die beim Übergang zu kovarianten Ableitungen der Materiefelder nach der Regel (11.4) entstehen, enthalten dieselbe dimensionslose Kopplungskonstante g wie auch die von den Yang-Mills-Potentialen B_ν nichtlinear abhängenden Feldstärketensoren $F_{\mu\nu}$ (siehe (11.7) bzw. (11.8)).

Eine Eichtheorie wechselwirkender Felder kann in folgenden Etappen aufgebaut werden:

1. Auswahl einer (einfachen) Eichgruppe G und Fixierung eines Satzes $u_{(1)}, \ldots, u_{(n)}$ von Materiefeldern, die sich nach bestimmten, möglicherweise verschiedenen (irreduziblen) Darstellungen dieser Gruppe transformieren und die durch die freie Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0(u, \partial u) = \sum_i \mathcal{L}_0^i(u_{(i)}, \partial_\nu u_{(i)}) \tag{11.13}$$

beschrieben werden.

2. Einführung eines kompensierenden Vektorfeldes B_ν, das sich gemäß der adjungierten Darstellung der Gruppe G transformiert, und Konstruktion der vollständigen Lagrange-Dichte des Systems (Materiefelder $u_{(1)}, \ldots, u_{(n)}$ + Yang-Mills-Feld B_ν) nach der Regel

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_0(u, \partial u) \to \mathcal{L}(u, B)\,, \\ &\mathcal{L}(u, B) = \mathcal{L}_0\big(u, D(B)\, u\big) + \mathcal{L}_{YM}(B)\,. \end{aligned} \tag{11.14}$$

Im ersten Glied auf der rechten Seite von Gl. (11.14) sind die partiellen Ableitungen jedes Feldes $u_{(i)}$ nach Regel (11.4) durch kovariante Ableitungen zu ersetzen, und zwar mit ein und derselben, ebenfalls in $\mathcal{L}_{YM}$ eingehenden Konstante g. Deshalb enthält die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(u, B)$, die ein System von $n + 1$ wechselwirkenden Feldern beschreibt, im Falle einer einfachen Gruppe nur eine einzige Kopplungskonstante, und sie ist bezüglich gleichzeitiger Eichtransformationen (11.1) und (11.5) aller in sie eingehenden Felder invariant.

Wie schon am Schluß des Abschnitts 11.1. bemerkt wurde, ist das vektorielle Eichfeld mit Notwendigkeit masselos. Dieser Umstand schränkt die Anwendungsmöglichkeiten von Eichmodellen wechselwirkender Felder bedeutend ein, weil in der realen Welt nur das elektromagnetische Feld A_ν, das der abelschen Eichgruppe entspricht, als ein masseloses Vektorfeld experimentell gesichert ist. Es gibt jedoch eine nichttriviale Methode, mit deren Hilfe unter Verwendung zusätzlicher *wechselwirkender* skalarer Materiefelder dem Eichfeld auf invariante Weise eine Masse verliehen werden kann. Dieses Verfahren beruht auf dem sogenannten Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung, zu dessen Betrachtung wir jetzt übergehen.

11.3. Spontane Symmetriebrechung

In verschiedenen Teilgebieten der Physik, angefangen bei der klassischen Mechanik, sind Beispiele von Systemen bekannt, die eine spontane Symmetriebrechung aufweisen. Gemeint sind hier solche Systeme, deren Grundgleichungen (wie z.B. Lagrange-Dichte, Hamilton-Funktion oder Bewegungsgleichungen) bestimmte

Symmetrieeigenschaften aufweisen, bei denen aber gleichzeitig der reale, einer speziellen Lösung der Bewegungsgleichungen entsprechende physikalische Zustand diese Symmetrie nicht besitzt. Eine solche Situation entsteht, wenn der energetisch niedrigste symmetrische Zustand des Systems nicht mit dem Zustand minimaler Energie übereinstimmt und deshalb instabil ist. Eine beliebig kleine unsymmetrische Störung löst dann die Symmetriebrechung aus.

Als einfaches Beispiel betrachten wir ein mechanisches System, das aus einer leeren Flasche mit konvexem Boden und einer kleinen Kugel besteht. Nachdem die rotationssymmetrische Flasche genau senkrecht (bezogen auf das Gravitationsfeld der Erde) aufgestellt wurde, läßt man von oben die Kugel hineinfallen (siehe Abb. 11.1a). Diese rollt zur Seite, sobald sie den Boden erreicht hat, da sie sich

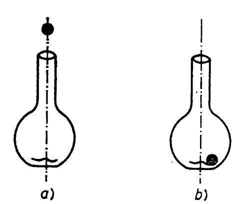


Abb. 11.1
Ein mechanisches System, das eine spontane Symmetriebrechung aufweist
a) Anfangszustand b) Endzustand

nicht auf der zentralen Ausbuchtung halten kann (siehe Abb. 11.1b). Der Endzustand besitzt keine Rotationssymmetrie mehr. Ein anderes Beispiel ähnlicher Art stellen isotrope Ferromagnetika dar, deren zufällig vorhandene Magnetisierungsrichtung die Isotropie des Raumes verletzt.

Wir wenden uns nun dem klassischen skalaren Feld $\varphi(x)$ zu, dessen Lagrange-Dichte durch

$$\mathcal{L} = T(\partial\varphi) - V(\varphi) \tag{11.15}$$

gegeben ist, wobei T der nur vom Gradienten $\partial^\mu\varphi_\mu$ abhängende kinetische Term und V die Potentialfunktion sind.

Für das gewöhnliche freie skalare Feld, wie es in Vorlesung 3. betrachtet wurde, ist $V(\varphi)$ eine Parabel $m^2\varphi^2/2$ (siehe Abb. 11.2). Dem Minimum der Potentialfunktion entspricht die triviale Lösung $\varphi = 0$. Die Quantisierung des freien Skalarfeldes erfolgt, entsprechend der Ausführungen in Vorlesung 8., durch die Quantisierung kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage $\varphi = 0$. Die bezüglich der Spiegelung $\varphi \to -\varphi$ symmetrische Lagrange-Dichte (11.15) besitzt einen Grundzustand $\varphi = 0$, der symmetrisch und stabil ist. Die zusätzliche Einführung eines positiven, die Selbstwechselwirkung des Feldes beschreibenden additiven Termes der Art $(h^2/4)\,\varphi^4$ (vgl. (10.21) und (10.22)) in $V(\varphi)$ ändert diese Eigenschaft nicht.

Um eine spontane Brechung der Spiegelsymmetrie zu erzwingen, nehmen wir an, daß $V(\varphi)$ eine gerade Funktion mit zwei symmetrischen Minima ist (siehe Abb. 11.3). Solch eine Abhängigkeit kann durch das Potential

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{h^2}{4}\varphi^4$$

beschrieben werden. Dieser Ausdruck enthält ein in φ quadratisches Glied mit einem „negativen Massenquadrat", was Assoziationen mit den hypothetischen

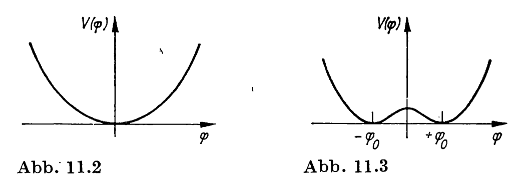


Abb. 11.2
Potentialfunktion des freien skalaren Feldes

Abb. 11.3
Potentialfunktion eines skalaren Feldes, die zu einer spontanen Symmetriebrechung führt

Tachyonen hervorrufen könnte, die sich schneller als das Licht bewegen. Für uns ist hier allerdings nur von Bedeutung, daß $\varphi = 0$ dank dieses negativen Vorzeichens des ersten Summanden kein Minimum von $V(\varphi)$ ist, sondern daß sich stabile Gleichgewichtslagen für die beiden Punkte

$$\varphi = \pm\varphi_0\,, \qquad \varphi_0 = \frac{\mu}{h}$$

ergeben. Beide Zustände haben den gleichen minimalen Energiewert

$$V(\pm\varphi_0) = V_0 = -\mu^4/4h^2\,,$$

so daß das entsprechende Quantensystem einen zweifach entarteten Vakuumzustand aufweist.

Um die Quantisierung ausführen zu können, muß einer dieser untersten Zustände (z.B. $+\varphi_0$) ausgewählt werden. Zur Untersuchung kleiner Abweichungen von diesem ausgewählten Grundzustand erweist es sich als vorteilhaft, mit Hilfe der Translation

$$\varphi(x) \to u(x) = \varphi(x) - \varphi_0$$

zu einer neuen Feldfunktion überzugehen. Auf diesem Wege erhalten wir

$$V(\varphi) = V(\varphi_0 + u) = V_0 + \mu^2u^2 + \mu h u^3 + (h^2/4)\,u^4\,.$$

Abgesehen von der Konstante V_0, die nur die Energieskala verschiebt, entspricht das positive, im Feld u quadratische Glied der Masse von Quanten kleiner Schwingungen mit $m = \mu\sqrt{2}$. Die weiteren Glieder entsprechen nichtlinearen Anteilen der Bewegungsgleichungen und können bei kleinem h als eine der Selbstwirkung des Feldes entsprechende Störung angesehen werden.

Wir bemerken hier, daß eine Feldtransformation der Art

$$\varphi(x) = \text{const} + u(x)$$

zum ersten Mal im Jahre 1946 von einem der Autoren beim Aufbau einer mikroskopischen Theorie der Suprafluidität (siehe [6], S. 115 bis 131) in die Quantenphysik eingeführt wurde. Die Untersuchungsmethode von Quantensystemen mittels spontaner Symmetriebrechung wurde in den Jahren 1960—61 als Methode der „Quasimittelung“ bekannt (vgl. [6], S. 193 bis 269).

Eine hinreichend einfache, aber physikalisch inhaltsreiche Verallgemeinerung entsteht beim Übergang vom einkomponentigen Feld φ zum Isospin-Multiplett $\boldsymbol{\varphi}$ mit den Komponenten $(\varphi_1, \dots, \varphi_A)$ und dem Potential

$$V(\boldsymbol{\varphi}) = -\frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}) + \frac{h^2}{4}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi})^2 , \qquad \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi} = \sum_a \varphi_a^2 . \tag{11.16}$$

Hierbei wird die diskrete Spiegelsymmetrie durch eine stetige Symmetriegruppe von Drehungen im Isospinraum ersetzt, die im mechanischen Beispiel (Abb. 11.1) den räumlichen Drehungen um eine vertikale Achse entspricht.

Das Minimum der potentiellen Energie wird jetzt durch die Beziehung

$$\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi} = \varphi_0^2 = \frac{\mu^2}{h^2} \tag{11.17}$$

bestimmt, die eine $(n - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im n-dimensionalen Isospin-Raum definiert. Auch hier wird eine Verschiebung der Feldfunktion $\boldsymbol{\varphi}$ um einen konstanten Vektor $\boldsymbol{\varphi}_0$ durchgeführt, welcher der Bedingung (11.17) genügt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir diesen Vektor folgendermaßen:

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = (\varphi_0, 0, \dots, 0) , \qquad \varphi_0 = +\frac{\mu}{h} .$$

Nimmt man noch an, daß

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{u}(x) \tag{11.18}$$

ist, so erhalten wir für V den Ausdruck

$$V(\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{u}(x)) = V_0 + \mu^2 u_1^2 + \mu h u_1(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) + \frac{h^2}{4}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})^2 ,$$

der keine in $u_2, u_3, \dots, u_n$ quadratischen Glieder mehr enthält. Gleichzeitig entspricht diese Struktur von V bezüglich der neuen Variablen u_1 dem Fall eines einkomponentigen skalaren Feldes.

Auf diese Weise erhält man folgendes Bild: Durch die spontane Symmetriebrechung, die in der Verschiebung (11.18) zum Ausdruck kommt, erhält die verschobene Komponente u_1 die freie Masse $m_1 = \mu\sqrt{2}$, während alle weiteren Komponenten $u_2, u_3, \dots, u_n$ auch weiterhin masselosen Freiheitsgraden entsprechen $(m_2 = m_3 = \cdots = m_n = 0)$. Diese Eigenschaft ist eine unweigerliche Folge der spontanen Brechung einer *stetigen* Symmetrie, da jeder der masselosen Freiheitsgrade für eine unendlichfache Entartung des Vakuumzustands, der in unserem Falle durch (11.17) beschrieben wird, aufkommt. Im mechanischen Beispiel entspricht der masselose Freiheitsgrad einer virtuellen Verschiebung der Kugel (siehe Abb. 11.1) entlang der ringförmigen Einbuchtung des Flaschenbodens.

Der bereits oben formulierte Satz, daß bei der spontanen Brechung einer stetigen Symmetrie notwendigerweise masselose, skalare Mesonen entstehen, ist in der Quantenfeldtheorie als *Goldstone-Theorem* bekannt, und die masselosen Teilchen werden Goldstone-Bosonen genannt. Das Goldstone-Theorem ist das relativistische Analogon des Theorems über die Fernwirkung in der Quantenstatistik (siehe [6], S. 193—269, insbesondere Kapitel II).

11.4. Das massive Yang-Mills-Feld

Wir unterstreichen nochmals: Die spontane Symmetriebrechung ist eine Symmetrieverletzung durch eine unsymmetrische Lösung der symmetrischen Grundgleichungen. Die Lagrange-Dichte (11.14) bzw. (11.16) ändert sich bei der Translation (11.18) nicht, da diese nur den Übergang zu neuen unabhängigen Variablen darstellt. Auf diese Weise ist es möglich, einem nichtabelschen Eichfeld eine Masse zu geben, ohne die Eichsymmetrie der Lagrange-Dichte zu verletzen. Ein solches massives Eichfeld kann jedoch niemals als freies Feld auftreten, sondern muß stets mit jenem Skalarfeld φ wechselwirken, das die spontane Symmetriebrechung ermöglicht.

Eingedenk dessen nehmen wir nun an, daß das abelsche Yang-Mills-Feld $\boldsymbol{B}$ mit einem Skalarfeld $\boldsymbol{u}$ wechselwirkt, welches sich entsprechend der adjungierten Darstellung der Gruppe SU(2) transformiert. Wir setzen ferner voraus, daß das Feld $\boldsymbol{u}$ nichtlinearen Gleichungen genügt, die aus einer Lagrange-Dichte des Typs (11.15) mit der Potentialfunktion (11.16) folgen

$$\mathcal{L}_0(\boldsymbol{u}, \partial\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\,\partial_\nu \boldsymbol{u}\,\partial^\nu \boldsymbol{u} + \frac{\mu^2}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} - \frac{h^2}{4}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})^2 .$$

Die vollständige Lagrange-Dichte des Systems der Felder $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{B}$ ergibt sich auf der Grundlage von (11.14) zu

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{B}) = \mathcal{L}_0\big(\boldsymbol{u}, D(\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{u}\big) + \mathcal{L}_{YM}(\boldsymbol{B}) , \tag{11.19}$$

wobei die kovariante Ableitung $D(\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{u}$ entsprechend der Beziehung (11.4) definiert ist. Mit Hilfe dieser Formel erhalten wir

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}(\partial_\nu\boldsymbol{u} + g[\boldsymbol{B}_\nu \times \boldsymbol{u}])\,(\partial^\nu\boldsymbol{u} + g[\boldsymbol{B}^\nu \times \boldsymbol{u}])$$
$$+ \frac{\mu^2}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} - \frac{h^2}{4}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})^2 + \mathcal{L}_{YM}(\boldsymbol{B}) . \tag{11.20}$$

Betrachten wir nun die Terme der Gleichung (11.20), die die Wechselwirkung der beiden Felder $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{B}$ enthalten. Nach einigen Vereinfachungen kann man sie in folgender Weise schreiben:

$$(g^2/2)\,\{(\boldsymbol{B}_\nu\boldsymbol{u})\,(\boldsymbol{B}^\nu\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})\,(\boldsymbol{B}_\nu\boldsymbol{B}^\nu)\} - g([\partial_\nu\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}]\,\boldsymbol{B}^\nu) . \tag{11.21}$$

Wir verschieben nun das Skalarfeld gemäß

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{v}(x) \tag{11.22}$$

um einen konstanten Isovektor $\boldsymbol{u}_0$ längs der dritten Achse des Isospin-Raumes:

$$u_0^a = \varphi_0\delta_{a3}$$

und betrachten diejenigen Glieder aus (11.21), die bezüglich des Yang-Mills-Feldes $\boldsymbol{B}$ quadratisch sind, und das neue Skalarfeld $\boldsymbol{v}$ nicht enthalten:

$$-\,(g^2\varphi_0^2/2)\,(g^{\mu\nu}B_\mu^3B_\nu^3 - \boldsymbol{B}_\nu\boldsymbol{B}^\nu) = \frac{M^2}{2}\,g^{\mu\nu}(B_\mu^1B_\nu^1 + B_\mu^2B_\nu^2) . \tag{11.23}$$

Diese Terme sind als Masseglieder der Komponenten B^1 und B^2 des Yang-Mills-Feldes zu interpretieren. Somit erhalten beide Komponenten die Masse $M = g\varphi_0$, während die Komponente B^3 masselos bleibt.

Formel (11.21) enthält nach der Verschiebung des Skalarfeldes auch noch bilineare Glieder, die sowohl die Vektor-, als auch die neuen Skalarfelder einschließen:

$$-M(B^1_\mu \, \partial^\mu v^2 - B^2_\mu \partial^\mu v^1) \,. \tag{11.24}$$

Das Vorhandensein dieser gemischten quadratischen Summanden erschwert im allgemeinen die Interpretation der masselosen Komponenten des Skalarfeldes v_1 und v_2 (siehe diesbezüglich den Abschnitt 12.2.). In unserem Falle gibt es jedoch einen wichtigen Umstand, der zu einer wesentlichen Vereinfachung führt. Man kann die gemischten Glieder mittels einer speziellen Eichtransformation beseitigen, indem man die Eichung so fixiert, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$v_1'(x) = v_2'(x) = 0 \,, \qquad \partial^\nu B_\nu'^3(x) = 0 \,. \tag{11.25}$$

Im Ergebnis dieses Vorgehens erhalten wir eine Lagrange-Dichte, die nur noch von einem Skalarfeld $v_3' = v$ und dem Vektortriplett $\boldsymbol{B}' = (B_1', B_2', B_3')$ abhängt:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{B}) = \mathcal{L}(v, \boldsymbol{B}') \,. \tag{11.26}$$

Dabei haben die Komponenten des Vektorfeldes B_1' und B_2' entsprechend (11.23) gleiche Massen

$$M_1 = M_2 = M = g\varphi_0 = g\mu/h \,, \tag{11.27}$$

während B_3' masselos bleibt. Das skalare Boson v hat die Masse

$$m = \sqrt{2}\,\mu \,. \tag{11.28}$$

Somit haben wir nun anstelle des anfänglichen Isotripletts masseloser Vektorfelder und eines Tripletts skalarer Felder mit negativem Massequadrat ein Dublett massiver Vektorfelder, ein masseloses Vektorfeld und ein skalares massives Mesonfeld vorliegen; die masselosen Goldstone-Mesonen wurden „weggeeicht", d. h., sie verschwinden bei geeigneter Wahl der Eichung. Dieser Umwandlungsprozeß eines masselosen in ein massives Eichfeld bei gleichzeitiger „Beseitigung" von Goldstone-Mesonen nennt man *Higgs-Effekt* (oder Higgs-Mechanismus). Das verbleibende massive skalare Meson wird *Higgs-Boson,* und das zugehörige Feld (in unserem Fall $v_3' = v$) wird Higgs-Feld genannt.

Es ist leicht nachzuprüfen, daß der Higgs-Mechanismus die Gesamtzahl der Teilchen des Systems nicht ändert. Dazu erinnern wir daran, daß ein masseloses Vektorfeld (z.B. das elektromagnetische Feld) nach der Quantisierung zwei Teilchenzustände beschreibt; der Kürze halber sagen wir, daß dieses Feld zwei physikalische Freiheitsgrade hat. Das massive Vektorfeld besitzt dagegen drei Freiheitsgrade, wie in Abschnitt 8.3. gezeigt wurde. Deshalb enthält die anfängliche Lagrange-Dichte (11.20) insgesamt $3 \times 2 = 6$ Freiheitsgrade dreier masseloser Vektorfelder und $3 \times 1 = 3$ Freiheitsgrade dreier skalarer Felder; zusammen sind dies also $6 + 3 = 9$ Freiheitsgrade. Die transformierte Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(v, \boldsymbol{B})$ hat $2 \times 3 = 6$ Freiheitsgrade der beiden massiven Vektorfelder, $1 \times 2 = 2$ Freiheitsgrade des masselosen Vektorfeldes B^3 und $1 \times 1 = 1$ Freiheitsgrad des Higgs-Feldes v, zusammen ergeben sich ebenfalls $6 + 2 + 1 = 9$ Freiheitsgrade.

Wir bemerken noch folgendes: Wenn man das betrachtete Modell dahingehend verallgemeinert, daß man an Stelle des Tripletts reeller skalarer Felder ein Quadruplett (genauer: ein Iso-Dublett komplexer skalarer Felder) einführt, so erhält man ein System mit zehn Freiheitsgraden. Im Ergebnis einer Transformation der Art

(11.22) entstehen drei Goldstone-Bosonen, und alle drei Komponenten des Yang-Mills-Feldes erhalten eine Masse. Die drei masselosen Bosonen werden danach durch eine Eichtransformation beseitigt, und als Resultat ergeben sich drei massive Vektorfelder und ein Higgs-Boson.

Auf diese Weise ermöglicht der Higgs-Mechanismus, allen Komponenten des Eichfeldes eine Masse zu geben. Dabei erweist sich das Higgs-Boson jedoch als unumgänglich für alle Modelle, die ein massives Yang-Mills-Feld enthalten. Anwendung findet der Higgs-Mechanismus beim Aufbau einheitlicher Theorien der schwachen und elektromagnetischen, oder kurz der elektroschwachen Wechselwirkung (siehe hierzu Vorlesung 32.).

12. Quantensysteme mit Wechselwirkung

12.1. Die Problemstellung

Als Ausgangspunkt der Untersuchung der Wechselwirkung quantisierter Felder dient gewöhnlich die vollständige Lagrange-Dichte des Feldsystems

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_i, \partial u_i) = F(u_i, \nabla u_j, \dot{u}_k) .$$

Hieraus können wir mit Hilfe des Noether-Theorems nach Vorlesung 2. den Energie-Impuls-Tensor und die Gesamtenergie (d. h. den Hamilton-Operator)

$$H = H(u, \nabla u, \dot{u}) \tag{12.1}$$

bestimmen. Da uns die Lösungen der Bewegungsgleichungen normalerweise nicht bekannt sind (im Unterschied zum Fall des freien Feldes), ist eine 4-dimensionale Fourier-Transformation der Felder nicht sinnvoll. Stattdessen schreiben wir

$$u(x) = u^+ + u^- , \qquad u^\pm(x) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{\mp i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\, a^\pm(\boldsymbol{k}, t)\, d\boldsymbol{k} , \tag{12.2}$$

wobei jedoch eine Aufspaltung in positiv- und negativ-frequente Anteile (wiederum im Gegensatz zum freien Feld) nicht mehr relativistisch invariant ist, und die Größen $a^\pm$ nicht notwendig als Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren realer Teilchen anzusehen sind.

Trotzdem werden wir im folgenden annehmen, daß die Amplituden a^+ als Linearkombination positiv-frequenter Exponentialfunktionen dargestellt werden können

$$a^+(\boldsymbol{k}, t) = \sum_\alpha e^{i\omega_\alpha(\boldsymbol{k})t}\, a_\alpha^+(\boldsymbol{k}) \tag{12.3}$$

und deshalb Erzeugungsoperatoren sind. Analog dazu betrachten wir die Amplituden a^- als Vernichtungsoperatoren. Der Hamilton-Operator H läßt sich damit durch die Amplituden $a^\pm$ und ihre zeitlichen Ableitungen ausdrücken. Da H nicht von der Zeit abhängt, kann man $t = 0$ setzen und zu den speziellen Amplituden

$$a^\pm(\boldsymbol{k}) = a^\pm(\boldsymbol{k}, 0) , \qquad \dot{a}^\pm(\boldsymbol{k}) = \dot{a}^\pm(\boldsymbol{k}, 0) \tag{12.4}$$

übergehen.

Zur Festlegung der Vertauschungsrelationen kann die kanonische Quantisierung herangezogen werden. Auf diese Weise erhält man dann die Bewegungsgleichungen

der Feldoperatoren in der Heisenberg-Darstellung

$$i \frac{\partial u(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = [u, H] \tag{12.5}$$

und die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen des Typs $[q, p]$

$$\left[u(\boldsymbol{x}, 0), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}(\boldsymbol{y}, t)}\bigg|_{t=0}\right] = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \tag{12.6}$$

Werden nun (12.2) und (12.1) in Gl. (12.5) eingesetzt, so führt das zu recht komplizierten, nichtlinearen Operatorgleichungen für die Amplituden $a^{\pm}(\boldsymbol{k}, t)$. Die Lösung dieser Beziehungen ist der Lösung der Bewegungsgleichungen äquivalent.

Andererseits erhalten wir aus den Relationen (12.6) und mit Hilfe der Amplituden (12.4) Vertauschungsrelationen der Art

$$[a^-(\boldsymbol{k}), \dot{a}^+(\boldsymbol{q})] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}). \tag{12.7}$$

Im Schrödinger-Bild besteht das Problem darin, die Schrödinger-Gleichung zu lösen. Dabei werden der Hamilton-Operator und die anderen dynamischen Größen durch die zeitunabhängigen Operatoren (12.4) ausgedrückt, die den Vertauschungsrelationen (12.7) genügen.

Um den Übergang von den gleichzeitigen Vertauschungsrelationen (12.7) zu denen für verschiedene Zeiten vollziehen zu können, d. h. um praktisch vom Schrödinger- zum Heisenberg-Bild übergehen zu können, ist die Kenntnis der Zeitabhängigkeit der Operatoren $a^{\pm}$ (d. h. der expliziten Gestalt der Formeln (12.3)) nötig. Das ist aber einer Lösung der Bewegungsgleichung äquivalent. Wir sehen also, daß die kanonischen Vertauschungsrelationen zwar formal das Problem der Quantisierung wechselwirkender Felder lösen, physikalisch jedoch inhaltsarm sind, da sie die Dynamik des Systems in keiner Weise widerspiegeln.

12.2. Illustration

Die eben aufgestellte These kann durch das folgende, lösbare Modell illustriert werden:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\varphi_1, m_1) + \mathcal{L}_0(\varphi_2, m_2) + g\varphi_1\varphi_2, \tag{12.8}$$

wobei

$$\mathcal{L}_0(\varphi, m) = \tfrac{1}{2}\left[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]$$

ist. Die Lagrange-Dichte (12.8) läßt sich durch die Substitutionen

$$\varphi_1 = \cos\alpha \cdot u_1 + \sin\alpha \cdot u_2, \qquad \varphi_2 = \cos\alpha \cdot u_2 - \sin\alpha \cdot u_1$$

mit der Variablen

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 + 4g^2} - (m_1^2 - m_2^2)}{2g}\right)$$

diagonalisieren. Hierbei wurde angenommen, daß $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2 > 0$ ist, und die Wahl des Vorzeichens der Wurzel der Forderung $u_1 \to \varphi_1$ und $u_2 \to \varphi_2$ für $g \to 0$ genügt.

Durch die Substitution erhalten wir

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0(u_1, \mu_1) + \mathscr{L}_0(u_2, \mu_2) ,$$

wobei die neuen Massen durch

$$\mu_1^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{\Delta\mu^2}{2} , \qquad \mu_2^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{\Delta\mu^2}{2} ,$$

$$\Delta\mu^2 = \frac{(\Delta m^2)^2 + 4g^2}{g} \cdot \frac{\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = [(\Delta m^2)^2 + 4g^2]^{1/2} > 0$$

gegeben sind. Indem man diese transformierten, keiner Wechselwirkung unterliegenden Felder gemäß

$$[u_k(x), u_l(y)] = -\mathrm{i}\delta_{kl} D_k(x - y)$$

quantisiert und anschließend wieder zu den Ausgangsfeldern zurückkehrt, ergeben sich folgende Vertauschungsrelationen für beliebige Zeiten,

$$\begin{aligned} \mathrm{i}[\varphi_1(x), \varphi_1(y)] &= \cos^2\alpha \cdot D_1(x - y) + \sin^2\alpha \cdot D_2(x - y) , \\ \mathrm{i}[\varphi_2(x), \varphi_2(y)] &= \cos^2\alpha \cdot D_2(x - y) + \sin^2\alpha \cdot D_1(x - y) , \\ \mathrm{i}[\varphi_1(x), \varphi_2(y)] &= \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \{D_2(x - y) - D_1(x - y)\} , \end{aligned} \tag{12.9}$$

die die Dynamik des Problems vollständig widerspiegeln. Die kanonischen Vertauschungsrelationen erhalten wir, wenn wir die Gleichungen (12.9) nach x^0 differenzieren und anschließend $x^0 = y^0 = t$ setzen

$$\begin{aligned} [\varphi_l(t, \boldsymbol{x}), \dot{\varphi}_k(t, \boldsymbol{y})] &= \mathrm{i}\delta_{kl}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) , \\ [\varphi_l(t, \boldsymbol{x}), \varphi_k(t, \boldsymbol{y})] &= [\dot{\varphi}_l(t, \boldsymbol{x}), \dot{\varphi}_k(t, \boldsymbol{y})] = 0 . \end{aligned} \tag{12.10}$$

In diesen Beziehungen ist die Information über die Dynamik, d. h. über die Wechselwirkung der Felder φ_1 und φ_2, gänzlich verlorengegangen.

Offensichtlich gestattet die Diagonalisierung der Lagrange-Dichte, wie wir sie hier vorgeführt haben, eine explizite Lösung der Bewegungsgleichungen. In relativistischen Modellen ist eine solche Lösung in der Regel jedoch unmöglich. Man bedient sich dann gewöhnlich der Störungstheorie, d. h., man entwickelt die gesuchte Lösung in eine Reihe nach Potenzen eines kleinen Parameters, den man zumeist mit der Kopplungskonstante identifiziert. In nullter Näherung erhält man so ein System freier Feldgleichungen, deren Lösung sich bekanntlich als Überlagerung ebener Wellen darstellen lassen. Die relativistisch kovariant formulierte Störungstheorie, die für die gegenwärtige Situation in der Quantenfeldtheorie typisch ist und zugleich einen ihrer wesentlichen Aspekte ausmacht, führt auf die bekannten Feynman-Diagramme. Ihre Grundlagen werden wir in den beiden folgenden Kapiteln darstellen.

Methodische Gründe lassen es uns allerdings sinnvoll erscheinen, das Problem der Wechselwirkung von Quantensystemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden zunächst in seiner nichtrelativistischen Näherung zu betrachten. Dabei geht man von der Schrödinger-Gleichung in der Teilchenzahldarstellung aus. Diese Betrachtung gestattet es uns, auf einfache Weise solche Begriffe wie die Renormierung von Masse und Wellenfunktion (die mit dem „Ankleiden“ zuvor „nackter“, d. h. freier Teilchen — einem Effekt der quantisierten Wechselwirkung — zusammenhängen) einzuführen, und die physikalische Natur der Ultraviolettdivergenzen der lokalen Quantenfeldtheorie zu verstehen.

12.3. Der Hamiltonsche Zugang zur Quantisierung

Wir betrachten ein System von N identischen Teilchen (Bosonen oder Fermionen), die einer paarweisen Wechselwirkung unterliegen. In der zweiten Quantisierung wird ein solches System durch den Hamilton-Operator

$$H = \int \omega(\boldsymbol{q})\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{q})\, a(\boldsymbol{q})\, \mathrm{d}\boldsymbol{q} + \tfrac{1}{2} \int \overset{+}{a}(\boldsymbol{q}_1)\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{q}_2)\, V(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2; \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\, a(\boldsymbol{p}_1)\, a(\boldsymbol{p}_2)\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}_2\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \qquad (12.11)$$

beschrieben. Hierbei sind a und $\overset{+}{a}$ Bose- bzw. Fermi-Operatoren mit vorgegebenen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [a(\boldsymbol{k}), \overset{+}{a}(\boldsymbol{q})]_\pm &= \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q})\,, \\ [a(\boldsymbol{k}), a(\boldsymbol{q})]_\pm &= [\overset{+}{a}(\boldsymbol{k}), \overset{+}{a}(\boldsymbol{q})]_\pm = 0\,. \end{aligned} \qquad (12.12)$$

Damit ist das Problem im Schrödinger-Bild formuliert.

Die Anwendung des Operators H auf den Einteilchenzustand $\Phi_1(\boldsymbol{k}) = \overset{+}{a}(\boldsymbol{k})\, \Phi_0$ ergibt

$$H\Phi_1(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k})\, \Phi_1(\boldsymbol{k})\,,$$

weshalb $\omega(\boldsymbol{k})$ der Energie eines Teilchens mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$ entspricht. Wenn wir jetzt H auf einen N-Teilchenzustand anwenden, sehen wir, daß V die Wechselwirkungsenergie zweier Teilchen mit den entsprechenden Impulsen ist (siehe z.B. [4], § 118; [5], Bd. 2, S. 330—350 und [18] Kap. 5).

Formeln des Typs (12.11) und (12.12) sind deshalb „gut", weil sie ein System von N Teilchen für beliebiges, aber fixiertes N beschreiben und von dieser Zahl nicht explizit abhängen. Diese Eigenschaft erlaubt es uns, eine wichtige Verallgemeinerung vorzunehmen und die Forderung $N = \text{const.}$ fallen zu lassen. Hierzu genügt es, die Funktion $H(a, \overset{+}{a})$ so abzuändern, daß sie nicht mehr mit dem Teilchenzahloperator

$$\check{N} = \int \overset{+}{a}(\boldsymbol{q})\, a(\boldsymbol{q})\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}$$

kommutiert, oder, falls das System verschiedene Teilchensorten enthält, nicht mit den Teilchenzahloperatoren $\check{N}_i$ der entsprechenden Sorten i kommutiert.

Als Beispiel führen wir jenen Hamilton-Operator an, den erstmals Fröhlich zur Beschreibung der Supraleitfähigkeit einführte:

$$H_{\mathrm{Fr}} = \sum_s \int E(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{a}_s(\boldsymbol{k})\, a_s(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} + \int \omega(\boldsymbol{q})\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{q})\, b(\boldsymbol{q})\, \mathrm{d}(\boldsymbol{q}) + H_1\,, \qquad (12.13)$$

wobei

$$H_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, V_{\mathrm{Fr}}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{q})\, \overset{+}{a}_s(\boldsymbol{k})\, a_s(\boldsymbol{k}')\, [\overset{+}{b}(\boldsymbol{q}) + b(-\boldsymbol{q})]\,,$$

$$V_{\mathrm{Fr}}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{q}) = \delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q} - \boldsymbol{k}')\, \frac{g}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{q})}{\pi}}$$

gilt. Hierbei sind $\overset{+}{a}$ und a Fermi-Operatoren der Elektronen, $s = \pm \frac{1}{2}$ bezeichnet die Spinrichtung, über die zu summieren ist, $\overset{+}{b}$ und b sind die Bose-Operatoren der Phononen, E bzw. ω die Elektron- bzw. Phonon-Energien, und g ist die Kopplungskonstante in der üblichen Normierung der Theorie der Supraleitfähigkeit.

Dieser Hamilton-Operator entspricht einem System von Elektronen im Metall, die mit den Gitterschwingungen des Ionengitters wechselwirken. Der Summand H_1 beschreibt die Anregung von Gitterschwingungen des Kristalls durch die Elektronen, d. h. die Erzeugung eines Schwingungsquants (eines Phonons), aber auch den umgekehrten Prozeß der Absorption eines Phonons durch ein Elektron. In Übereinstimmung damit kommutiert der Hamilton-Operator H_{Fr} mit dem Gesamtteilchenzahloperator der Elektronen, nicht aber mit dem Gesamtteilchenzahloperator der Phononen.

In dieser, von uns als *Hamilton-Formulierung* bezeichneten Problemstellung, besteht die zu lösende Aufgabe in der Bestimmung der Eigenzustände und der zugehörigen Eigenwerte des Hamilton-Operators H.

Wenn neben dem Hamilton-Operator H noch die Operatoren anderer dynamischer Größen $A(a, a^+, \ldots)$ gegeben sind, so erlaubt uns die Kenntnis der Eigenvektoren von H, deren Mittelwerte zu berechnen. Eine wichtige Größe dieses Typs ist der Impuls des Systems. Im Zusammenhang damit muß erwähnt werden, daß die in diesem Abschnitt eingeführten Argumente $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots$ der Operatoren a und $\overset{+}{a}$ physikalisch noch inhaltsleer sind. Sie wurden bisher rein formal mit den entsprechenden Teilchenimpulsen identifiziert. Diese Identifizierung findet ihre Berechtigung erst dann, wenn man den Impulsoperator des Systems eingeführt hat und wenn dessen Eigenwerte mit den Argumenten $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \ldots$ übereinstimmen. Für das Fröhlich-Modell gilt:

$$P_n = \int p_n \overset{+}{a}_s(\boldsymbol{p})\, a_s(\boldsymbol{p})\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \int k_n \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, b(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} \qquad (n = 1, 2, 3)\,. \tag{12.14}$$

Jetzt kann man leicht überprüfen, daß

$$P_n \overset{+}{a}(\boldsymbol{p})\, \Phi_0 = p_n \overset{+}{a}(\boldsymbol{p})\, \Phi_0\,, \qquad P_n \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, \Phi_0 = k_n \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, \Phi_0$$

bzw. allgemeiner

$$P_n[\prod_i \overset{+}{a}(\boldsymbol{p}^i) \prod_j \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}^j)\, \Phi_0] = [\sum_i p_n^i + \sum_j k_n^j]\, [\prod_i \overset{+}{a}(\boldsymbol{p}^i) \prod_j \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}^j)\, \Phi_0]$$

gilt, sofern

$$P_n \Phi_0 = 0$$

vorausgesetzt wird.

Auf ähnliche Weise können in den entsprechenden Fällen die Operatoren der elektrischen Ladung, des Spins usw. definiert werden.

12.4. Die Diagonalisierung der Modell-Hamilton-Operatoren

Die Bewältigung der oben formulierten Problemstellung in Hamiltonscher Formulierung erfordert die Diagonalisierung des Hamilton-Operators mit Hilfe einer unitären Operatortransformation. Ein einfaches, exakt lösbares Beispiel ist der Hamilton-Operator einer „statischen Quelle“

$$H = \int \omega(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, b(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} + \int [g(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{g}(\boldsymbol{k})\, b(\boldsymbol{k})]\, \omega(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,. \tag{12.15}$$

Hierbei sind b und $\overset{+}{b}$ Bose-Operatoren $g(\boldsymbol{k})$, und $\overset{*}{g}(\boldsymbol{k})$ sind komplexwertige Funktionen, die die Quelle des Feldes der b-Teilchen charakterisieren und als Fourier-Transformierte einer entsprechenden räumlichen Verteilung gegeben sind.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Eigenfunktionen und Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung

$$H\Phi(\boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{q})\,\Phi(\boldsymbol{q})$$

zu ermitteln. Der Hamilton-Operator (12.15) läßt sich offensichtlich mittels der formalen „Translation" der Variablen

$$b(\boldsymbol{k}) \to B(\boldsymbol{k}) = b(\boldsymbol{k}) + g(\boldsymbol{k})\,, \qquad \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}) \to \overset{+}{B}(\boldsymbol{k}) = \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}) + \overset{*}{g}(\boldsymbol{k})$$

in die Diagonalform überführen:

$$H = \int \omega(\boldsymbol{k})\,\overset{+}{B}(\boldsymbol{k})\,B(\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} - \int \omega(\boldsymbol{k})\,|g(\boldsymbol{k})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,.$$

Wir müssen nun noch einen unitären Operator finden, der diese Transformation $b \to B$ realisiert, d. h. für den

$$\begin{aligned} U^{-1}(g)\,b(\boldsymbol{k})\,U(g) &= B(\boldsymbol{k})\,, \\ U^{-1}(g)\,\overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\,U(g) &= \overset{+}{B}(\boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{12.16a}$$

gilt. Mit Hilfe von Standardmethoden (siehe Anhang IV.) erhält man

$$U(g) = \exp \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}[g(\boldsymbol{k})\,\overset{+}{b}(\boldsymbol{k}) - \overset{*}{g}(\boldsymbol{k})\,b(\boldsymbol{k})]\,. \tag{12.16b}$$

Die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators H sind offensichtlich mit Hilfe der Operatoren B und $\overset{+}{B}$ in der Gestalt

$$\Psi_N = \overset{+}{B}(\boldsymbol{k}_1) \ldots \overset{+}{B}(\boldsymbol{k}_N)\,\Psi_0 \tag{12.17}$$

gegeben, wobei Ψ_0 das Vakuum des B-Feldes ist:

$$B(\boldsymbol{k})\,\Psi_0 = 0\,. \tag{12.18}$$

Die den Zuständen (12.17) entsprechenden Eigenwerte von H sind

$$H\Psi_N = E_N\Psi_N\,, \qquad E_N = \omega(\boldsymbol{k}_1) + \cdots + \omega(\boldsymbol{k}_N)\,.$$

Um die Zustände Ψ_N durch die Eigenvektoren des Feldes b auszudrücken, setzen wir (12.16a) in die Gleichungen (12.17) und (12.18) ein; nach linksseitiger Multiplikation mit U erhalten wir

$$\Phi_N = U(g)\,\Psi_N = \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}_1) \cdots \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}_N)\,\Phi_0\,.$$

Dabei genügt der Zustand

$$\Phi_0 = U(g)\,\Psi_0 \tag{12.19}$$

wegen (12.18) der Bedingung $b\Phi_0 = 0$ und repräsentiert offensichtlich das Vakuum des b-Feldes.

Wir betrachten die Struktur des neuen Vakuumvektors $\Psi_0 = U^{-1}(g)\,\Phi_0$ etwas eingehender. Zu diesem Zweck wird der Operator U^{-1} in die Normalform gebracht (siehe (A IV.10.)):

$$U^{-1}(g) = Z^{1/2} \exp\left(-\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,g(\boldsymbol{k})\,\overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\right) \cdot \exp\left(\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\overset{*}{g}(\boldsymbol{q})\,b(\boldsymbol{q})\right),$$

wobei

$$Z = \exp\left(-\int |g(\boldsymbol{k})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\right).$$

ist. Damit erscheint das neue Vakuum

$$\Psi_0 = Z^{1/2} \exp\left(-\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, g(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\right) \Phi_0$$

$$= Z^{1/2} \left\{\sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 \dots \mathrm{d}\boldsymbol{k}_n\, g(\boldsymbol{k}_1) \dots g(\boldsymbol{k}_n)\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}_1) \dots \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}_n)\right\} \Phi_0 \qquad (12.20)$$

als Superposition unendlich vieler Eigenzustände des Hamilton-Operators $H_0 = \int \omega(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, b(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}$.

Ohne Beweis geben wir noch die Lösung des Problems der bilinearen Wechselwirkung zweier Bose-Felder an (siehe dazu Aufgabe C13)

$$H = \sum_{r=1,2} \int \omega(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}_r(\boldsymbol{k})\, b_r(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}$$
$$+ \int g(\boldsymbol{k})\, \omega(\boldsymbol{k})\, [\overset{+}{b}_1(\boldsymbol{k})\, b_2(\boldsymbol{k}) + \overset{+}{b}_2(\boldsymbol{k})\, b_1(\boldsymbol{k})]\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,. \qquad (12.21)$$

Die Diagonalisierung gelingt vermöge der folgenden Transformation:

$$B_1(\boldsymbol{k}) = U^{-1}(g)\, b_1(\boldsymbol{k})\, U(g) = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_1(\boldsymbol{k}) - b_2(\boldsymbol{k})]\,,$$

$$B_2(\boldsymbol{k}) = U^{-1}(g)\, b_2(\boldsymbol{k})\, U(g) = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_1(\boldsymbol{k}) + b_2(\boldsymbol{k})]\,,$$

mit

$$U(g) = \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} [\overset{+}{b}_2(\boldsymbol{k})\, b_1(\boldsymbol{k}) - \overset{+}{b}_1(\boldsymbol{k})\, b_2(\boldsymbol{k})]\right\}. \qquad (12.22)$$

Der resultierende diagonalisierte Ausdruck für den Hamilton-Operator lautet

$$H = \sum_r \int \Omega_r(\boldsymbol{k}, g)\, \overset{+}{B}_r(\boldsymbol{k})\, B_r(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,, \qquad (12.23)$$

wobei

$$\Omega_{1,2}(\boldsymbol{k}, g) = \omega(\boldsymbol{k})\, \big(1 \mp g(\boldsymbol{k})\big)$$

gilt. Die Eigenwerte haben die Gestalt

$$H\Psi(n, m) = E(n, m)\, \Psi(n, m)\,,$$

$$E(n, m) = \sum_{1 \leq i \leq n} \Omega_1(\boldsymbol{k}_i) + \sum_{1 \leq j \leq m} \Omega_2(\boldsymbol{q}_j)\,,$$

$$\Psi(n, m) = \overset{+}{B}_1(\boldsymbol{k}_1) \dots \overset{+}{B}_1(\boldsymbol{k}_n)\, \overset{+}{B}_2(\boldsymbol{q}_1) \dots \overset{+}{B}_2(\boldsymbol{q}_m)\, \Psi_0\,,$$

und das Vakuum der B-Felder fällt mit dem der b-Felder zusammen

$$b_r\Psi_0 = B_r\Psi_0 = 0\,.$$

Wir betrachten zum Schluß noch einen Hamilton-Operator, der in der Theorie der Suprafluidität auftritt:

$$H = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} \{\omega(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, b(\boldsymbol{k}) + g(\boldsymbol{k})\, [b(\boldsymbol{k})\, b(-\boldsymbol{k}) + \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(-\boldsymbol{k})]\}\,. \qquad (12.24)$$

Dieser Operator wird durch die unitäre Transformation

$$B(\boldsymbol{k}) = \cosh \alpha(\boldsymbol{k})\, b(\boldsymbol{k}) + \sinh \alpha(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(-\boldsymbol{k}) = U^{-1}(\alpha)\, b(\boldsymbol{k})\, U(\alpha)\,,$$

$$\overset{+}{B}(\boldsymbol{k}) = \cosh \alpha(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}) + \sinh \alpha(\boldsymbol{k})\, b(-\boldsymbol{k}) = U^{-1}(\alpha)\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, U(\alpha)$$

diagonalisiert, wobei (vgl. (A IV.5.6))

$$\ln U(\alpha) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \alpha(\boldsymbol{k})\, [\overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(-\boldsymbol{k}) - b(\boldsymbol{k})\, b(-\boldsymbol{k})] \tag{12.25}$$

gilt und die Funktion $\alpha(\boldsymbol{k})$ aus der Beziehung

$$2g(\boldsymbol{k}) \tanh \alpha(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k}) - \sqrt{\omega^2(\boldsymbol{k}) - g^2(\boldsymbol{k})} \tag{12.26}$$

bestimmt werden muß.

Der Grundzustand des Hamilton-Operators (12.24) ist durch

$$\Psi_0(\alpha) = U^{-1}(\alpha)\, \Phi_0$$

gegeben, wobei Φ_0 das Vakuum des b-Feldes ist. Der Operator $U^{-1}(\alpha)$ kann mit Hilfe der Formel (A IV.12) in die Normalform gebracht werden. Das führt zu

$$\Psi_0(\alpha) = Z^{1/2} \exp\{- \int \tanh \alpha(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{b}(-\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\}\, \Phi_0\,, \tag{12.27}$$

wobei gilt

$$Z = \exp\big(2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} \ln \cosh \alpha(\boldsymbol{k})\big)\,.$$

Die Formel (12.27) enthält eine kohärente Superposition korrelierter Paare von Quanten des Ausgangsfeldes b mit entgegengesetzten Impulsen, d. h. solcher Paare, deren Gesamtimpuls gleich Null ist.

12.5. Wechselwirkungseffekte

Die im letzten Abschnitt besprochenen lösbaren Modelle besitzen im wesentlichen methodische Bedeutung. Allerdings hat das Modell (12.21), das dem feldtheoretischen Modell (12.8) analog ist, Beziehungen zum Mischungsproblem der K^0-Mesonen (siehe z.B. [18]. Kapitel 7 und [12], § 10). Das Modell (12.15) mit linearer Ankopplung einer äußeren statischen Quelle entspricht dem Problem einer Fermi-Boson-Wechselwirkung vom Yukawa-Typ und wird in der folgenden Vorlesung 13. zur Analyse des Ein-Nukleonen-Sektors im Modell des statischen Nukleons herangezogen.

Vorläufig besteht aber der hauptsächliche Wert dieser Modelle darin, daß uns die gefundenen Lösungen einen Einblick in wesentliche Züge der physikalischen Struktur der Wechselwirkungseffekte vermitteln. Von größter Bedeutung war dabei der Übergang zu neuen Koordinaten, d. h. zu einem neuen System von Anregungen, die durch die neugebildeten Operatoren B und $\overset{+}{B}$ beschrieben werden. In realistischeren Modellen erweist sich eine exakte Diagonalisierung leider als unmöglich. In der Regel liegt jedoch der Schlüssel zur näherungsweisen Lösung in der Diagonalisierung eines geeigneten, physikalisch besonders wichtigen Teils der Wechselwirkung. Der Rest ist dann störungstheoretisch zu behandeln.

Wie wir gesehen haben, führt die Wechselwirkung zu neuen Zuständen, die als unendliche Superposition der Zustände des ursprünglichen Hamilton-Operators H_0 darstellbar sind (siehe (12.20)). In dieser Weise geht man also von den Zustands-

vektoren Ψ_N des freien Hamilton-Operators H_0 zu den Zustandsvektoren Φ_N des vollständigen Hamilton-Operators H über.

In manchen Fällen ist diese Zuordnung $\Psi_N \leftrightarrow \Phi_N$ eindeutig. Man spricht dann davon, daß die Wechselwirkung den ursprünglich „nackten" Zustand „bekleidet" und ihn in den „angezogenen" oder physikalischen Zustand Φ_N umwandelt. Eine solche „Bekleidung" ändert die Energie (im relativistischen Fall die Masse) des zugehörigen Quants. Sie kann außerdem eine Änderung der Norm, und wie wir im folgenden sehen werden, der Kopplungskonstante, also einen Abschirmungseffekt, bewirken.

Wir möchten hier daran erinnern, daß dieser Effekt einer Änderung der Teilchenmasse unter dem Einfluß einer Wechselwirkung z. B. bereits aus dem quantenmechanischen Problem der Elektronenbewegung in einem Kristall bekannt ist (siehe [4], § 55 und [8], § 128) und die Ladungsabschirmung in einem Medium schon in der klassischen Elektrodynamik auftritt.

Solche Effekte, wie die Änderung der Massen, Koppelungskonstanten und Normen von Zustandsvektoren, werden in der Quantentheorie als *Renormierungseffekte* bezeichnet. Eine Besonderheit der Renormierung in der Quantenfeldtheorie ist jedoch ihr singulärer Charakter, der als Folge der Lokalität der Wechselwirkung angesehen werden muß. Das in der folgenden Vorlesung betrachtete Modell des statischen Nukleons erweist sich zwar als nicht lokal, wir können jedoch dessen Renormierungseffekte auch im lokalen Grenzwert studieren.

13. Das Modell des schweren Nukleons

13.1. Die Formulierung des Modells

In dieser Vorlesung betrachten wir die Yukawa-Wechselwirkung zwischen leichten Bosonen (Mesonen) mit Spin Null und schweren Fermionen (Nukleonen). Die Fermionen werden dabei als so schwer angenommen, daß ihre Energie nicht vom Impuls abhängt und deshalb gleich der Masse ist. Darüber hinaus werden wir Änderungen der Spinrichtung vernachlässigen (was bei hinreichend kleinen Impulsen als zulässig angesehen werden kann).

Führt man für die Mesonen die Bose-Operatoren $b(\boldsymbol{k})$ und $\overset{+}{b}(\boldsymbol{k})$ ein und für die Nukleonen die Fermi-Operatoren $a(\boldsymbol{p})$ und $\overset{+}{a}(\boldsymbol{p})$, dann ergibt sich als Hamilton-Operator des Systems

$$H = H_0 + H_1\,, \tag{13.1}$$

wobei

$$H_0 = M \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{p})\, a(\boldsymbol{p}) + \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \omega(|\boldsymbol{k}|)\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, b(\boldsymbol{k})\,, \tag{13.2}$$

$$H_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, g(|\boldsymbol{k}|)\, \omega(|\boldsymbol{k}|)\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{p})\, [b(\boldsymbol{k}) + \overset{+}{b}(-\boldsymbol{k})] \tag{13.3}$$

ist. Hierbei wird angenommen, daß die ursprüngliche Lagrange-Dichte der Meson-Nukleon-Wechselwirkung nichtlokal ist,

$$\mathscr{L}_I(x) = -g\overset{*}{\psi}{}^{+}(x)\, \psi^{-}(x) \int \mathrm{d}\boldsymbol{y}\, F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, \varphi(y)\,, \qquad (y_0 = x_0)\,,$$

und der Formfaktor F nur vom Betrag des Radiusvektors abhängt. Zwischen der Fourier-Transformierten des Formfaktors und der in (13.3) eingeführten Funktion

$g(k)$ besteht daher folgende Beziehung:

$$g \int e^{-ikx} F(x)\, dx = g f(k) = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega^3(k)}\, g(k)\,, \qquad k = |\boldsymbol{k}|\,. \tag{13.4}$$

Dem lokalen Grenzfall $F(x) = \delta^3(x)$ entsprechen die Ausdrücke

$$g(k) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega^3(k)}}\,, \qquad f(k) = 1\,. \tag{13.5}$$

Der Hamilton-Operator (13.1) wurde im Schrödinger-Bild angegeben. Die Operatoren a und $\overset{+}{a}$ genügen Vertauschungsrelationen vom Fermi-Typ, die Operatoren b und $\overset{+}{b}$ solchen vom Bose-Typ. Der Term H_1 beschreibt die Erzeugung bzw. Vernichtung von Mesonen an Nukleonen, wobei die Nukleonenzahl konstant bleibt; im Unterschied zu den üblichen Bildungen des Typs $\overset{*}{\psi}\psi\varphi$ (siehe Abschnitt 10.2.) enthält H_1 keine Glieder der Art $\overset{++}{aa}b$ und $aa\overset{+}{b}$. Diese würden einer Erzeugung oder Vernichtung von Nukleonpaaren entsprechen. Aus diesem Grunde bezieht sich die Nichtlokalität nicht nur auf die formale „Verschmierung" mittels der Funktion $f \neq 1$, sondern besitzt tiefgründigeren Charakter. (Dieser Punkt wird ausführlich in Abschnitt 15.3. betrachtet.) Wenn wir allerdings annehmen, daß die Nukleonen sehr schwer sind, d. h., wenn $M \gg \omega(k)$ für alle physikalisch relevanten Impulse gilt, so ist die reale Erzeugung bzw. Vernichtung von Nukleonpaaren unmöglich; virtuelle Effekte dieser Art wollen wir vernachlässigen, ohne die Berechtigung einer solchen Näherung zu erörtern. Genau in diesem Sinne wird von jetzt an Formel (13.5) als Definition des lokalen Grenzfalles verstanden.

Im Zusammenhang mit obigen Betrachtungen muß bemerkt werden, daß der Hamilton-Operator (13.1) mit dem Operator N_{Nukl} der Gesamtnukleonenzahl und dem Operator des Gesamtimpulses

$$P_n = \int p_n\, d\boldsymbol{p}\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{p})\, a(\boldsymbol{p}) + \int k_n\, d\boldsymbol{k}\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, b(\boldsymbol{k}) \qquad (n = 1, 2, 3) \tag{13.6}$$

kommutiert, nicht aber mit dem Operator der Gesamtmesonenzahl.

13.2. Die Lösung im Ein-Nukleonen-Sektor

Das Modell des statischen Nukleons läßt im Ein-Nukleonen-Sektor des Hilbert-Raums eine exakte Lösung zu. Dieser Sektor besteht aus allen Vektoren Ψ, die der Relation

$$N_{\text{Nukl}} \Psi = \Psi$$

genügen. Zustände mit fixiertem Gesamtimpuls $\boldsymbol{p}$ können wie folgt dargestellt werden:

$$\Psi_{\boldsymbol{p}} = \int d\boldsymbol{q}\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\, \Phi(\boldsymbol{q})\,, \tag{13.7}$$

wobei $\Phi(\boldsymbol{q})$ derjenige Zustandsvektor ist, der keine Nukleonen (aber beliebig viele Mesonen) enthält, und daher vermöge

$$\Phi(\boldsymbol{q}) = F_b(\boldsymbol{q})\, \Phi_0 \tag{13.8}$$

aus dem Vakuumzustand Φ_0 durch Anwendung eines Funktionals F_b der Meson-Erzeugungsoperatoren $\overset{+}{b}$ mit fixiertem Gesamtimpuls $\boldsymbol{q}$ entsteht.

Um eine Gleichung für den Mesonenzustand Φ zu erhalten, wenden wir den Operator $a(0)\ H$ auf den Zustand $\Psi_{\boldsymbol{p}}$ an und erhalten

$$a(0)\ H_0 \Psi_{\boldsymbol{p}} = \{M + \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \omega(k)\ \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\ b(\boldsymbol{k})\}\ \Phi(\boldsymbol{p})\ ,$$

$$a(0)\ H_1 \Psi_{\boldsymbol{p}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \tilde{B}(\boldsymbol{k})\ \Phi(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k})\ ,$$

wobei die Bezeichnung

$$\tilde{B}(\boldsymbol{k}) = g(k)\ \omega(k)\ [b(\boldsymbol{k}) + \overset{+}{b}(-\boldsymbol{k})]$$

eingeführt wurde. Wenden wir den Operator $a(0)$ auf die Schrödinger-Gleichung für den Zustand $\Psi_{\boldsymbol{p}}$ an, dann erhalten wir eine Gleichung für den Mesonenzustand $\Phi(\boldsymbol{p})$

$$(M + W)\ \Phi(\boldsymbol{p}) + \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \tilde{B}(\boldsymbol{k})\ \Phi(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}) = E\Phi(\boldsymbol{p})\ , \tag{13.9}$$

wobei

$$W = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \omega(k)\ \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\ b(\boldsymbol{k})$$

der Energieoperator der Mesonen ist.

Zur Konstruktion der Lösung von (13.9) benutzen wir Formel (A IV.15) mit den Identifizierungen

$$n(\boldsymbol{k}) = \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\ b(\boldsymbol{k})\ , \qquad \lambda_{\pm}(\boldsymbol{k}) = \pm g(|\boldsymbol{k}|)\ \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\ , \qquad \lambda^2 = -g^2(|\boldsymbol{k}|)\ .$$

Damit ergibt sich

$$[n(\boldsymbol{k}), \mathrm{e}^{A(\boldsymbol{x})}] = -\ \{g(k)\ [b(\boldsymbol{k}) + \overset{+}{b}(-\boldsymbol{k})]\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} + g^2(k)\}\ \mathrm{e}^{A(\boldsymbol{x})}\ , \tag{13.10}$$

wobei

$$A(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\ g(q)\ [b(\boldsymbol{q}) - \overset{+}{b}(-\boldsymbol{q})]$$

ein antihermitescher Operator ist.

Wir überzeugen uns nun davon, daß die Lösung der Gleichung (13.9) in der Form

$$\Phi^{(0)}(\boldsymbol{p}) = T(\boldsymbol{p}; b, \overset{+}{b})\ \Phi_0 \tag{13.11}$$

geschrieben werden kann, wobei Φ_0 der Zustand des Mesonenvakuums ist und der Operator T die Struktur

$$T(\boldsymbol{p}; b, \overset{+}{b}) = c \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\ \mathrm{e}^{A(\boldsymbol{x})} \tag{13.12}$$

hat. Kommutiert man T mit dem Energieoperator der Mesonen W, so ergibt sich unter Verwendung von (13.10)

$$[T(\boldsymbol{p}), W] = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \tilde{B}(\boldsymbol{k})\ T(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}) + \Delta M \cdot T(\boldsymbol{p})\ , \tag{13.13}$$

mit

$$\Delta M = \int \omega(k)\ g^2(k)\ \mathrm{d}\boldsymbol{k} = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \frac{f^2(k)}{2\omega^2(k)}\ . \tag{13.14}$$

Wird jetzt noch berücksichtigt, daß $W\Phi_0 = 0$ ist, so erhalten wir aus (13.13)

$$W\Phi^{(0)}(\boldsymbol{p}) + \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \tilde{B}(\boldsymbol{k})\ \Phi^{(0)}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}) + \Delta M\ \Phi^{(0)}(\boldsymbol{p}) = 0\ .$$

Durch Vergleich dieser Relation mit (13.9) überzeugen wir uns davon, daß die Formeln (13.11) und (13.12) unter der Bedingung

$$E = E^{(0)} = M - \Delta M$$

tatsächlich eine Lösung der Gleichung (13.9) sind. Damit stellt der Ausdruck (13.14) eine von der Wechselwirkung mit dem Mesonenfeld herrührende Korrektur der Nukleonenmasse dar.

Die Formeln (13.7), (13.11) und (13.12) ergeben einen expliziten Ausdruck für den „angezogenen" Ein-Nukleonen-Zustand $\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)}$. Um diesen Zustand vollständig zu bestimmen, müssen wir noch die Konstante c in (13.12) festlegen. Hierzu ist es günstig, von der Normierungsbedingung

$$\overset{*}{\Phi}{}^{(0)}(\boldsymbol{p})\, \Phi^{(0)}(\boldsymbol{p}') = \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$$

auszugehen. Setzt man hier die Darstellungen (13.7) und (13.11) ein, so ergibt sich

$$\int \langle 0 \,|\overset{*}{T}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})\, T(\boldsymbol{q})|\, 0\rangle \,\mathrm{d}\boldsymbol{q} = \delta(\boldsymbol{p})\,.$$

Unter Berücksichtigung der Formel (13.12) und der Antihermitezität des Operators A erhalten wir nach Integration über $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$

$$|c|^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \int \mathrm{d}\boldsymbol{y} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{y} - \mathrm{i}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}} \langle 0\,|\mathrm{e}^{A(\boldsymbol{y}) - A(\boldsymbol{x})}|\, 0\rangle$$
$$= (2\pi)^3\, |c|^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} = (2\pi)^6\, |c|^2\, \delta(\boldsymbol{p})\,;$$

somit muß $c = (2\pi)^{-3}$ gesetzt werden.

Um die rechte Seite der Formel (13.11) in der Gestalt (13.8) schreiben zu können, führen wir den Operator T in die Normalform über. Dazu wird die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (siehe (A IV.10)) benutzt

$$\mathrm{e}^{A(\boldsymbol{x})} = \mathrm{e}^{A_+(\boldsymbol{x})}\, \mathrm{e}^{A_-(\boldsymbol{x})}\, \mathrm{e}^{-L/2}\,,$$

in die die folgenden Ausdrücke ($b^+ = \overset{+}{b}$, $b^- = b$)

$$A_\pm(\boldsymbol{x}) = \mp \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\; g(k)\, b^\pm(\boldsymbol{k})\, \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\,,$$

und

$$L = [A_+(\boldsymbol{x}), A_-(\boldsymbol{x})] = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{2\omega^3(k)}\, f^2(k)$$

einzusetzen sind. Faßt man die bisher gewonnenen Resultate zusammen, dann stellt sich der „angezogene" Ein-Nukleonen-Zustand folgendermaßen dar:

$$\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} = \frac{Z^{1/2}}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\; \mathrm{e}^{A(\boldsymbol{x})} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\, \Phi_0\,, \tag{13.15}$$

wobei

$$Z = \mathrm{e}^{-L} \tag{13.16}$$

ist, der Zustand $\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)}$ der Gleichung

$$H\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} = (M - \Delta M)\, \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} \tag{13.17}$$

genügt und die Normierungsbedingung

$$\overset{*}{\Psi}{}_{\boldsymbol{p}}^{(0)} \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} = 1 \tag{13.18}$$

erfüllt.

13.3. Die Eigenschaften der Ein-Nukleonen-Lösung

Die Formel (13.15) stellt den Zustand des physikalischen Nukleons $\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)}$ als unendliche Superposition von Zuständen dar, die jeweils ein nacktes Nukleon und eine beliebige Anzahl von Mesonen enthalten. Wenn wir die operatorwertige Exponentialfunktion auf der rechten Seite dieser Formel in eine Potenzreihe entwickeln, dann erhalten wir nach Integration über $\boldsymbol{x}$

$$\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} = Z^{1/2} \left\{ \overset{+}{a}(\boldsymbol{p}) - \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, g(\boldsymbol{q})\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{q})\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \right.$$
$$+ \frac{(-1)^2}{2!} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1 \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}_2\, g(\boldsymbol{q}_1)\, g(\boldsymbol{q}_2)\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{q}_1)\, \overset{+}{b}(\boldsymbol{q}_2)$$
$$\left. \times\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_2) + \cdots \right\} \Phi_0 . \qquad (13.19)$$

Hierbei ist $Z^{1/2}$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, daß sich das physikalische Nukleon mit dem Impuls $\boldsymbol{p}$ im Zustand des nackten Nukleons befindet. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude, daß es aus dem nackten Nukleon mit dem Impuls $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$ und einem Meson mit dem Impuls $\boldsymbol{q}$ besteht, ist gleich $Z^{1/2}g(\boldsymbol{q})$ usw.

Dabei ist es wichtig, daß die Beiträge aller höheren Summanden bezüglich der Mesonenimpulse faktorisieren.

Unendliche Superpositionen von Bosonenzuständen dieser Art werden als *kohärente Zustände* bezeichnet. Solche Zustände Φ_{koh} können durch die Operatorrelation

$$b(0)\, \Phi_{\text{koh}} = \beta \Phi_{\text{koh}} \qquad (13.20)$$

definiert werden, wobei β eine c-Zahl ist, oder anders ausgedrückt: kohärente Zustände sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators. Diese Eigenschaft gilt sowohl für die Impuls-, als auch für die Ortsdarstellung. Von besonderer physikalischer Bedeutung ist die Faktorisierbarkeit der sogenannten Korrelationsfunktionen des Feldes b, die aus (13.20) folgt und es gestattet, Φ_{koh} in direkte Verbindung mit der optischen Kohärenz zu bringen (siehe z.B. [16], Kapitel 7.).

Man kann nun zeigen, daß $\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)}$ den Grundzustand im Ein-Nukleonen-Sektor repräsentiert. Dazu wenden wir den Vernichtungsoperator $b(\boldsymbol{k})$ auf diesen Zustand an, was zu der Beziehung

$$b(\boldsymbol{k})\, \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} = -g(k)\, \Psi_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}^{(0)} \qquad (13.21)$$

führt und für $\boldsymbol{k} = 0$ in (13.20) übergeht. Hieraus ist ersichtlich, daß $\Psi_{\boldsymbol{p}}^{0}$ der Bedingung

$$B(0)\, \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} = \big(b(0) + g(0)\big)\, \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} = 0$$

genügt, wobei die Bezeichnungen aus Abschnitt 12.4. benutzt wurden. Auf diese Weise annihiliert der Vernichtungsoperator eines „angezogenen“ Feldquants B wirklich den Zustand $\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)}$. Der obere Index 0 hat damit einen physikalischen Sinn erhalten.

Nun ist es möglich, auf einfache Weise die Bose-Anregungen des Zustandes $\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)}$ zu konstruieren. Der einfachste Zustand dieser Art entspricht dem System „Meson + Nukleon“. Diesen Zustand $\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(1)}(\boldsymbol{k})$ mit dem Gesamtimpuls $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}$ setzen wir in

der Form

$$\overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} + c(\boldsymbol{k})\, \Psi_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}^{(0)}$$

an. Man kann sich leicht davon überzeugen (siehe Aufgabe C17), daß dieser Ausdruck für $c(\boldsymbol{k}) = g(|\boldsymbol{k}|)$ ein Eigenvektor des Hamilton-Operators (13.1) ist, d. h., es gilt

$$H\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(1)}(\boldsymbol{k}) = \big(M - \Delta M + \omega(\boldsymbol{k})\big)\, \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(1)}(\boldsymbol{k}) \tag{13.22}$$

mit

$$\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(1)}(\boldsymbol{k}) = \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} + g(k)\, \Psi_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}^{(0)}\,. \tag{13.23}$$

Interessanterweise spielt hierbei

$$\overset{+}{B}(\boldsymbol{k}) = \overset{+}{b}(\boldsymbol{k}) + g(k)\, \check{I}_{\boldsymbol{k}} \tag{13.24}$$

die Rolle des Erzeugungsoperators eines physikalischen Mesons. Dabei ist $\check{I}_{\boldsymbol{k}}$ ein Operator, der den Impuls um $\boldsymbol{k}$ erhöht, d. h. der durch

$$\check{I}_{\boldsymbol{k}} \Psi_{\boldsymbol{p}} = \Psi_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}$$

gegeben ist. Wir sehen außerdem, daß (13.21) in der Form

$$B(\boldsymbol{k})\, \Psi_{(\boldsymbol{p})}^{(0)} = 0 \tag{13.25}$$

mit der Definition

$$B(\boldsymbol{k}) = b(\boldsymbol{k}) + g(k)\, \check{I}_{-\boldsymbol{k}} \tag{13.26}$$

geschrieben werden kann.

Abschließend stellen wir fest: Aus der Tatsache, daß der durch Gl. (13.23) gegebene physikalische Zustand „Meson + Nukleon“ ein Eigenzustand des Hamilton-Operators ist, folgt unmittelbar, daß das hier betrachtete Modell keine Meson-Nukleon-Streuprozesse enthält.

13.4. Der Übergang zum lokalen Grenzfall

Wir betrachten jetzt die Eigenschaften der erhaltenen Lösung beim Übergang zum lokalen Grenzfall (13.5), der sich als singulär erweist. Um die Struktur der entstehenden Singularitäten untersuchen zu können, führen wir einen Parameter Λ ein, der den „Grad der Verschmiertheit“ des Formfaktors $f(k)$ charakterisiert. Zu diesem Zweck wird der Formfaktor wie folgt definiert:

$$f(k) = \mathrm{e}^{-k^2/2\Lambda^2}; \qquad k = |\boldsymbol{k}|\,. \tag{13.27}$$

In der Impulsdarstellung fungiert der Parameter Λ als Abschneideimpuls. In der Ortsdarstellung beschreibt er die Größe $r_\Lambda = \hbar/\Lambda$ des Nichtlokalitätsgebietes des Nukleons. Der lokale Grenzfall folgt nun im Limes $\Lambda \to \infty$. Für die weitere Betrachtung müssen wir die beiden Integrale

$$\Delta M = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \frac{f^2(k)}{2\omega^2(k)} = \frac{g^2}{4\pi^2} \int\limits_0^\infty \frac{k^2\, \mathrm{d}k}{k^2 + \mu^2}\, \mathrm{e}^{-k^2/\Lambda^2}$$

und

$$L = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{k} \frac{f^2(k)}{2\omega^3(k)} = \frac{g^2}{4\pi^2} \int\limits_0^\infty \frac{k^2\, dk}{(k^2 + \mu^2)^{3/2}} e^{-k^2/\Lambda^2}$$

berechnen, in die der relativistische Ausdruck für die Energie der Mesonen mit der Masse μ eingeht. Im Grenzfall $\Lambda \gg \mu$ erhalten wir

$$\Delta M \simeq \frac{g^2}{4\pi^2} \Lambda\,, \qquad L \simeq \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}\,, \tag{13.28}$$

d. h., beide Integrale divergieren im lokalen Grenzfall. Das Integral ΔM, das wegen (13.17) den Beitrag des Feldes zur Nukleonenmasse angibt, divergiert linear mit Λ und ist folglich umgekehrt proportional zum „Nukleonenradius" r_Λ. Das zweite Integral geht wegen (13.15) in die Norm des „angezogenen" Zustands ein. Für die Wahrscheinlichkeit, daß sich das „angezogene" Nukleon in einem nackten Zustand befindet, folgt nun aus (13.19) der Ausdruck

$$w_0 = Z = e^{-L} \simeq \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^{-g^2/4\pi^2},$$

der im lokalen Grenzfall potenzartig gegen Null strebt. Analog ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das physikalische Nukleon in einem Zustand befindet, der ein „nacktes" Nukleon und ein Meson enthält, durch

$$\omega_1 = Z \int d\boldsymbol{q}\, g^2(q) = ZL = \frac{g^2}{8\pi} \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{g^2/4\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}$$

gegeben und strebt ebenfalls potenzartig gegen Null usw.

Wir erkennen daraus, daß im lokalen Grenzfall die Relationen zwischen den „nackten" und der „angezogenen" Masse sowie zwischen den Eigenfunktionen des freien und des vollständigen Hamilton-Operators singulär sind.

Die Streumatrix

14. Die Streumatrix

14.1. Die Störungstheorie

Bei der Behandlung quantenmechanischer Probleme geht man gewöhnlich von der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H\psi(t)$$

aus und stellt den vollständigen Hamilton-Operator H als Summe des freien (ungestörten) Hamilton-Operators H_0 und des Wechselwirkungsoperators H_1 dar

$$H = H_0 + H_1\,. \tag{14.1}$$

In der Regel erweist sich eine exakte Lösung der Schrödinger-Gleichung als unmöglich; man muß daher häufig auf störungstheoretische Methoden zurückgreifen. Dabei wird in der nullten Näherung der Wechselwirkungsterm H_1 vernachlässigt und das exakt lösbare Problem

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \psi_0(t)}{\partial t} = H_0\psi_0(t) \tag{14.2}$$

behandelt.

In der Quantenfeldtheorie gelingt, außer für hinreichend einfache Modelle, eine exakte Lösung der Bewegungsgleichungen wechselwirkender Felder ebensowenig wie in der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Man verwendet deshalb auch hier gewöhnlich die Störungstheorie und vernachlässigt ebenfalls in nullter Näherung die Wechselwirkung. Hierbei ist man gezwungen, von idealisierten freien Feldern auszugehen und die Wechselwirkung vermöge eines Zusatzterms zu berücksichtigen, der die Eigenschaften des dynamischen Systems nur geringfügig ändert und den man „ein-“ und „ausschalten“ kann. Auf den ersten Blick scheint ein solches Vorgehen auf keine ernsten Einwände zu stoßen: Eine intensive Wechselwirkung der Elementarteilchen findet ja gewöhnlich nur dann statt, wenn sie sich hinreichend nahe kommen, d. h. bei einem Streuprozeß. Es erscheint deshalb natürlich, daß für wachsende Abstände die Wechselwirkung zwischen ihnen immer unwesentlicher wird, bis sie schließlich ganz vernachlässigt werden kann und die im Resultat eines Streuprozesses auftretenden realen Teilchen als frei betrachtet werden können. Man muß allerdings berücksichtigen (wie dies beispielsweise aus der klassischen Elektrodynamik wohlbekannt ist), daß selbst freie Teilchen mit dem von ihnen selbst erzeugten Feld wechselwirken. In der Quantentheorie führt dies zu einer Änderung des Grund- oder Vakuumzustandes (siehe z. B. die Behandlung der statischen Quelle im Abschnitt 12.4.). Man sagt deshalb manchmal, daß die Teilchen mit dem Vakuum (der freien Felder) wie mit einer Art physikalischem Medium, in dem sie sich bewegen, wechselwirken. Ungeachtet dessen, daß die Wechselwirkung möglicherweise schwach ist, sind diese Wechselwirkungseffekte

wegen der Kleinheit der Teilchen groß und wachsen im Falle punktförmiger Teilchen über jede endliche Schranke an.

Aus diesem Grunde ist das Konzept der „nackten“, d. h. nicht einmal mit dem Vakuum wechselwirkenden Teilchen unbefriedigend. Stattdessen scheint es wünschenswert, von Anfang an mit den realen wechselwirkenden Teilchen zu arbeiten und den künstlichen Begriff fiktiver freier Teilchen zu vermeiden. Ein solches Programm liegt in gewissem Maße dem axiomatischen Aufbau der Quantenfeldtheorie zu Grunde.

Die konstruktive Durchführung dieses Vorhabens stößt jedoch auf ernsthafte mathematische Schwierigkeiten. Das hängt letztlich damit zusammen, daß die einzige, hinreichend ausgearbeitete Methode zur Untersuchung wechselwirkender Quantenfelder gegenwärtig noch immer die Störungstheorie ist. Diese basiert auf der Näherung wechselwirkungsfreier Felder, die durch ein System linearer Gleichungen beschrieben werden. Alle nichtlinearen Beiträge, denen in der Lagrange-Dichte kubische, trilineare und Strukturen höherer Ordnung entsprechen — die also die Wechselwirkung der Felder untereinander sowie nichtlineare Selbstwechselwirkungseffekte beschreiben (siehe die Abschnitte 10.2. und 19.4.) — müssen dabei als kleine Störungen behandelt werden können. Die in diesen Gliedern auftretenden Konstanten der Wechselwirkung, die gewöhnlich als Kopplungskonstanten bezeichnet werden, sind dabei als kleine Parameter anzusehen und dienen als Entwicklungsparameter für die Störungsrechnung. Man muß dazu bemerken, daß dabei stillschweigend vorausgesetzt wird, daß eine solche Entwicklung in eine Reihe nach Potenzen der Kopplungskonstanten zulässig ist. Eine derartige Annahme beinhaltet faktisch zwei Hypothesen:

a) Die physikalischen Lösungen der (quantisierten) Feldgleichungen sind *adiabatisch*, d. h., es existiert ihr Grenzwert im Falle verschwindender Kopplungskonstanten.

b) Die adiabatischen Lösungen sind in einer endlichen Umgebung des Nullpunktes im Raum der Kopplungskonstanten *analytisch* (oder von einer hinreichend schwachen Nichtanalytizität).

Diese Hypothesen gehen, historisch gesehen, auf die Quantenelektrodynamik zurück, d. h. auf eine Quantenfeldtheorie, die die Wechselwirkung elektrisch geladener Teilchen mit dem elektromagnetischen Feld beschreibt. In diesem Fall tritt als Kopplungskonstante die elektrische Elementarladung e auf, und der Entwicklungsparameter der Störungstheorie ist zur Feinstrukturkonstanten proportional, die in dem von uns verwendeten Einheitensystem durch $\alpha = e^2/4\pi$ gegeben ist. Tatsächlich ist der Entwicklungsparameter aber α/π und hat die Größenordnung 10^{-3} (siehe z.B. (30.5)). Die höheren Glieder der Störungstheorie führen deshalb in der Quantenelektrodynamik zu zahlenmäßig sehr kleinen Korrekturen jener Ausdrücke, die man bei Berücksichtigung lediglich der ersten nichtverschwindenden Ordnungen der Störungstheorie erhält. Solche Ausdrücke wurden bereits Ende der zwanziger Jahre berechnet und lieferten für die physikalischen Größen Werte, die sehr gut mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Die Zulässigkeit der Störungstheorie wurde daher in der Quantenelektrodynamik nicht in Zweifel gezogen.

Aus diesem Grunde erschien auch die Hypothese a) in der Quantenelektrodynamik stets als sehr natürlich. Das führte dazu, daß sie faktisch auch für andere Wechselwirkungen als gültig angesehen wurde. Aus den gleichen Erwägungen heraus wurde auch die Hypothese b) in der Quantenelektrodynamik niemals an-

gezweifelt. Vom heutigen Standpunkt aus ist es allerdings umstritten, ob beide Hypothesen auch in der starken Wechselwirkung gelten, da sie einigen in den vergangenen Jahren konstruierten lösbaren quantenfeldtheoretischen Modellen widersprechen.

Ungeachtet dessen werden wir im folgenden die quantenfeldtheoretische Störungstheorie zur Berechnung von Matrixelementen und Übergangswahrscheinlichkeiten darlegen. Wie wir weiter unten sehen werden (siehe Vorlesungen 30. bis 33.), führen diese Methoden zu außerordentlich guten Resultaten in der Quantenelektrodynamik, in der einheitlichen Theorie der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung, und mit einigen Vorbehalten und Komplikationen auch in der Quantenchromodynamik, die zur Beschreibung der starken Wechselwirkung im Gebiet hinreichend hoher Energien herangezogen wird.

14.2. Das Wechselwirkungsbild

Falls ein System von Quantenfeldern keiner Wechselwirkung unterliegt, wird sein Zustand Ψ durch eine zu (14.2) analoge Gleichung beschrieben

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = H_0\Psi(t)\,. \tag{14.3}$$

Die formale Integration ergibt

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t}\,\Phi; \tag{14.4}$$

wobei der zeitlich konstante Zustand Φ bereits in Vorlesung 6. eingeführt wurde.

Für ein System mit Wechselwirkung ist es offensichtlich, daß der Ausdruck (14.4) der Bewegungsgleichung

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = (H_0 + H_1)\,\Psi(t) \tag{14.5}$$

nicht genügt. Das läßt sich jedoch erzwingen, wenn wir annehmen, daß Φ von der Zeit abhängt

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t}\,\Phi(t)\,. \tag{14.6}$$

Wenn wir (14.6) in (14.5) einsetzen, dann erhalten wir

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\,H_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t}\,\Phi(t)\,. \tag{14.7}$$

Worin besteht nun der physikalische Gehalt der soeben abgeleiteten Gleichung? Die Dichte $\mathcal{H}(\boldsymbol{x})$ des Hamilton-Operators der Wechselwirkung

$$H_1 = \int \mathcal{H}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,,$$

(aus Gründen der Platzeinsparung lassen wir den unteren Index 1 unter dem Integral weg), die letztlich in die rechte Seite der Gleichungen (14.5) und (14.7) eingeht, ist im Schrödinger-Bild gewöhnlich ein Polynom der Feldoperatoren:

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{x}) = \prod_\alpha u_\alpha(\boldsymbol{x}) = \prod_\alpha u_\alpha(x)|_{x^0=0}\,.$$

Gemäß (6.20) gilt aber

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathcal{H}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t} = \prod_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\,u_\alpha(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t} = \prod_\alpha u_\alpha(x)\,,$$

wobei die Größen $u_\alpha(x)$ die Feldoperatoren im Heisenberg-Bild bezüglich des freien Hamilton-Operators H_0 sind. Der Operator $e^{iH_0t} \cdots e^{-iH_0t}$ substituiert deshalb den freien Feldoperatoren im Schrödinger-Bild $u(\boldsymbol{x}) = u(0, \boldsymbol{x})$ durch den freien Feldoperatoren im Heisenberg-Bild $u(t, \boldsymbol{x}) = u(x)$.

Für den neuen Zustand $\Phi(t)$ haben wir jetzt gemäß (14.7)

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H(t)\, \Phi(t) , \tag{14.8}$$

wobei die räumliche Dichte $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(t, \boldsymbol{x})$ des Operators

$$H(t) = \int \mathcal{H}(x)\, d\boldsymbol{x} \tag{14.9}$$

von den freien Feldern im Heisenberg-Bild abhängt. Dies ist die Darstellung der Schrödinger-Gleichung im *Wechselwirkungsbild* (gelegentlich findet man hierfür auch die Bezeichnung Dirac-Bild).

Wenden wir uns nun dem Erwartungswert eines dynamischen Operators B zu,

$$\overline{B}_t = \overset{*}{\Psi}(t)\, B \Psi(t) = \overset{*}{\Phi}(t)\, e^{iH_0t}\, B\, e^{-iH_0t}\, \Phi(t) ,$$

so sehen wir, daß er auch als Erwartungswert des Ausdrucks

$$e^{iH_0t}\, B\, e^{-iH_0t} = B_{\mathrm{Int}}(t) , \tag{14.10}$$

im Zustand $\Phi(t)$ geschrieben werden kann. Es ist daher angemessen, den Operator (14.10) als Darstellung der dynamischen Variablen B im Wechselwirkungsbild oder kurz als *Wechselwirkungsdarstellung von B* zu bezeichnen.

Die Wechselwirkungsdarstellung des Wechselwirkungs-Hamilton-Operators H_1 ist dann durch

$$e^{iH_0t}\, H_1\, e^{-iH_0t} = H_{\mathrm{Int}}(t) = H(t) \tag{14.11}$$

gegeben. Die den dynamischen Größen zugeordneten Operatoren sind im Wechselwirkungsbild Funktionen der Feldoperatoren $u(x)$ im Heisenberg-Bild der *freien* Felder.

14.3. Die Streumatrix

Die Gleichung (14.8) gestattet es uns, bereits an dieser Stelle eine äußerst wichtige Größe der Quantenfeldtheorie einzuführen, und zwar die sogenannte *Streumatrix* oder kurz *S-Matrix*. Hierzu stellen wir uns vor, wir würden einen Prozeß untersuchen, zu dessen Beginn und an dessen Ende nur weit voneinander entfernte Teilchen auftreten, die nach den Überlegungen des Abschnitts 14.1. als freie Teilchen angesehen werden können. Um die Wahrscheinlichkeitsamplitude der in einem solchen Prozeß stattfindenden Streuungen und gegenseitigen Umwandlungen von Teilchen berechnen zu können, nehmen wir daher an, daß die Wechselwirkung $H_1(t)$ in unendlich ferner Vergangenheit ($t \to -\infty$) adiabatisch eingeschaltet und in unendlich ferner Zukunft ($t \to +\infty$) adiabatisch ausgeschaltet werde. Bezeichnen wir den Anfangszustand mit $\Phi(-\infty)$, und den Endzustand mit $\Phi(+\infty)$, so können wir sie durch die Relation

$$\Phi(+\infty) = S\Phi(-\infty) \tag{14.12}$$

miteinander in Beziehung setzen. Der Operator S wird *Streuoperator* genannt. Es ist klar, daß dieser Operator durch die Gesamtheit seiner Matrixelemente (Über-

gangsamplituden)

$$S_{\alpha\beta} = \langle\beta\,|S|\,\alpha\rangle$$

charakterisiert ist, wobei $|\alpha\rangle$ ein beliebiger, durch die Gesamtheit der Quantenzahlen $\{\alpha\} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ bestimmter Anfangszustand, und $|\beta\rangle$ ein entsprechender Endzustand ist (die Quantenzahlen $\{\alpha\}$ bzw. $\{\beta\}$ können dabei sowohl eine diskrete als auch stetige Menge durchlaufen). Das Betragsquadrat $|S_{\beta\alpha}|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit eines Überganges von $|\alpha\rangle$ nach $|\beta\rangle$ an. Der Operator S kann somit durch eine Matrix unendlichen Ranges mit den Elementen $S_{\beta\alpha}$ dargestellt werden und wird deshalb gewöhnlich *Streumatrix* genannt.

Um einen expliziten Ausdruck für den Streuoperator zu erhalten, betrachten wir die Schrödinger-Gleichung im Wechselwirkungsbild und suchen ihre formale Lösung in Gestalt einer Reihe nach Potenzen der Wechselwirkung H_1. Als nullte Näherung wählen wir den Anfangszustand $\Phi(t_0)$ zu einem „Anfangs"-Zeitpunkt $t = t_0$. Wir erhalten dann

$$\Phi(t) = S(t, t_0)\, \Phi(t_0)\,, \tag{14.13}$$

wobei $S(t, t_0)$ durch die formale Reihe

$$\begin{aligned} S(t, t_0) = 1 &- \mathrm{i} \int_{t_0}^{t} H(t')\, \mathrm{d}t' \\ &+ (-\mathrm{i})^2 \int_{t_0}^{t} H(t')\, \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} H(t'')\, \mathrm{d}t'' + \cdots \\ &\cdots + (-\mathrm{i})^n \int_{t_0}^{t} H(t_1)\, \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} H(t_2)\, \mathrm{d}t_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_n)\, \mathrm{d}t_n + \cdots \end{aligned} \tag{14.14}$$

gegeben ist.

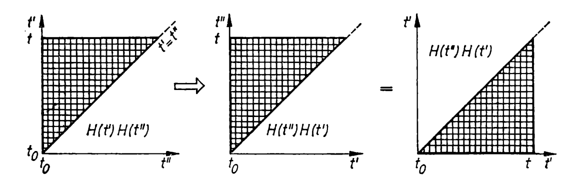


Abb. 14.1
Die Änderung des Integrationsgebietes bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge in der zweiten Ordnung der Störungstheorie für die Streumatrix (siehe Formel (14.14))

Die Glieder der Entwicklung (14.14) lassen sich nun in bemerkenswerter Weise umgruppieren. Wir führen dies am Beispiel des dritten Summanden der rechten Seite vor. Wenn wir die Bezeichnung der Integrationsvariablen ändern ($t' \leftrightarrow t''$) und die Integrationsreihenfolge vertauschen, dann erhalten wir (siehe Abb. 14.1)

$$\int_{t_0}^{t} H(t')\, \mathrm{d}t \int_{t_0}^{t'} H(t'')\, \mathrm{d}t'' = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t''\, H(t'')\, H(t')\,.$$

Stellt man nun den ursprünglichen Ausdruck als halbe Summe desselben und des umgeformten Ausdrucks dar, so ergibt sich:

$$\int_{t_0}^{t} H(t')\, \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} H(t'')\, \mathrm{d}t'' = \tfrac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t \left\{ \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\, H(t')\, H(t'') + \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t''\, H(t'')\, H(t') \right\}.$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer läßt folgende kompakte Darstellung zu:

$$\{...\} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'' \, \mathrm{T}\{H(t') \, H(t'')\} ,$$

wenn wir

$$\mathrm{T}\{H(t') \, H(t'')\} \equiv \begin{cases} H(t') \, H(t'') & t' > t'' , \\ H(t'') \, H(t') & t'' > t' \end{cases} \tag{14.15}$$

als Symbol des *chronologischen* oder *zeitgeordneten Produkts* einführen. Das allgemeine n-te Glied auf der rechten Seite von (14.14) kann dann in der Form

$$\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \ldots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n \, \mathrm{T}\{H(t_1) \, H(t_2) \ldots H(t_n)\}$$

geschrieben werden, wobei $\mathrm{T}\{H(t_1) \ldots H(t_n)\}$ für eine beliebige Folge von Zeitargumenten als Produkt der Hamilton-Operatoren entsprechend der Größe ihrer Zeitargumente von links nach rechts wie folgt definiert ist:

$$\mathrm{T}\{H(t_1) \ldots H(t_n)\} = H(t_\alpha) \, H(t_\beta) \ldots H(t_\sigma) \, H(t_\varrho) , \tag{14.16}$$

$$t_\alpha \geqq t_\beta \geqq \ldots \geqq t_\sigma \geqq t_\varrho .$$

Wenn wir nun jedes Glied der rechten Seite von (14.14) unter Verwendung des T-Produkts darstellen und das Symbol T vor die Integrale schreiben, so führt dies zu

$$\begin{aligned} S(t_1, t_0) &= \mathrm{T}\left\{1 + \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{t_0}^{t_1} H(t) \, \mathrm{d}(t) + \frac{1}{\mathrm{i}^n n!}\left[\int_{t_0}^{t_1} H(t) \, \mathrm{d}t\right]^n + \ldots\right\} \\ &= \mathrm{T}\left\{\exp\left[\frac{1}{\mathrm{i}} \int_{t_0}^{t_1} H(t) \, \mathrm{d}t\right]\right\} = \mathrm{T}\left\{\exp\left[\frac{1}{\mathrm{i}} \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, H(t, \boldsymbol{x})\right]\right\}, \end{aligned} \tag{14.17}$$

der sogenannten *zeitgeordneten Exponentialfunktion.*

14.4. Zeitgeordnete Produkte

Der Ausdruck (14.17) enthält zeitgeordnete Produkte von Hamilton-Dichten $\mathcal{H}(t, \boldsymbol{x}) = \mathcal{H}(x)$. Solche Produkte von Operatorausdrücken, die von den Raum-Zeit-Punkten abhängen, sind als unmittelbare Verallgemeinerungen der Definitionen (14.16) aufzufassen. Wir ziehen allerdings einen anderen Zugang vor und gehen vom T-Produkt lokaler Feldoperatoren aus.

Das zeitgeordnete Produkt von n Feldoperatoren $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$, ... , $u_n(x_n)$ ist das Produkt dieser Operatoren in derjenigen Reihenfolge, in der die Zeitargumente von links nach rechts nicht anwachsen. Falls ein Teil der Operatoren der Fermi-Dirac-Statistik gehorcht, wird ein genereller noch festzulegender Vorzeichenfaktor zugelassen. Hierzu ist folgendes zu bemerken. Die zeitliche Reihenfolge zweier Punkte x_i, x_j ist kein relativistisch invarianter Begriff, falls diese Punkte raumartig zueinander liegen ($x_i \sim x_j$). Die gegebene Definition wird daher nur für

solche Operatoren lorentz-invariant sein, die außerhalb des Lichtkegels (anti-) kommutieren

$$u_i(x_i)\, u_j(x_j) = \eta u_j(x_j)\, u_i(x_i)\,, \qquad x_i \sim x_j\,, \qquad \eta = \pm 1\,. \tag{14.18}$$

Solche Operatoren bezeichnet man als *lokale Feldoperatoren.* Für diese Operatoren sind z.B. die positiv- und negativ-frequenten Anteile $u^{\pm}$ nicht lokal. Für lokale Operatoren $u_1, \dots, u_n$ gilt nach Definition:

$$\mathrm{T}\big(u_1(x_1)\, u_2(x_2) \dots u_n(x_n)\big) = \eta u_{i_1}(x_{i_1}) \dots u_{i_n}(x_{i_n})\,, \tag{14.19}$$
$$x_{i_1} \gtrsim x_{i_2} \gtrsim \cdots \gtrsim x_{i_n}\,.$$

Hierbei bedeutet die Relation $x \gtrsim y$, daß der Punkt x im oberen Lichtkegel (Vorwärtskegel) des Punktes y oder raumartig zu ihm liegt, η ist gleich $(-1)^p$, wobei p die Parität der Permutation der Fermi-Operatoren beim Übergang von der Folge $(1, 2, \dots, n)$ in die Folge $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ angibt.

Wir können nun das zeitgeordnete Produkt lokaler Operatorausdrücke $A_1(x_1) \dots A_n(x_n)$ folgendermaßen definieren:

$$\mathrm{T}\big(A_1(x_1) \dots A_n(x_n)\big) = \eta A_{i_1}(x_{i_1}) \dots A_{i_n}(x_{i_n})\,, \tag{14.20}$$
$$x_{i_1} \gtrsim x_{i_2} \gtrsim \cdots \gtrsim x_{i_n}\,.$$

Unter lokalen Operatorausdrücken $A_u(x)$ des Feldes $u(x)$ verstehen wir solche Operatoren, die vom Feldoperator $u(x)$ und dessen Ableitungen im Punkte x (jedoch nicht von $u^{\pm}(x)$) abhängen und mit dem Feldoperator in dazu raumartig gelegenen Punkten y (anti-)kommutieren

$$\{A_u(x), u(y)\} = 0\,, \qquad x \sim y\,.$$

Solche Operatoren lassen sich gewöhnlich auf Normalprodukte der Feldoperatoren $u(x)$ zurückführen; sie genügen daher selbst der Bedingung der lokalen (Anti-)Kommutativität

$$A_i(x)\, A_j(y) = \eta A_j(y)\, A_i(x)\,, \qquad x \sim y\,. \tag{14.21}$$

Infolgedessen ist die Definition (14.20) widerspruchsfrei.

Hier muß man allerdings folgendes anmerken. Die (Anti-)Kommutatoren (14.21) sind gewöhnlich im Punkt $x = y$ singulär. Die zeitgeordneten Produkte (14.19) und (14.20) sind deshalb beim Zusammenfallen von zwei oder mehreren ihrer Argumente $(x_1, \dots, x_n)$ nicht wohldefiniert. Diese Unbestimmtheit kann in verschiedener Weise ausgenutzt werden (siehe hierzu Vorlesung 16.).

Im weiteren werden wir diejenigen Operatoren $A(x)$, die eine gerade Anzahl von Fermi-Operatoren enthalten, als lokale Bose-Operatoren oder einfach lokale Operatoren, bezeichnen, während wir Operatorausdrücke mit einer ungeraden Anzahl von Fermi-Operatoren als lokale Fermi-Operatoren bezeichnen. Beispiele für lokale Operatorausdrücke sind die Lagrange-Dichte $\mathscr{L}(x)$, der Energie-Impuls-Tensor und der Stromvektor.

14.5. Die zeitgeordnete Exponentialfunktion

Wir kehren nun zur Betrachtung der Streumatrix (14.12) zurück. Wir sehen, daß man S aus dem Operator $S(t_1, t_0)$ erhält, wenn t_1 gegen $+\infty$ und t_0 gegen $-\infty$ strebt. Berücksichtigen wir noch, daß sich die Hamilton-Funktion von der La-

grange-Funktion für solche Modelle, die keine Ableitungen der Feldfunktionen in der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte $\mathscr{L}(x)$ enthalten, nur durch das Vorzeichen unterscheidet,

$$H(t) = -L(t) = -\int \mathscr{L}(x)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,,$$

so erhalten wir

$$S = S(\infty, -\infty) = \mathrm{T} \exp \cdot \left(\mathrm{i} \int \mathrm{d}x\, \mathscr{L}(x)\right) = \mathrm{T}\, \mathrm{e}^{i\mathcal{A}}\,. \tag{14.22}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{A}$ denjenigen Teil der Wirkung des Systems, der dessen Wechselwirkung beschreibt.

Hier erscheint es angebracht, folgende *Warnung* auszusprechen. Beim Betrachten von Ausdrücken, wie sie auf der rechten Seite von Gl. (14.22) stehen, könnte man auf die Idee kommen, den von der Zeit nicht explizit abhängenden Faktor $\mathcal{A}$ aus dem Symbol des T-Produkts herauszunehmen. Deshalb erinnern wir daran, daß ein solcher Faktor gemäß den gegebenen Definitionen (siehe (14.17)) immer als Integral eines lokalen Operatorausdruckes aufzufassen und das Symbol T *unter* das Integrationszeichen zu ziehen ist. Somit hat z. B. das zweite Glied der Reihenentwicklung in (14.22) die Gestalt

$$\mathrm{T}(\mathcal{A}^2) \equiv \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, \mathrm{T}\big(\mathscr{L}(x), \mathscr{L}(y)\big)\,. \tag{14.23}$$

Zum Schluß bemerken wir noch folgendes: Obwohl wir die zeitgeordnete Exponentialfunktion der Lagrange-Dichte (14.22) über die Schrödinger-Gleichung und die T-geordnete Exponentialfunktion des Hamilton-Operators (14.17) erhalten haben, bleibt der Ausdruck (14.22) auch dann gültig, wenn die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte Ableitungen der Felder enthält. In diesem Falle erhält man die S-Matrix in der Gestalt (14.22), wenn man von einer Reihe allgemeiner Forderungen wie Kausalität, Unitarität, relativistischer Invarianz und dem Korrespondenzprinzip ausgeht (siehe Vorlesung 15.). Andererseits bereitet die Einführung des Hamilton-Operators gewisse Schwierigkeiten (ausführlicher dazu siehe [1], Kapitel VII). Wir werden deshalb im folgenden Gl. (14.22) ohne weitere Kommentare verwenden.

15. Allgemeine Eigenschaften der S-Matrix

15.1. Die Streumatrix als Funktional

Wie wir bereits in der vorangegangenen Vorlesung ausführten, kann man, der ursprünglichen Idee Heisenbergs folgend, die einem unendlich großen Zeitintervall ($t_0 = -\infty$, $t_1 = \infty$) entsprechende S-Matrix einführen, ohne dabei die Schrödinger-Gleichung, den Hamilton-Operator und den Operator $S(t_1, t_0)$ für endliche Zeiten t_1 und t_0 zu benutzen. An ihrer Stelle werden in diesem Zugang zur Bestimmung der S-Matrix sehr allgemeine, explizit formulierbare physikalische Prinzipien zugrunde gelegt, und zwar:

a) die Kausalität,
b) die Unitarität,
c) die relativistische Kovarianz und
d) das Korrespondenzprinzip.

Diese Prinzipien werden als Axiome betrachtet. Eine solche Ableitung der S-Matrix geht auf Arbeiten von STÜCKELBERG und BOGOLJUBOV zu Beginn der fünfziger Jahre zurück und wird allgemein als *axiomatischer Zugang* bezeichnet (siehe [1], §§ 20 und 52 sowie [7]). In der Vorlesung 16. werden wir den physikalischen Inhalt und die mathematische Formulierung dieser Axiome erörtern und in Analogie zu (14.22) eine Formel für die S-Matrix erhalten.

Dabei erweist es sich als unumgänglich, die S-Matrix als *Funktional* klassischer Hilfsfunktionen zu betrachten. Die durch (14.22) definierte Streumatrix hängt naturgemäß lediglich von den wechselwirkenden Quantenfeldern im gesamten Raum-Zeit-Kontinuum, nicht aber von irgendwelchen klassischen Funktionen ab. Deshalb können auch ihre Matrixelemente keinerlei funktionale Abhängigkeit aufweisen; erst vermöge der Einführung zusätzlicher, unquantisierter Felder in die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte werden die S-Matrix und ihre Matrixelemente zu Funktionalen. Mit Hilfe funktionaler Ableitungen der S-Matrix nach diesen Feldern können wir dann die raum-zeitlichen Eigenschaften verschiedener, in die Theorie eingehender Größen (z.B. die Kausalitätsbedingung) untersuchen. Diese „klassischen Felder" spielen dabei die Rolle von Hilfsgrößen, die nur in den Zwischenbetrachtungen auftreten und aus dem Endergebnis durch einen entsprechenden Grenzübergang eliminiert werden.

Ein solches klassisches Hilfsfeld kann man als vorgegebenes äußeres Feld $u_{\text{ext}}(x)$ oder als vorgegebenen äußeren Strom $J_{\text{ext}}(x)$ irgendwelcher Teilchen einführen. Zum Beispiel führt man bei der Untersuchung geladener Teilchen im äußeren elektromagnetischen Feld ein äußeres, nicht quantisiertes elektromagnetisches Potential in die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte ein

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}(A_{\text{ext}}) = e :\bar{\psi}(x)\, \gamma^\nu \psi\, \big(A_\nu(x) + A_\nu^{\text{ext}}(x)\big): . \tag{15.1}$$

Die Streumatrix wird dadurch ein Funktional

$$S \to S(A_{\text{ext}}) .$$

Ein physikalisch weniger anschauliches, aber technisch sehr bequemes Verfahren besteht darin, als klassische Funktion eine „Funktion des Wechselwirkungsgebietes" $g(x)$ in die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte einzuführen. Mit Hilfe dieser Funktion kann man das „Ein- und Ausschalten" der Wechselwirkung formalisieren. Zur mathematischen Formulierung dieser Operationen nehmen wir an, daß die Funktion $g(x)$ jedem Raum-Zeit-Punkt x einen Wert aus dem Intervall $[0, 1]$ zuordnet, der charakterisiert, mit welcher Stärke die Wechselwirkung eingeschaltet ist: In Gebieten mit $g(x) = 0$ fehlt die Wechselwirkung völlig, in Gebieten mit $g(x) = 1$ ist sie vollständig und für $0 < g(x) < 1$ nur teilweise eingeschaltet. Das Ersetzen des „wahren" Wechselwirkungsterms $\mathcal{L}$ durch das Produkt $\mathcal{L}(x)\, g(x)$ führt auf eine Wechselwirkung, die „mit der Intensität $g(x)$ eingeschaltet" ist.

Falls wir annehmen, daß g nur in einem bestimmten endlichen Raum-Zeit-Gebiet von Null verschieden ist, so können wir die Felder in hinreichend ferner Vergangenheit und Zukunft als frei betrachten. Deshalb kann der End- und Anfangszustand eines solchen dynamischen Systems mittels der gewöhnlichen zeitlich konstanten Zustände beschrieben werden, wie sie bei der Quantisierung freier Felder eingeführt wurden. Die Zustände $\Phi(-\infty)$ und $\Phi(+\infty)$ werden mittels des S-Operators zueinander in Beziehung gesetzt, der $\Phi(-\infty)$ in $\Phi(+\infty)$ überführt und vom Verhalten der Funktion g abhängt. Halten wir den Anfangszustand fest $\big(\Phi(-\infty) = \Phi\big)$, so können wir den Endzustand als Funktional von g auffassen

$$\Phi(\infty) = \Phi(g) = S(g)\, \Phi . \tag{15.2}$$

Gemäß dieser Definition hat man $S(g)$ als diejenige Streumatrix aufzufassen, bei der die Wechselwirkung mit der Intensität g eingeschaltet ist. Die reale Situation, die dem vollständigen Einschalten der Wechselwirkung im gesamten Raum-Zeit-Kontinuum entspricht, wird hierbei mittels eines Grenzprozesses erfaßt, bei dem sich das Gebiet mit vollständig eingeschalteter Wechselwirkung ($g = 1$) ständig erweitert, bis es im Grenzfall das gesamte Raum-Zeit-Kontinuum umfaßt. Die gewöhnliche S-Matrix ergibt sich deshalb zu

$$S = S(1)\,. \tag{15.3}$$

Im Weiteren werden wir oft den Begriff der *funktionalen Ableitung*, der eine natürliche Verallgemeinerung der partiellen Ableitung darstellt, benötigen. Die partielle Ableitung einer Funktion f von n Variablen $z_1, \dots, z_n$ kann man bekanntlich als Koeffizient von $\mathrm{d}z_i$ im Differential $\mathrm{d}f$ dieser Funktion definieren:

$$\mathrm{d}f = \sum_i R_i \,\mathrm{d}z_i\,. \tag{*}$$

Betrachten wir nun ein Funktional $I(u)$, dessen (erste) Variation $\delta I(y)$ bei einer infinitesimalen Änderung $\delta u(x)$ durch das zu δu proportionale Glied von $I(u + \delta u) - I(u)$ gegeben ist und als Integral in der Gestalt

$$\delta I(u) = \int_G R(x, u)\,\delta u \,\mathrm{d}x$$

dargestellt werden kann. Hierbei ist $R(x, u)$ ein Funktional von u, das von der Lage des Punktes x im Gebiet G abhängt; es stellt eine natürliche Verallgemeinerung der Koeffizienten $R_i(z_1, \dots, z_n)$ in (*) auf den Fall „kontinuierlicher Indizes x" dar. Wir führen nun in Analogie zur eben dargelegten Definition der partiellen Ableitung den Begriff der Funktionalableitung des Funktionals $I(u)$ nach u im Punkte x wie folgt ein:

$$\frac{\delta I(u)}{\delta u(x)} = R(x, u)\,.$$

Auf dieselbe Weise kann man auch Funktionalableitungen höherer Ordnungen definieren. Es läßt sich auch zeigen, daß die funktionalen Ableitungen im wesentlichen dieselben Eigenschaften besitzen wie die gewöhnlichen Ableitungen.

15.2. Relativistische Kovarianz und Unitarität

Wir wollen nun die grundlegenden physikalischen Forderungen formulieren, denen die S-Matrix genügen muß. Eine besonders wichtige physikalische Forderung ist die *relativistische Kovarianz*. Um diese explizit formulieren zu können, betrachten wir eine inhomogene Lorentz-Transformation P, d. h. ein Element der Poincaré-Gruppe

$$x \to x' = Px\,. \tag{15.4}$$

Im Fall wechselwirkungsfreier Felder transformiert sich der Zustand gegenüber der Transformation (15.4) gemäß (6.22)

$$\Phi' = U_P \Phi\,, \tag{15.5}$$

wobei U_P eine unitäre Darstellung der Poincaré-Gruppe im Zustandsraum des physikalischen Systems ist. Wenn jedoch, wie in unserem Falle, der Zustand explizit von einer Funktion abhängt, $\Phi = \Phi(g)$, dann haben wir zu beachten, daß

die Transformation (15.4) auch die Funktion $g(x)$ ändert. Letztere kann man dabei als ein „klassisches skalares Feld" betrachten. Da das durch die Funktion g beschriebene Wechselwirkungsgebiet selbst unter der Transformation (15.4) unverändert bleibt, führt der Übergang zu den neuen Koordinaten im Argument von g zu

$$g(x) \to Pg(x) = g(P^{-1}x) . \tag{15.6}$$

Das Transformationsgesetz für den Zustand $\Phi(g)$ hat deshalb die Gestalt

$$\Phi(g) \to \Phi'(Pg) = U_P\Phi(g) . \tag{15.7}$$

Um die relativistische Kovarianz der Theorie zu sichern, fordern wir, daß die Relation (15.2), die den Anfangs- in den Endzustand überführt, nicht vom Bezugssystem abhängt, d. h., es muß gelten

$$\Phi'(g) = S(g)\,\Phi' .$$

Wenn man in diese Beziehung unter Berücksichtigung von (15.2) die Ausdrücke (15.5) und (15.7), letzteren mit verschobenem Argument ($Pg \to g$), einsetzt, dann folgt

$$U_P S(P^{-1}g)\,\Phi = S(g)\,U_P\Phi .$$

Da der Anfangszustand Φ ein beliebiges Element des Zustandsraumes der freien Teilchen ist, kann diese Gleichung auch als Operatorgleichung

$$U_P S(P^{-1}g) = S(g)\,U_P$$

geschrieben werden. Nach Verschiebung der Argumente um P, Rechtsmultiplikation mit U_P^{-1} und Berücksichtigung der Unitarität von U_P erhalten wir endgültig

$$S(Pg) = U_P S(g)\,U_P^{-1} = U_P S(g)\,\overset{+}{U}_P . \tag{15.8}$$

Diese Formel ist die *Kovarianzbedingung* für den Streuoperator $S(g)$.

Eine weitere unerläßliche allgemeine Forderung besteht in der Erhaltung der Norm des Zustands. In unserem Falle bedeutet diese Forderung

$$\overset{*}{\Phi}(g)\,\Phi(g) = \overset{*}{\Phi}\Phi .$$

Hieraus folgt, unter der Voraussetzung, daß der Operator S umkehrbar ist (also ein eindeutiges Inverses hat)

$$\overset{+}{S}(g)\,S(g) = S(g)\,\overset{+}{S}(g) = 1 , \tag{15.9}$$

d. h., der Operator $S(g)$ muß unitär sein.

Nach den Ausführungen der Vorlesung 14. kann man diese *Unitaritätsbedingung* auch in der Form

$$\sum_\gamma S_{\beta\gamma}(g)\,\overset{+}{S}_{\gamma\alpha}(g) = I_{\beta\alpha} \tag{15.9'}$$

schreiben, wobei $\sum_\gamma$ gleichermaßen die Summation über alle diskreten und die Integration über alle stetigen Quantenzahlen beinhaltet, die den Zustand $|\gamma\rangle$ charakterisieren; ferner ist $I_{\beta\alpha}$ gleich dem Produkt aller zugehörigen Kronecker-Symbole und Diracschen δ-Funktionen.

15.3. Die Kausalitätsbedingung

Wir haben nun noch dafür zu sorgen, daß auch die Kausalitätsbedingung erfüllt ist, d. h., es ist zu garantieren, daß Änderungen der Wechselwirkung in irgendeinem Raum-Zeit-Gebiet G lediglich die Entwicklung des Systems in solchen Punkten beeinflussen können, die bezüglich G zeitartig später liegen.

Zur expliziten Formulierung der Kausalitätsbedingung betrachten wir zunächst den Fall, daß das Raum-Zeit-Gebiet G, in dem die Funktion g von Null verschieden ist, aus zwei voneinander getrennten Gebieten G_1 und G_2 besteht. Dabei sollen bezüglich eines bestimmten Zeitpunktes $t = \tau$ alle Punkte des einen Gebietes (G_1) in der Vergangenheit, und alle Punkte des anderen Gebietes (G_2) in der Zukunft liegen (Abb. 15.1). Die Funktion g kann dann als Summe zweier Funktionen

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) \tag{15.10}$$

dargestellt werden, wobei g_1 nur in G_1 und g_2 nur in G_2 von Null verschieden sind.

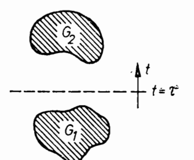


Abb. 15.1
Illustration der gegenseitigen Lage der Wechselwirkungsgebiete in Formel (15.13)

Betrachten wir einen Zustand zum Zeitpunkt τ, dann darf Φ_τ aus Gründen der Kausalität nicht von der Wechselwirkung im Gebiet G_2 abhängen. Er kann deshalb in der Gestalt

$$\Phi_\tau = S(g_1)\,\Phi \tag{15.11}$$

dargestellt werden, wobei $S(g_1)$ die Streumatrix bezeichnet, die dem Einschalten der Wechselwirkung mit der Intensität g_1 entspricht. Der Endzustand $\Phi(g)$ ergibt sich aus Φ_τ durch Anwendung des Operators $S(g_2)$, der durch die Wechselwirkung im Gebiet G_2 bestimmt ist:

$$\Phi(g) = S(g_2)\,\Phi_\tau\,. \tag{15.12}$$

Durch Vergleich von (15.10) bis (15.12) mit (15.2) finden wir

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)\,S(g_1)\,, \quad \text{falls} \quad G_2 > G_1\,. \tag{15.13}$$

(Die Ungleichung $G_2 > G_1$ bedeutet, daß alle Punkte des Gebietes G_2 zeitlich später als sämtliche Punkte des Gebietes G_1 liegen.) Mit Gl. (15.13) haben wir das Kausalitätsprinzip für den Fall $G_2 > G_1$ formuliert.

Wenn andererseits $G_1 \sim G_2$ gilt, d. h., wenn alle Punkte des Gebietes G_1 raumartig zu allen Punkten des Gebietes G_2 liegen (Abb. 15.2), dann kann die zeitliche Ordnung dieser Gebiete durch eine geeignete Lorentz-Transformation geändert werden. Deshalb gilt

$$S(g_1)\,S(g_2) = S(g_2)\,S(g_1) \quad \text{für} \quad G_1 \sim G_2\,. \tag{15.14}$$

Die Gleichungen (15.13) und (15.14) sind *globale Formulierungen der Kausalitätsbedingung* mit Hilfe des Operators $S(g)$ im Ganzen. Für viele theoretische Über-

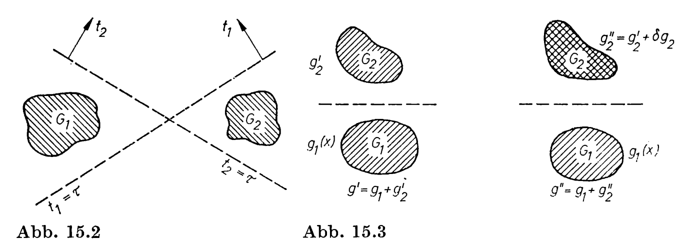


Abb. 15.2 Abb. 15.3

Abb. 15.2
Die gegenseitige Lage der Wechselwirkungsgebiete für den der Formel (15.14) entsprechenden Fall

Abb. 15.3
Eine Illustration zur Herleitung der differentiellen Kausalitätsbedingung

legungen und Anwendungen ist jedoch eine differentielle Form der Kausalitätsbedingung günstiger.

15.4. Die Kausalitätsbedingung in differentieller Form

Um die Kausalitätsbedingung in differentieller Form zu erhalten, betrachten wir zwei Systeme, die sich voneinander nur durch die Stärke der Wechselwirkung im Gebiet G_2 unterscheiden, aber durch ein und dieselbe Funktion in G_1 beschrieben werden (Abb. 15.3):

$$g'(x) = g_2'(x) + g_1(x)\,, \qquad g''(x) = g_2''(x) + g_1(x)\,.$$

Durch Einsetzen von g' und g'' kann man sich unter Beachtung von (15.13) und (15.14) leicht davon überzeugen, daß der Ausdruck $S(g'')\,\overset{+}{S}(g')$ nicht vom Verhalten der Funktionen g' und g'' im Gebiet G_1 abhängt. Aus (15.13) folgt

$$\overset{+}{S}(g_1 + g_2) = \overset{+}{S}(g_1)\,\overset{+}{S}(g_2) \quad \text{falls} \quad G_2 > G_1\,,$$

und unter Berücksichtigung der Unitarität von $S(g_1)$ ergibt sich unmittelbar

$$S(g'')\,\overset{+}{S}(g') = S(g_2'')\,S(g_1)\,\overset{+}{S}(g_1)\,\overset{+}{S}(g_2') = S(g_2'')\,\overset{+}{S}(g_2')\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Die Ursache für diesen Sachverhalt ist, daß die Abhängigkeit der Matrix $S(g'')$ vom Zustand des Systems vor dem Zeitpunkt t durch den entsprechenden Teil des Operators $\overset{+}{S}(g)$ kompensiert wird. Wir können daher die Kausalitätsbedingung im allgemeinen Fall folgendermaßen formulieren:

Falls uns zwei Funktionen $g''(x)$ und $g'(x)$ gegeben sind, die bei vorgegebenem t für alle $x^0 < t$ zusammenfallen, dann darf das Produkt $S(g'')\,\overset{+}{S}(g')$ nicht von einer gleichzeitigen Änderung der Funktionen g' und g'' um ein und dieselbe Größe im Gebiet $x^0 < t$ abhängen.

Wir können nun die Kausalitätsbedingung in der differentiellen Form herleiten. Dazu setzen wir $g'(y) = g(y)$ und $g''(y) = g(y) + \delta g(y)$, wobei $\delta g(y)$ eine infinitesi-

male, nur für $y^0 > t$ von Null verschiedene Variation der Funktion g ist. Damit läßt sich $S(g'')$ in der Form

$$S(g'') = S(g) + \delta S(g)$$

mit

$$\delta S(g) = \int\limits_{y^0 > t} \frac{\delta S}{\delta g(y)} \delta g(y) \, \mathrm{d}y$$

darstellen. Hieraus ist ersichtlich, daß das Produkt

$$S(g'') \overset{+}{S}(g') = S(g) \overset{+}{S}(g) + \delta S(g) \overset{+}{S}(g) = 1 + \delta S(g) \overset{+}{S}(g)$$

nicht vom Verhalten der Funktion g für $x^0 < t < y^0$ abhängt.

Unter Benutzung der Variationsableitung können wir deshalb die Kausalitätsbedingung als Forderung nach Unabhängigkeit des Ausdrucks

$$H(y; g) = \mathrm{i} \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \overset{+}{S}(g) \tag{15.15}$$

vom Verhalten der Funktion $g(x)$ im Punkt x für $x < y$ formulieren. Wegen der relativistischen Kovarianz folgt hieraus außerdem, daß der Operator (15.15) nicht vom Verhalten der Funktion $g(x)$ für $x \sim y$ abhängen darf.

Das *Kausalitätsprinzip in der differentiellen Form* können wir endgültig in folgender Weise formulieren:

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \overset{+}{S}(g) \right) = 0 \quad \text{für} \quad x \lesssim y \,. \tag{15.16}$$

Damit haben wir nunmehr die Bedingungen der relativistischen Kovarianz, der Unitarität und der Kausalität als Forderungen an die S-Matrix formuliert. Diese Bedingungen bilden zusammen eine hinreichende Grundlage für die Konstruktion der S-Matrix.

16. Die axiomatische Konstruktion der S-Matrix

16.1. Die Entwicklung nach Potenzen der Wechselwirkung

Wir wenden uns im folgenden der Konstruktion eines Operators $S(g)$ zu, der den Bedingungen der Kovarianz (15.8), Unitarität (15.9) und Kausalität (15.16) genügt. Dabei werden wir es vermeiden, uns auf die in Vorlesung 14. durchgeführten Erörterungen zu stützen. Insbesondere werden wir die Kenntnis der aus der Schrödinger-Gleichung hergeleiteten Formel (14.22) ignorieren.

Wir entwickeln den Operator $S(g)$ formal in folgende funktionale Reihe nach Potenzen von g:

$$S(g) = 1 + \sum_{n \geqq 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) \, g(x_1) \dots g(x_n) \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \,, \tag{16.1}$$

wobei die $S_n(x_1, \dots, x_n)$ operatorwertige Funktionen sind, die von den vollständigen Feldfunktionen $u(x_1), \dots, u(x_n)$ und deren partiellen Ableitungen, nicht aber von

$u^{\pm}$ abhängen; ferner gehen Fermi-Operatoren nur in geradzahligen Kombinationen in S_n ein. Operatorausdrücke, die diese beiden Eigenschaften besitzen, werden wir polylokal nennen. Für zwei *polylokale Operatoren* $A(x_1, \ldots, x_n)$ und $B(y_1, \ldots, y_m)$ gilt

$$[A(x_1, \ldots, x_n), B(y_1, \ldots, y_m)] = 0 \quad \text{falls} \quad x_i \sim y_j\,,$$

d. h. falls alle x_i raumartig zu jedem der y_j liegen.

In unserem Falle drückt die Bedingung

$$[S_n(x_1, \ldots, x_n), S_m(y_1, \ldots, y_m)] = 0 \qquad (x_i \sim y_j) \tag{16.2}$$

einen wichtigen physikalischen Sachverhalt aus. Wenn zwei Funktionen g_1 und g_2 in solchen Raum-Zeit-Gebieten lokalisiert sind, daß ein beliebiger Punkt des einen Gebiets raumartig zu allen Punkten des anderen liegt, dann kommutiert $S(g_1)$ mit $S(g_2)$. Dieser Umstand spiegelt die Tatsache wider, daß sich ein Signal in Übereinstimmung mit dem Kausalitätsprinzip nicht mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten kann.

Die Betrachtung des Ausdrucks (16.1) lehrt uns, daß man die S_n, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, als symmetrische Funktionen der Argumente $x_1, \ldots, x_n$ ansehen kann, da die Gewichtsfunktion $g(x_1), \ldots, g(x_n)$ in (1) symmetrisch eingehen.

16.2. Die Bedingungen an die Entwicklungskoeffizienten S_n

Um die konkrete Gestalt der Funktionen S_n bestimmen zu können, müssen wir die Entwicklung (16.1) in die Gleichungen (15.8), (15.9) und (15.16) einsetzen. Die Kovarianzforderung führt zu der folgenden linearen Bedingung

$$U_P S_n(x_1, \ldots, x_n) \overset{+}{U}_P = S_n(Px_1, \ldots, Px_n)\,, \tag{16.3}$$

während aus der Unitaritätsbedingung die nichtlineare Relation

$$\begin{aligned} &S_n(x_1, \ldots, x_n) + \overset{+}{S}_n(x_1, \ldots, x_n) \\ &+ \sum_k P(x_1, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n)\, S_k(x_1, \ldots, x_k)\, \overset{+}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{16.4}$$

folgt. Hierbei ist $\overset{+}{S}_n$ der zu S_n hermitesch konjugierte Operator, und das Symbol $P(x_1, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n)$ steht für die Summe über alle $n!/k!(n-k)!$ Zerlegungen der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in zwei Untermengen aus jeweils k bzw. $(n-k)$ Punkten. Dabei werden die Permutationen innerhalb jeder dieser Untermengen nicht berücksichtigt, da die Funktionen S_k bezüglich ihrer Argumente symmetrisch sind. So gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2 \mid x_3)\, S_2(x_1, x_2)\, S_1(x_3) = {} & S_2(x_1, x_2)\, S_1(x_3) \\ & + S_2(x_1, x_3)\, S_1(x_2) + S_2(x_2, x_3)\, S_1(x_1)\,. \end{aligned}$$

Aus der Kausalitätsbedingung erhalten wir die Gleichung

$$H_n(y; x_1, \ldots, x_n) = 0\,, \tag{16.5}$$

falls mindestens ein x_j $(j = 1, \ldots, n)$ existiert, so daß $y \gtrsim x_j$ gilt.

Hierbei sind die H_n die Entwicklungskoeffizienten des Operators (15.15)

$$H(y; g) = \sum_{n \geqq 0} \frac{1}{n!} \int H_n(y; x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1) \ldots g(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n\,, \tag{16.6}$$

die mit den S_n über die nichtlineare Relation

$$H_n(y; x_1, \ldots, x_n) = i \sum_{0 \leqq k \leqq n} P(x_1, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n) \times S_{k+1}(y; x_1, \ldots, x_k)\, \overset{+}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n) \tag{16.7}$$

zusammenhängen.

Aus dem bisher Gesagten ist ersichtlich, daß die Bedingungen (16.2) und (16.3) die allgemeinen Eigenschaften der lokalen Kommutativität und Kovarianz der Operatorfunktionen S_n ausdrücken. Dagegen sind die nichtlinearen Bedingungen (16.4) und (16.5) als rekursive Gleichungssysteme anzusehen, mit deren Hilfe die Funktionen S_n Schritt für Schritt aus ihren „Vorgängern" S_k $(1 \leqq k \leqq n-1)$ konstruiert werden können.

Als Ausgangspunkt der Rekursion dient dabei $S_1(x)$. Aus der Unitaritätsbedingung (16.4) erhalten wir

$$S_1(x) = i\mathcal{L}(x)\,, \tag{16.8}$$

wobei $\mathcal{L}$ ein hermitescher Operator sein muß. Aus der Formel (16.3) folgt für $n = 1$ die relativistische Kovarianz von $\mathcal{L}$, während die Relation (16.2) für $n = m = 1$ auf die *Forderung der lokalen Vertauschbarkeit* des Operators $\mathcal{L}$,

$$[\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)] = 0 \qquad (x \sim y) \tag{16.9}$$

führt. Als Spezialfall der Forderung (16.2) führt sie zu wesentlichen Einschränkungen der möglichen Struktur des Operators $\mathcal{L}(x)$, der im axiomatischen Zugang die Rolle der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte spielt. Aus (16.9) folgt nämlich, daß $\mathcal{L}(x)$ von einer geraden Anzahl von Fermi-Feldern abhängen muß, wobei stets die vollständigen Felder in $\mathcal{L}(x)$ eingehen (und nicht deren einzelne Frequenzanteile). Operatorkonstruktionen, die von den Feldern in einem Punkt x abhängen, haben wir im Abschnitt 14.3. lokal genannt. Die Forderung der lokalen Vertauschbarkeit führt also dazu, daß die Lagrange-Dichte der Wechselwirkung lokal sein muß.

16.3. Die explizite Gestalt von S_2 und S_3

Um die Gestalt von S_2 zu finden, schreiben wir die Kausalitätsbedingung (16.5) für $n = 1$ auf

$$S_2(x, y) + S_1(x)\, \overset{+}{S}_1(y) = S_2(x, y) + \mathcal{L}(x)\, \mathcal{L}(y) = 0$$

und erhalten hieraus

$$S_2(x, y) = -\mathcal{L}(x)\, \mathcal{L}(y) \quad \text{für} \quad x \gtrsim y\,.$$

Wegen der Symmetrie von S_2 folgt unmittelbar

$$S_2(x, y) = -\mathcal{L}(y)\, \mathcal{L}(x) \quad \text{für} \quad y \gtrsim x\,.$$

Die Definitionsbereiche dieser beiden Formeln überschneiden sich, falls $x \sim y$; die Verträglichkeit beider Ausdrücke führt zur lokalen Vertauschbarkeit (16.9). Andererseits definieren diese Relationen S_2 für alle Werte von x und y, mit Aus-

nahme der Punkte $x = y$, und es gilt offenbar

$$S_2(x, y) = i^2 T(\mathscr{L}(x)\, \mathscr{L}(y))\,.$$

Offensichtlich wird das Verhalten von S_2 für zusammenfallende Argumente nicht durch die Rekursionsrelationen bestimmt. Wir können deshalb schreiben:

$$S_2(x, y) = i^2 T(\mathscr{L}(x)\, \mathscr{L}(y)) + i\Lambda_2(x, y)\,, \tag{16.10}$$

wobei für den hiermit eingeführten Operator Λ_2 gemäß seiner Definition gilt:

$$\Lambda_2(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq y\,. \tag{16.11}$$

Ein solcher Operator wird *quasilokal* genannt. Im allgemeinen Fall wird ein von n Argumenten abhängender quasilokaler Operator durch die folgende Relation definiert:

$$\Lambda_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{16.12}$$

überall, mit Ausnahme der Punkte $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Durch Einsetzen von (16.10) in die Unitaritätsbedingung (15.9) ergibt sich, daß der Operator $i\Lambda_2$ antihermitesch und damit Λ_2 hermitesch sein muß:

$$\overset{+}{\Lambda}_2(x, y) = \Lambda_2(x, y)\,.$$

Wir sehen nunmehr, daß es die in der Vorlesung 15. eingeführten Axiome ermöglichten, den Operator S_2 bis auf einen quasilokalen antihermiteschen Operator $i\Lambda_2$ mit Hilfe des Operators erster Ordnung S_1 zu bestimmen. Man kann zeigen, daß eine solche Situation auch für höhere S_n ($n \geqq 3$) typisch ist (siehe [1], § 21). So gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} S_3(x, y, z) = {} & i^3 T(\mathscr{L}(x)\, \mathscr{L}(y)\, \mathscr{L}(z)) \\ & + i^2 T(\mathscr{L}(x)\, \Lambda_2(y, z)) + i^2 T(\mathscr{L}(y)\, \Lambda_2(x, z)) \\ & + i^2 T(\mathscr{L}(z)\, \Lambda_2(x, y)) + i\Lambda_3(x, y, z)\,, \end{aligned} \tag{16.13}$$

wobei Λ_3 ebenfalls einen hermiteschen quasilokalen Operator bezeichnet.

16.4. Die allgemeine Form von $S(g)$

Im allgemeinen Fall läßt sich S_n als Summe von Gliedern dreier verschiedener Typen darstellen, und zwar erstens dem T-Produkt der Operatoren $\mathscr{L}(x_1), \dots, \mathscr{L}(x_n)$, ferner einer Summe von T-Produkten verschiedener $\mathscr{L}(x_i)$ und quasilokaler Operatoren $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}$ und schließlich dem „neuen" quasilokalen Operator Λ_n

$$\begin{aligned} S_n(x_1, \dots, x_n) = {} & i^n T(\mathscr{L}(x_1)\, \mathscr{L}(x_2) \dots \mathscr{L}(x_n)) \\ & + \Pi\, T\{\mathscr{L}, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1}\} + i\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)\,. \end{aligned} \tag{16.14}$$

Vergleichen wir nun die Formeln (16.8), (16.10), (16.13) und (16.14) mit der in Vorlesung 14. angegebenen Entwicklung der zeitgeordneten Exponentialfunktion, dann erkennen wir, daß die Terme

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T(\mathscr{L}(x_1) \dots \mathscr{L}(x_n))$$

auf die Formel

$$S(g) = T[\exp (i \textstyle\int \mathscr{L}(x)\, g(x)\, dx] \tag{16.15}$$

führen, die im Grenzfall $g \to 1$ mit (14.22) übereinstimmt, falls $\mathcal{L}$ die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte ist. Der Ausdruck (16.15) genügt allen Anforderungen, die wir an die S_n gestellt haben, und ist in diesem Sinne zulässig; er repräsentiert jedoch *nicht die allgemeinste Form* von $S(g)$. Wie wir gesehen haben, ist es zur Bestimmung der Ausdrücke für $S_1, S_2, \dots, S_n$ notwendig, neben dem lokalen Operator $\mathcal{L}(x)$ noch einen Satz quasilokaler Operatoren

$$\Lambda_2(x_1, x_2), \dots, \Lambda_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

anzugeben.

Dieses Resultat mag auf den ersten Blick befremdlich erscheinen: Für die vollständige Definition der Matrix $S(g)$ reicht die Vorgabe der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte nicht aus, man hat darüber hinaus einen unendlichen Satz quasilokaler Operatoren Λ_n einzuführen. Allerdings kann man zeigen, daß der vollständige Ausdruck für $S(g)$ von der Gestalt

$$\mathrm{T}\big(\exp\left(\mathrm{i} \int \mathcal{L}(x; g)\, \mathrm{d}x\right)\big) \tag{16.16}$$

ist, wobei die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(x; g)$ folgendermaßen definiert ist:

$$\mathcal{L}(x; g) = \mathcal{L}(x)\, g(x) + \sum_{\nu \geqq 1} \frac{1}{(\nu + 1)!} \times \int \Lambda_{\nu+1}(x, x_1, \dots, x_\nu)\, g(x)\, g(x_1) \dots g(x_\nu)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_\nu\,. \tag{16.17}$$

Wegen des quasilokalen Charakters der Funktionen Λ_ν sind alle Integrationen in (16.17) trivial, und $\mathcal{L}(x; g)$ hängt faktisch von den Feldern $u(x)$ jeweils nur im Punkte x ab und ist deshalb ein lokaler Operator. Außerdem hängt $\mathcal{L}(x; g)$ noch von der Funktion $g(x)$ ab. Da man letztere als „klassisches" Feld betrachten kann, genügt (16.16) allen Anforderungen an $S(g)$ und kann deshalb als allgemeinste Formel für die Streumatrix angesehen werden. Entwickeln wir (16.16) nach Potenzen von g, so erhalten wir die Darstellung (16.14) für die $S_n(x_1, \dots, x_n)$, welche alle gestellten Forderungen erfüllt.

Wenn wir nun zum physikalischen Grenzfall $g = 1$ übergehen, erhalten wir

$$S = S(1) = \mathrm{T}\big(\exp\left(i \int \mathcal{L}(x; 1)\, \mathrm{d}x\right)\big)\,, \tag{16.18}$$

wobei

$$\mathcal{L}(x; 1) = \mathcal{L}(x) + \sum_{\nu} \frac{1}{(\nu + 1)!} \int \Lambda_{\nu+1}(x, x_1, \dots, x_\nu)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_\nu\,. \tag{16.19}$$

Wir sehen also, daß die reale Streumatrix $S(1)$ vollständig durch die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte des Systems $\mathcal{L}(x; 1)$ charakterisiert ist. In der Störungstheorie gibt man $\mathcal{L}(x; 1)$ gelegentlich in Form einer formalen Potenzreihe an.

17. Das Wick-Theorem

17.1. Normalform von Operatorausdrücken

Bevor wir uns der Berechnung von S-Matrix-Elementen zuwenden, wollen wir eine Reihe algebraischer Eigenschaften von Operatorausdrücken studieren, die aus quantisierten freien Feldern aufgebaut sind. Offensichtlich ist es für die Be-

rechnung von Matrixelementen vorteilhaft, wenn die entsprechenden Operatorausdrücke als Normalprodukte vorliegen. Wir legen deshalb im folgenden dar, wie solche Ausdrücke als Summe von Normalprodukten dargestellt werden können. Dabei betrachten wir zunächst die Umformung von gewöhnlichen Produkten (erstes Wick-Theorem) und anschließend die Umformung der in die Streumatrix eingehenden zeitgeordneten Produkte (zweites Wick-Theorem).

Um die polynomial von den Feldoperatoren abhängenden Operatorausdrücke in Normalprodukte überführen zu können, ist es offenbar ausreichend, Monome der Art $A_1(x_1) \ldots A_n(x_n)$ umformen zu können, in denen die $A(x)$ lineare Operatoren sind, d. h. linear von den entsprechenden $u^+(x)$ und $u^-(x)$ abhängen.

In jedem konkreten Fall bereitet die Umformung eines solchen Produkts keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Man muß nur Schritt für Schritt alle u^+ nach links, und alle u^- nach rechts bringen und bei jedem Schritt die Vertauschungsrelationen beachten. Dabei erhält man jedoch schon für eine relativ kleine Anzahl n von Feldern eine recht große Anzahl von Gliedern. Es ist deshalb wünschenswert, ein allgemeines Rezept zu haben, das diese Umformung in Normalprodukte weitestgehend formalisiert. Ein solches Rezept wird durch das folgende wichtige Theorem gegeben, das erstmals von Wick formuliert wurde.

17.2. Das erste Wick-Theorem

Vorgegeben sei das Produkt zweier linearer Operatoren $A(x) \cdot B(y)$. Um dieses in das Normalprodukt überzuführen, ist es offenbar ausreichend, die Operatoren $u^-(x)$ und $u^+(y)$ einmal miteinander zu vertauschen. Wir erhalten hierbei Glieder mit der „richtigen" Reihenfolge der positiv- und negativ-frequenten Anteile der Feldoperatoren sowie einen zusätzlichen Summanden, der von den Kommutatorfunktionen abhängt, jedoch keine Operatorausdrücke mehr enthält.

Infolgedessen unterscheidet sich das betrachtete Produkt vom Normalprodukt $:A(x) \cdot B(y):$ nur durch einen komplexwertigen Summanden (vgl. die Ausführungen in Abschnitt 8.2.). Diesen werden wir im folgenden als *Kontraktion* bezeichnen und durch eine untere eckige Klammer kennzeichnen, die angibt, welche Operatoren kontrahiert werden

$$A(x)\, B(y) = :A(x)\, B(y): + \underbrace{A(x)\, B(y)} . \tag{17.1}$$

Da der Vakuumerwartungswert eines Normalprodukts stets Null ist, können wir die Kontraktion auch als Vakuumerwartungswert des gewöhnlichen Produkts definieren

$$\underbrace{A(x)\, B(y)} = \langle A(x)\, B(y) \rangle_0 . \tag{17.2}$$

Als Beispiel wollen wir das reelle skalare Feld betrachten. Wenn wir von der Vertauschungsrelation

$$\varphi^-(x)\, \varphi^+(y) - \varphi^+(y)\, \varphi^-(x) = -\mathrm{i}D^-(x-y)$$

für die unterschiedlichen Frequenzanteile des Feldoperators ausgehen, erhalten wir

$$\varphi(x)\, \varphi(y) = :\varphi(x)\, \varphi(y): - \mathrm{i}D^-(x-y) . \tag{17.3}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} &\underbracket{\varphi(x)\,\varphi}(y) = \langle\varphi(x)\,\varphi(y)\rangle_0 = \underbracket{\varphi^-(x)\,\varphi}^+(y) = -\mathrm{i}D^-(x-y)\,,\\ &\underbracket{\varphi^+(x)\,\varphi}^-(y) = 0\,. \end{aligned} \tag{17.4}$$

Auf analoge Weise bekommt man für das elektromagnetische Feld

$$\underbracket{A_\nu(x)\,A}_\mu(y) = \langle A_\nu(x)\,A_\mu(y)\rangle_0 = \mathrm{i}g_{\nu\mu}D_0^-(x-y)\,. \tag{17.5}$$

Betrachten wir nun ein Fermi-Feld. Hier gilt

$$\psi_\alpha^-(x)\,\overline{\psi}_\beta^+(y) = -\overline{\psi}_\beta^+(y)\,\psi_\alpha^-(x) - \mathrm{i}S_{\alpha\beta}^-(x-y)\,, \tag{17.6}$$

und es ergeben sich folgende Relationen:

$$\underbracket{\psi_\alpha(x)\,\overline{\psi}}_\beta(y) = -\mathrm{i}S_{\alpha\beta}^-(x-y) \tag{17.7}$$

und

$$\underbracket{\overline{\psi}_\alpha(x)\,\psi}_\beta(y) = -\mathrm{i}S_{\beta\alpha}^+(y-x) \tag{17.8}$$

sowie

$$\underbracket{\psi(x)\,\psi}(y) = \underbracket{\overline{\psi}(x)\,\overline{\psi}}(y) = 0\,. \tag{17.9}$$

Um das Wicksche Theorem formulieren zu können, benötigen wir noch den Begriff des *Normalprodukts mit Kontraktion.* Dieser wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} &:A_1(x_1)\,A_2(x_2)\,\ldots\,\underbracket{A_j(x_j)\,\ldots\,A}_i(x_i)\,\ldots\,A_n(x_n):\\ &\equiv \eta\underbracket{A_j(x_j)\,A}_i(x_i)\,:A_1(x_1)\,\ldots\,A_{j-1}A_{j+1}\,\ldots\,A_{i-1}A_{i+1}\,\ldots\,A_n:\,, \end{aligned} \tag{17.10}$$

wobei $\eta = (-1)^p$ ist und p die Parität der Fermi-Vertauschungen bezeichnet, die dem Übergang von der Indexfolge $1, \ldots, j-1, j, j+1, \ldots, i-1, i, i+1, \ldots, n$ in die Folge $j, i, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ entspricht. Auf völlig analoge Weise kann auch das Normalprodukt mit einer beliebigen Anzahl von Kontraktionen eingeführt werden. Der Ausdruck

$$:A_1(x_1)\,A_2(x_2)\,A_3(x_3)\,\ldots\,A_k(x_k)\,\ldots\,A_{n-1}(x_{n-1})\,A_n(x_n):$$

(Kontraktionen: A_1 mit A_k, A_2 mit A_{n-1})

ist als Produkt aller angegebenen Kontraktionen mit dem Normalprodukt der nicht kontrahierten Operatoren und der Zahl $\eta = (-1)^p$ definiert, also

$$\eta\underbracket{A_1A}_k\underbracket{A_2A}_{n-1}\;:A_3\,\ldots\,A_{k-1}A_{k+1}\,\ldots\,A_{n-2}A_n:$$

(p steht wiederum für die Parität der Permutation, die notwendig ist, um die in den Kontraktionen enthaltenen Fermi-Operatoren vor das Zeichen des Normalprodukts zu bringen). Zum Beispiel gilt

$$:\overline{\psi}_\alpha(x)\,\overline{\psi}_\beta(y)\,\psi_\gamma(z)\,\psi_\delta(t): = -\underbracket{\overline{\psi}_\alpha(x)\,\psi}_\gamma(z)\,\underbracket{\overline{\psi}_\beta(y)\,\psi}_\delta(t) = S_{\gamma\alpha}^+(z-x)\,S_{\delta\beta}^+(t-y)\,.$$

(Kontraktionen links: $\overline{\psi}_\alpha(x)$ mit $\psi_\gamma(z)$, $\overline{\psi}_\beta(y)$ mit $\psi_\delta(t)$)

Aus der gegebenen Definition folgt unmittelbar, daß das Normalprodukt mit Kontraktionen bezüglich aller seiner Faktoren linear ist, und daß Vertauschungen von Operatoren im Normalprodukt zum Auftreten eines Faktors $\eta = (-1)^p$ führen, wobei p die Parität der erforderlichen Vertauschungen von Fermi-Operatoren angibt.

Wir können nunmehr eine einfache Formulierung des *ersten Wickschen Theorems* angeben:

Das gewöhnliche Produkt von linearen Operatoren ist gleich der Summe aller entsprechenden Normalprodukte mit allen möglichen Kontraktionen, eingeschlossen das Normalprodukt ohne Kontraktionen

$$A_1 \dots A_n = :A_1 \dots A_n: + \sum_{i \neq j} :A_1 \dots \underbrace{A_i \dots A_j} \dots A_n: \\ + \sum_{i,j,k,l} :A_1 \dots A_i^{\bullet} \dots A_j^{\bullet\bullet} \dots A_k^{\bullet} \dots A_l^{\bullet\bullet} \dots A_n: + \dots \,. \tag{17.11}$$

Es ist leicht zu sehen, daß dieses Theorem auch in dem Fall anwendbar bleibt, wenn einige Multiplikanden selbst Normalprodukte sind

$$A_1 \dots A_\nu \; :A_{\nu+1} \dots A_\mu: \dots A_k \dots :A_\varrho \dots A_n: \,.$$

Die einzige Änderung in der Formulierung des Theorems im Vergleich zum Fall des „reinen“ Produkts $A_1 \dots A_n$ besteht dann offensichtlich darin, daß man Kontraktionen zwischen Faktoren, die zu ein und demselben Normalprodukt gehören, nicht zu berücksichtigen braucht, z.B. sind also Kontraktionen zwischen $A_{\nu+1}, \dots$ $\dots, A_\mu$ und Kontraktionen zwischen $A_\varrho, \dots, A_n$ usw. wegzulassen.

17.3. Zeitgeordnete Kontraktionen

Bei der Berechnung von S-Matrix-Elementen müssen wir mit zeitgeordneten Produkten von Lagrange-Dichten operieren. Dazu ist es notwendig, T-Produkte von lokalen Operatorausdrücken durch Normalprodukte der entsprechenden Operatoren der freien Felder auszudrücken. Das Rezept zur Vereinfachung von zeitgeordneten Produkten liefert das Wicksche Theorem für T-Produkte, das ein Analogon zum Wickschen Theorem für gewöhnliche Produkte ist. Bevor wir zum Beweis dieses Theorems übergehen können, müssen wir den Begriff der zeitgeordneten Kontraktion von Operatoren einführen.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Formel (14.19) für den Fall zweier Feldoperatoren

$$\mathrm{T}\big(u_1(x)\, u_2(y)\big) = \begin{cases} u_1(x)\, u_2(y)\,, & x^0 > y^0\,, \\ \eta u_2(y)\, u_1(x)\,, & y^0 > x^0\,. \end{cases}$$

Unter Verwendung der gewöhnlichen Kontraktion (17.1) kann man die rechte Seite in die Form

$$\mathrm{T}\big(u_1(x)\, u_2(y)\big) = \begin{cases} :u_1(x)\, u_2(y): + \underbrace{u_1(x)\, u_2(y)}\,, & x^0 > y^0\,, \\ :u_1(x)\, u_2(y): + \eta \underbrace{u_2(y)\, u_1(x)}\,, & y^0 > x^0 \end{cases} \tag{17.12}$$

bringen. Aus (17.12) ist ersichtlich, daß sich $\mathrm{T}\big(u_1(x)\, u_2(y)\big)$ in jedem Falle von $:u_1(x)\, u_2(y):$ um einen c-Zahl-Ausdruck unterscheidet, der *zeitgeordnete Kontraktion*

der Operatoren u_1 und u_2 genannt wird. Es gilt also laut Definition

$$\mathrm{T}\big(u_1(x)\, u_2(y)\big) = :u_1(x)\, u_2(y): + \overline{u_1(x)\, u_2(y)} \tag{17.13}$$

mit

$$\overline{u_1(x)\, u_2(y)} = \begin{cases} \underline{u_1(x)\, u_2(y)}\,, & x^0 > y^0\,, \\ \eta \underline{u_2(y)\, u_1(x)}\,, & y^0 > x^0\,. \end{cases} \tag{17.14}$$

Die zeitgeordnete Kontraktion weist eine wichtige Besonderheit auf: In ihr kann man, genau wie auch im Normalprodukt, die Reihenfolge von Faktoren gemäß

$$\overline{u_1(x)\, u_2(y)} = \eta \overline{u_2(y)\, u_1(x)}$$

ändern; dies folgt unmittelbar aus (17.14).

Um die zeitgeordneten Kontraktionen für die wichtigsten Feldtypen zu bestimmen, benutzen wir das Verschwinden des Vakuumerwartungswertes von Normalprodukten und die Normierungseigenschaft des Vakuumzustandes. Die Bildung des Vakuumerwartungswertes von (17.13) ergibt

$$\langle \mathrm{T}\big(u_1(x)\, u_2(y)\big)\rangle_0 = \overline{u_1(x)\, u_2(y)} \tag{17.15}$$

und zeigt somit, daß die zeitgeordnete Kontraktion zweier Operatoren gleich dem Vakuumerwartungswert des T-Produkts dieser Operatoren ist. Hieraus folgt für das skalare Feld

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\overline{\varphi(x)\, \varphi(y)} &= \mathrm{i}\langle \mathrm{T}\varphi(x)\, \varphi(y)\rangle_0 \\ &= \Theta(x^0 - y^0)\, D^-(x-y) - \Theta(y^0 - x^0)\, D^+(x-y)\,, \end{aligned} \tag{17.16}$$

für das elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\overline{A_\nu(x)\, A_\mu(y)} &= \mathrm{i}\langle \mathrm{T}A_\nu(x)\, A_\mu(y)\rangle_0 \\ &= -g_{\nu\mu}\Theta(x^0 - y^0)\, D_0^-(x-y) + g_{\nu\mu}\Theta(y^0 - x^0)\, D_0^+(x-y)\,, \end{aligned} \tag{17.17}$$

für das Spinorfeld

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\overline{\psi_\alpha(x)\, \bar\psi_\beta(y)} &= \mathrm{i}\langle \mathrm{T}\psi_\alpha(x)\, \bar\psi_\beta(y)\rangle_0 \\ &= \Theta(x^0 - y^0)\, S^-_{\alpha\beta}(x-y) - \Theta(y^0 - x^0)\, S^+_{\alpha\beta}(x-y) \end{aligned} \tag{17.18}$$

usw. (die Θ-Funktion ist in (A V.3) definiert). In Abschnitt 18.2. werden wir zeigen, daß die rechten Seiten dieser Relationen Lösungen der entsprechenden inhomogenen Feldgleichungen, also Green-Funktionen, sind.

Es ist wichtig zu bemerken, daß die rechten Seiten der Gleichungen des Typs (17.14) bisher nur für $x^0 > y^0$ und $x^0 < y^0$ definiert wurden. Wegen der Kovarianz der T-Produkte folgt hieraus, daß sie, außer im Punkt $x = y$, überall definiert sind. Ihre Definition kann im Punkt $x = y$ im Sinne verallgemeinerter Funktionen beliebig vorgegeben werden. So ist es z.B. möglich, zur rechten Seite jeder dieser Gleichungen eine beliebige Koeffizientenfunktion des quasilokalen Operators $P(\partial_x)\, \delta(x - y)$ hinzuzufügen, wobei $P(\partial_x)$ irgendein Polynom in $\partial_x = \partial/\partial x$ ist. Die Notwendigkeit dieser zusätzlichen Definition der Kontraktion in einer unendlich kleinen Umgebung des Punktes $x = y$ ist eine Folge der in der Definition des T-Produkts enthaltenen Willkür: Die Definitionen (14.20) und (17.12) fixieren das T-Produkt nur dann, wenn dessen Argumente nicht zusammenfallen.

17.4. Das zweite Wick-Theorem

Dieses Theorem macht Aussagen über zeitgeordnete Produkte. Es lautet:

Das T-*Produkt von n linearen Operatoren ist gleich der Summe ihrer Normalprodukte mit allen möglichen zeitgeordneten Kontraktionen einschließlich des Gliedes ohne Kontraktionen.*

Der Beweis stützt sich wesentlich auf das Wicksche Theorem für gewöhnliche Produkte: Gemäß Definition (14.20) ist das T-Produkt stets gleich irgendeinem gewöhnlichen Produkt:

$$\mathrm{T}\big(A_1(x_1) \dots A_n(x_n)\big) = \eta A_{j_1}(x_{j_1}) \dots A_{j_n}(x_{j_n}) \, .$$

Nach dem ersten Wickschen Theorem kann dieses Produkt als Summe der Normalprodukte der Operatoren $A_{j_1}, \dots, A_{j_n}$ mit allen möglichen gewöhnlichen Kontraktionen dargestellt werden. Da aber die Operatoren im vorliegenden Produkt per definitionem zeitgeordnet sind, fallen die gewöhnlichen mit den zeitgeordneten Kontraktionen zusammen, d. h., das betrachtete T-Produkt ist gleich der mit η multiplizierten Summe aller Normalprodukte der Operatoren $A_{j_1}, \dots, A_{j_n}$ mit allen möglichen zeitgeordneten Kontraktionen. Nun kann man aber, wie wir bereits bemerkt hatten, sowohl in einer zeitgeordneten Kontraktion als auch innerhalb eines Normalprodukts Operatoren beliebig vertauschen, wobei sich gegebenenfalls das Vorzeichen ändert. Daher ist es also möglich, in den auftretenden Normalprodukten mit allen möglichen zeitgeordneten Kontraktionen die anfängliche Reihenfolge der Faktoren 1, 2, ... wieder herzustellen. Dabei fällt der Faktor η weg, und das Theorem ist bewiesen.

Wir führen nun den Begriff des T-Produktes von Normalprodukten linearer Feldoperatoren ein:

$$\mathrm{T}\big(:A_1(x)\, A_2(x) \dots A_n(x): \dots : D_1(z) \dots D_m(z):\big) \, . \tag{17.19}$$

Von dieser Gestalt sind die T-Produkte, welche häufig umgeformt werden müssen, da der lokale Operator $\mathcal{L}(x)$, gemäß seiner Definition, eine Linearkombination von Gliedern der Art $:A_1(x)\, A_2(x) \dots A_n(x):$ ist. Für T-Produkte des Typs (17.19) weist die Formulierung des zweiten Wickschen Theorems nur die Besonderheit auf, daß die zeitgeordneten Kontraktionen solcher Operatoren, die in ein und dasselbe Normalprodukt eingehen, wegzulassen sind.

17.5. Das dritte Wick-Theorem

Bei praktischen Anwendungen kann man häufig von folgendem Satz Gebrauch machen:

Der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produkts von $n + 1$ linearen Operatoren $A, B_1, \dots, B_n$ ist gleich der Summe der n möglichen Vakuumerwartungswerte zeitgeordneter Produkte, die man erhält, wenn ein bestimmter Operator (beispielsweise A) *mit einem beliebigen anderen Operator* (B_i) *kontrahiert wird.*

$$\langle \mathrm{T} A B_1 \dots B_n \rangle_0 = \sum_i \langle \mathrm{T} \overbrace{A B_1 \dots B_i} \dots B_n \rangle_0 \, . \tag{17.20}$$

Diesen Satz bezeichnet man als *Wick-Theorem für Vakuumerwartungswerte* oder als *drittes Wick-Theorem.*

Es ist bemerkenswert, daß die rechte Seite von (17.20), im Unterschied zu den beiden anderen Wick-Theoremen, keine Ausdrücke mit zwei oder mehr Kontraktionen enthält. Dessen ungeachtet folgt (17.20) aus dem zweiten Wick-Theorem:

Wir wissen, daß der Vakuumerwartungswert des Normalprodukts einer beliebigen, von Null verschiedenen Anzahl nicht kontrahierter Operatoren gleich Null ist. Die linke Seite von (17.20) ist deshalb gleich der Summe aller möglichen Varianten von „vollständigen Kontraktionen" (d. h. von Ausdrücken, bei denen sämtliche Operatoren miteinander kontrahiert sind) innerhalb des Produkts der Operatoren

$$A B_1 \ldots B_n \,. \tag{17.21}$$

Auf dieselbe Weise kann ein beliebiger Summand der rechten Seite von (17.20) dargestellt werden. Das erste Glied hat z. B. das Aussehen

$$\overparen{A B_1} \langle \mathrm{T} B_2 B_3 \ldots B_n \rangle_0$$

und ist damit gleich dem Produkt der Kontraktion $\overparen{A B_1}$ mit der Summe aller möglichen vollständigen Kontraktionen der Operatoren $B_2, \ldots, B_n$. Wenn wir nun auf der rechten Seite von (17.20) die Summation über i ausführen, erhalten wir die Summe aller möglichen vollständigen Kontraktionen der Operatoren (17.21). Damit ist auch das dritte Wick-Theorem bewiesen.

Feynman-Diagramme und Feynman-Regeln

18. Green-Funktionen freier Felder

In der vorangehenden Vorlesung 17. haben wir gezeigt, daß sich die operatorwertigen Beiträge zur S-Matrix mit Hilfe des zweiten Wick-Theorems durch eine Summe von Normalprodukten mit zeitgeordneten Kontraktionen ausdrücken lassen. Letztere erweisen sich als Green-Funktionen der freien Felder.

18.1. Die Green-Funktion des skalaren Feldes

Wir zeigen zunächst, daß sich die zeitgeordnete Kontraktion der skalaren Feldoperatoren als eine Green-Funktion der zugehörigen Feldgleichung ausdrücken läßt.

Die Green-Funktion $G(x)$ des skalaren Feldes ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box_x - m^2)\, G(x) = -\delta(x)\,. \tag{18.1}$$

Für diese und die folgenden Untersuchungen legen wir fest, daß das Vorzeichen vor der δ-Funktion auf der rechten Seite der Gleichungen für die Green-Funktionen gleich dem Vorzeichen des Masseterms auf der linken Seite ist.

Nach Ausführen der Fourier-Transformation ergibt sich für G folgender Ausdruck:

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{m^2 - k^2}\, \mathrm{d}k\,. \tag{18.2}$$

Dieser Ausdruck ist unbestimmt, da der Integrand für $k^2 = m^2$ singulär wird. Es ist deshalb noch eine Vorschrift anzugeben, wie die Pole des Integranden zu umgehen sind. Diese Unbestimmtheit resultiert aus der Tatsache, daß sich die vollständige Lösung der Gleichung (1) aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und einer beliebigen Linearkombination der Lösungen D^+ und D^- der homogenen Gleichung zusammensetzt. Durch Angabe einer Vorschrift, nach der die Pole bei $k^2 = m^2$ zu umgehen sind oder durch entsprechende Randbedingungen für G selbst lassen sich die Koeffizienten dieser Linearkombination eindeutig bestimmen.

Um dies zu demonstrieren, betrachten wir die *retardierte Green-Funktion.* Sie genügt der Randbedingung

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = 0 \quad \text{für} \quad x^0 < 0\,. \tag{18.3}$$

Um D^{ret} in einer der Gleichung (18.2) entsprechenden Form darzustellen, bemerken wir, daß eine Multiplikation dieser Funktion mit $\exp(-\varepsilon x^0)$, $\varepsilon > 0$, wegen (18.3) nicht zum Auftreten neuer Singularitäten führt

$$D^{\mathrm{ret}}(x)\, \mathrm{e}^{-\varepsilon x^0} = G_\varepsilon(x)\,,$$

so daß sich D^{ret} als Grenzwert

$$D^{\text{ret}}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(x) \qquad (18.4)$$

ergibt. Die Funktion G_ε genügt gemäß ihrer Definition der Gleichung

$$\left\{\Delta - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\right)^2 - m^2\right\} G_\varepsilon(x) = -\delta(x)\,,$$

und hat daher in der Impulsdarstellung im Limes $\varepsilon \to 0$ die Gestalt

$$\frac{1}{m^2 - (k^0 + \mathrm{i}\varepsilon)^2 + \boldsymbol{k}^2} \to \frac{1}{m^2 - k^2 - 2\mathrm{i}\varepsilon k^0}.$$

Unter Berücksichtigung von (18.4) folgt hieraus, daß die retardierte Green-Funktion in der Form

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{m^2 - k^2 - 2\mathrm{i}\varepsilon k^0}\,\mathrm{d}k \qquad (18.5)$$

dargestellt werden kann.

Abb. 18.1
Integrationsweg für die Funktion D^{ret} in der komplexen k_0-Ebene

Man kann leicht zeigen, daß die Integraldarstellung (18.5) der Bedingung (18.3) genügt. Dazu hat man nur die Integration bezüglich k^0 mit Hilfe des Residuensatzes auszuführen. Die infinitesimale Größe ε im Nenner des Integranden zeigt an, daß der Integrationsweg in der komplexen k^0-Ebene oberhalb der beiden Pole herumzuführen ist (Abb. 18.1). Falls $x^0 < 0$ ist, können wir den Integrationsweg durch einen großen Halbkreis in der oberen Halbebene schließen. Da in diesem Falle keiner der beiden Pole innerhalb des Integrationsweges liegt, ist das Integral gleich Null. Falls jedoch $x^0 > 0$ ist, so müssen wir den Integrationsweg in der unteren Halbebene schließen. Durch Berechnung der Residuen erhalten wir in diesem Falle

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3\,\mathrm{i}} \int \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x_0} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0x_0}}{2k_0}\right|_{k_0=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} = D(x)\,.$$

Es gilt deshalb

$$D^{\text{ret}}(x) = \Theta(x^0)\,D(x)\,. \qquad (18.6)$$

Analog dazu kann man zeigen, daß die *avancierte Green-Funktion*, die durch die Bedingung

$$D^{\text{adv}}(x) = 0\,, \quad \text{falls} \quad x^0 > 0\,,$$

charakterisiert ist und der Gleichung (18.1) genügt, in der Form

$$D^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k}{m^2 - k^2 + 2\mathrm{i}\varepsilon k^0} = -\Theta(-x^0)\,D(x) \qquad (18.7)$$

dargestellt werden kann.

18.2. Die kausale Green-Funktion D^c

Die kausale Green-Funktion spielt in der Quantenfeldtheorie eine ausgezeichnete Rolle. Sie ist durch die rechte Seite der Gleichung (17.16) gegeben; für $x^0 > y^0$ ist sie der Funktion $D^-(x - y)$, und für $x^0 < y^0$ der Funktion $D^+(x - y)$ proportional. Man kann leicht zeigen, daß sie sich als Differenz der Lösung D^{ret} der inhomogenen Gleichung und der Lösung D^+ der homogenen Gleichung darstellen läßt

$$\Theta(x^0)\, D^-(x) - \Theta(-x^0)\, D^+(x) = D^{\text{ret}}(x) - D^+(x)\,.$$

Infolgedessen genügt sie derselben Gl. (18.1) wie auch D^{ret}.

Wir betrachten nun die Gleichung

$$D^c(x) = \Theta(x^0)\, D^-(x) - \Theta(-x^0)\, D^+(x) \tag{18.8}$$

als Definition der *kausalen Green-Funktion* D^c. Um ihre Gestalt in der Impulsdarstellung bestimmen zu können, bemerken wir, daß die Differenz $D^{\text{ret}} - D^+$ in dieser Darstellung in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{m^2 - k^2 - 2\mathrm{i}\varepsilon k^0} + 2\pi\mathrm{i}\Theta(-k^0)\,\delta(k^2 - m^2)$$
$$= \frac{\mathcal{P}}{m^2 - k^2} + \mathrm{i}\pi\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{m^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}$$

($\mathcal{P}$ bezeichnet den Hauptwert — siehe (A V.6)—(A V.8)); hieraus folgt also

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{m^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}k\,. \tag{18.9}$$

Die kausalen Green-Funktionen des elektromagnetischen Feldes, des Spinor- und des Vektorfeldes kann man aus $D^c(x)$ mit Hilfe derselben Differentialoperatoren ableiten, die auch die Ableitung der Vertauschungsfunktionen dieser Felder aus der Pauli-Jordan-Funktion gestatteten

$$\begin{aligned} &D_0^c(x) = D^c(x)|_{m=0}\,, \qquad S^c_{\alpha\beta}(x) = (\mathrm{i}\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta}\, D^c(x)\,,\\ &D^c_{\mu\nu}(x) = \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\,\partial_\mu\partial_\nu\right) D^c(x)\,, \end{aligned} \tag{18.10}$$

d. h., es gilt beispielsweise

$$S^c_{\alpha\beta}(x) = \Theta(x^0)\, S^-_{\alpha\beta}(x) - \Theta(-x^0)\, S^+_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{(m + \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\,\mathrm{d}p\,. \tag{18.11}$$

Wir wenden uns jetzt noch einmal dem Problem der Definition der zeitgeordneten Kontraktionen im Punkt $x = y$ zu. Wir legen generell fest, daß eine zeitgeordnete Kontraktion, die mit einer kausalen Green-Funktion für alle Punkte $x \neq y$ zusammenfällt, mit dieser auch in einer unendlich kleinen Umgebung des Punktes $x = y$ zusammenfallen soll; mit anderen Worten, es soll also gelten:

Für das skalare Feld

$$\overline{\varphi(x)\,\varphi}(y) = \langle \mathrm{T}\varphi(x)\,\varphi(y)\rangle_0 = \frac{1}{\mathrm{i}}\, D^c(x - y)\,, \tag{18.12}$$

für das elektromagnetische Feld

$$\overbrace{A_\nu(x)\, A_\mu}(y) = \langle \mathrm{T} A_\nu(x)\, A_\mu(y) \rangle_0 = \mathrm{i} g_{\nu\mu} D_0^c(x-y) = \frac{g_{\nu\mu}}{(2\pi)^4\, \mathrm{i}} \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\, \mathrm{d}k\,, \tag{18.13}$$

für das Vektorfeld

$$\begin{aligned} \overbrace{u_\nu(x)\, u_\mu}(y) &= \langle \mathrm{T} u_\nu(x)\, u_\mu(y) \rangle_0 = \mathrm{i}\, D_{\nu\mu}^c(x-y) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4} \int \frac{g_{\nu\mu} - k_0 k_\mu / m^2}{m^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}\, \mathrm{d}k\,, \end{aligned} \tag{18.14}$$

für das Spinorfeld

$$\begin{aligned} \overbrace{\psi_\alpha(x)\, \bar{\psi}_\beta}(y) &= \langle \mathrm{T} \psi_\alpha(x)\, \bar{\psi}_\beta(y) \rangle_0 = \frac{1}{\mathrm{i}} S_{\alpha\beta}^c(x-y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4\, \mathrm{i}} \int \frac{(m + \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}\, \mathrm{d}p\,. \end{aligned} \tag{18.15}$$

18.3. Die Singularitäten auf dem Lichtkegel

Die abgeleiteten Green-Funktionen lassen sich, wie auch die Vertauschungsfunktionen der entsprechenden Felder, explizit durch Zylinderfunktionen und verallgemeinerte Funktionen des Typs $\delta(x^2)$, $\Theta(x^0)$ u. a. ausdrücken. Ohne die Herleitungen auszuführen, geben wir im folgenden die Ausdrücke für die entsprechenden Funktionen des skalaren Feldes an.

Für die Pauli-Jordan-Funktion ergibt sich

$$D(x) = \frac{\varepsilon(x^0)\, \delta(\lambda)}{2\pi} - \frac{m}{4\pi \sqrt{\lambda}}\, \Theta(\lambda)\, \varepsilon(x^0)\, J_1(m \sqrt{\lambda})\,, \tag{18.16}$$

wobei $\lambda = x^2 = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2$, ε und Θ die bekannten Stufenfunktionen sind. Aus Formel (18.16) ist sofort eine der wichtigsten Eigenschaften der Vertauschungsfunktion ersichtlich. Sie verschwindet außerhalb des Lichtkegels

$$D(x) = 0\,, \qquad x^2 < 0\,. \tag{18.17}$$

Die positiv- bzw. negativ-frequenten Anteile der D-Funktion haben die Gestalt

$$\begin{aligned} D^\pm(x) &= \frac{\varepsilon(x^0)\, \delta(\lambda)}{4\pi} - \frac{m\Theta(\lambda)}{8\pi \sqrt{\lambda}} [\varepsilon(x^0)\, J_1(m \sqrt{\lambda}) \pm \mathrm{i} N_1(m \sqrt{\lambda})] \\ &\mp \frac{\Theta(-\lambda)\, m \mathrm{i}}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}}\, K_1(m \sqrt{-\lambda})\,. \end{aligned} \tag{18.18}$$

Hierbei sind J_1, N_1 bzw. K_1 die Bessel-, Neumann- bzw. Hankel-Funktionen mit imaginärem Argument. In der Umgebung des Nullpunktes gilt für diese Funk-

tionen:

$$J_1(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} + O(z^5)\,,$$

$$\frac{\pi}{2} N_1(z) = -\frac{1}{z} + \frac{z}{2}\left(\ln\frac{z}{2} + 1\right) + O(z^3)\,,$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{2}\left(\ln\frac{z}{2} + 1\right) + O(z^3)\,.$$

Für die kausale Green-Funktion ergibt sich

$$D^c(x) = \frac{mi}{4\pi^2} \frac{K_1(m\sqrt{-\lambda + i\delta})}{\sqrt{-\lambda + i\delta}}\,, \tag{18.19}$$

wobei

$$\sqrt{-\lambda + i\delta} = i\sqrt{\lambda} \quad \text{für} \quad \lambda > 0\,.$$

Die retardierte Green-Funktion ist gleich

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{\Theta(x^0)\,\delta(\lambda)}{2\pi} - \frac{m\Theta(x^0)\,\Theta(\lambda)}{4\pi\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda})\,. \tag{18.20}$$

Aus den soeben hergeleiteten Formeln folgt unmittelbar, daß in der x-Darstellung alle Singularitäten der Funktionen D, $D^{\pm}$, D^c und D^{ret} in der Umgebung des Lichtkegels konzentriert sind; so ist z.B.

$$D(x) \simeq \frac{\varepsilon(x^0)\,\delta(\lambda)}{2\pi} - \frac{m^2\varepsilon(x^0)\,\Theta(\lambda)}{8\pi} + O(\lambda)\,, \tag{18.21}$$

$$D^c(x) \simeq \frac{\delta(\lambda)}{4\pi} + \frac{1}{4\pi^2\, i\lambda} - \frac{m^2}{16\pi}\Theta(\lambda) + \frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m\,|\lambda|^{1/2}}{2} + O(|\lambda|^{1/2}\ln|\lambda|)\,. \tag{18.22}$$

In diesen Ausdrücken kommen vier Typen von Singularitäten vor: Der Pol $1/\lambda$, $\ln|\lambda|$ und $\delta(\lambda)$ sowie der Sprung der Funktion $\Theta(\lambda)$. Die Faktoren $\varepsilon(x^0)$ und $\Theta(x^0)$, die in einzelnen Summanden auftreten, führen nicht zu zusätzlichen Singularitäten außerhalb des Lichtkegels, da sie stets mit den Faktoren $\delta(\lambda)$ oder $\Theta(\lambda)$ einhergehen und deshalb nur im Koordinatenursprung von Bedeutung sind.

Im Hinblick auf spätere Überlegungen führen wir noch an, daß die Funktionen des skalaren und des Vektorfeldes die Struktur

$$D_{\text{skal, vekt}}(x) = m^2 F\left(m^2\lambda, \frac{x^0}{|x^0|}\right) \tag{18.23}$$

haben, während für das Spinorfeld

$$S_{\text{spin}}(x) = m^3 \tilde{F}\left(m^2\lambda, \frac{x^0}{|x^0|}\right) \tag{18.24}$$

gilt.

Infolgedessen treten z.B. Singularitäten des Typs $\delta(\lambda)$ und λ^{-1} in (18.23) stets mit massenunabhängigen Koeffizienten auf, die Singularitäten des Typs $\ln|\lambda|$ und $\Theta(\lambda)$ enthalten jedoch Faktoren, die proportional zu m^2 sind.

Wir sehen also, daß die Vertauschungs- und kausalen Green-Funktionen der Quantenfelder Funktionen sind, die starke Singularitäten auf dem Lichtkegel enthalten.

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen, gehören solche Funktionen zur Klasse der *verallgemeinerten Funktionen oder Distributionen.* Im Unterschied zu den gewöhnlichen Funktionen können verallgemeinerte Funktionen nicht dadurch charakterisiert werden, daß man jedem Wert ihres Arguments einen bestimmten Funktionswert zuordnet, sie also lokal definiert. Verallgemeinerte Funktionen $f(x)$ müssen integral definiert werden, indem man eine Klasse hinreichend regulärer Funktionen $\varphi(x)$ angibt, für die die Integrale $\int f(x)\, \varphi(x)\, dx$ endlich sind. So wird z.B. die δ-Funktion dadurch definiert, daß man angibt, wie sie mit stetigen Funktionen zu integrieren ist; Ableitungen der δ-Funktion werden durch die Angabe ihres Integrals mit solchen Funktionen gegeben, die eine entsprechende Anzahl stetiger Ableitungen haben.

Mit anderen Worten bedeutet dies: Eine verallgemeinerte Funktion wird durch die Angabe eines linearen Funktionals in einem geeigneten „linearen Raum" hinreichend regulärer Funktionen definiert. Es ist in diesem Rahmen nicht möglich, die Theorie der verallgemeinerten Funktionen darzulegen (man findet eine angemessene Darlegung in [1], Abschnitt III und in [24]). Hier wollen wir nur darauf aufmerksam machen, daß die Multiplikation zweier (oder mehrerer) verallgemeinerter Funktionen miteinander durch die oben erläuterte Definition nicht erklärt wird; sie ist zusätzlich zu definieren und führt auf zusätzliche Probleme, die nur in speziellen Fällen als gelöst angesehen werden können.

19. Feynman-Diagramme

19.1. Koeffizientenfunktionen

Hier wollen wir die mathematischen Eigenschaften der Koeffizientenfunktionen der S-Matrix diskutieren. Als Koeffizientenfunktionen werden diejenigen Funktionen bezeichnet, die als Faktoren vor Normalprodukten von Operatoren auftreten; diese Funktionen gehen in die Elemente der S-Matrix ein, die wir in der nächsten Vorlesung betrachten wollen. Die Koeffizientenfunktionen ergeben sich aus der Anwendung des zweiten Wick-Theorems und haben folgende allgemeine Struktur:

$$K(x_1, \dots, x_n) = \prod_{r,s} D^c_{\alpha\beta}(x_r - x_s)\,, \tag{19.1}$$

wobei x_r und x_s alle Werte von x_1 bis x_n durchlaufen. (In Formel (19.1) ist natürlich eine Koeffizientenfunktion von $S_n(x_1, \dots, x_n)$ dargestellt.) Wie in Vorlesung 18. gezeigt wurde, sind die Faktoren auf der rechten Seite von (19.1) verallgemeinerte Funktionen.

Die Multiplikation dieser singulären kausalen Green-Funktionen stellt die Hauptschwierigkeit dar, mit der es die Quantenfeldtheorie zu tun hat. Diese Schwierigkeit, die als Problem der Ultraviolettdivergenzen bekannt ist, hat die Entwicklung der Elementarteilchentheorie fast zwei Jahrzehnte lang beeinträchtigt und konnte erst Ende der vierziger Jahre durch die Renormierungstheorie gelöst werden. Auf dieses Problem kommen wir im nächsten Kapitel zurück. Vorläufig weisen wir nur darauf hin, daß die Ausdrücke des Typs (19.1) gewöhnlich nur formal definiert sind.

Wir wenden uns nun der Herleitung eines Verfahrens zu, das es gestattet, die Beiträge der Operatorausdrücke $S_n(x_1, \dots, x_n)$ auf einfache und anschauliche Weise zu bestimmen. Solche Terme erscheinen als Produkt einer Koeffizientenfunktion vom Typ (19.1) mit dem Normalprodukt der verbleibenden unkontrahierten Operatoren

$$K(x_1, \dots, x_n) :\dots u_k(x_k) \dots u_l(x_l) \dots: . \tag{19.2}$$

Die Angabe der konkreten Funktion K, die einer vorgegebenen Folge von Kontraktionen der Feldoperatoren entspricht, erfolgt am zweckmäßigsten mit Hilfe von Feynman-Diagrammen.

19.2. Die graphische Darstellung der Entwicklungskoeffizienten S_n

Wie aus dem zweiten Wickschen Theorem folgt, sind die Operatorfunktionen $S_n(x_1, \dots, x_n)$ als Summen darstellbar, in denen jeder Summand ein Produkt einer Anzahl von Kontraktionen der Feldoperatoren und dem Normalprodukt der restlichen, nicht kontrahierten freien Feldoperatoren ist.

Jedem Summanden kann man unter Verwendung äußerst einfacher Regeln eine graphische Darstellung zuordnen. Die Regeln, nach denen diese sogenannten *Feynman-Diagramme* zu konstruieren sind, können folgendermaßen formuliert werden:

— Den n Argumenten des Operators $S_n(x_1, \dots, x_n)$ entsprechen n Punkte $x_1, \dots, x_n$, die Eckpunkte oder *Vertizes* des Diagramms.

— Jeder Kontraktion entspricht eine *innere Linie* des Diagrammes, welche jeweils zwei Vertizes miteinander verbindet:

$$\overline{u_i(x_i)\, u_j(x_j)} \quad \frown \quad \underset{x_i}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{x_j}{\bullet} \, .$$

— Jedem nicht kontrahierten Operator wird eine *äußere Linie* des Diagramms zugeordnet, die von einem bestimmten Vertex ausgeht und frei endet

$$:\dots u_k(x_k)\dots: \quad \frown \quad \underset{x_k}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\! \, .$$

— Die in der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(x_i)$ enthaltenen Zahlenfaktoren und Matrizen werden dem zugehörigen Vertex x_i zugeschrieben.

Vom topologischen Standpunkt aus gesehen ist jeder Vertex durch die Menge der von ihm auslaufenden (oder, wenn man so will, in ihn einlaufenden) Linien charakterisiert. Jede Linie entspricht dabei offenbar einem Feldoperator der vorgegebenen Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte, so gilt z.B. in der Elektrodynamik

$$e{:}\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)A_\nu(x){:} \quad \frown \tag{19.3}$$

ψ(x)
eγ^ν
ψ̄(x)
A_ν(x)

Um die verschiedenen Felder voneinander unterscheiden zu können, haben wir hierbei den Operatoren des elektromagnetischen Potentials eine Wellenlinie und den Operatoren des Dirac-Feldes eine durchgehende Linie zugeordnet. Dem Spinor

$\psi(x)$ entspricht die in den Punkt x ein- und dem konjugierten Spinor $\bar{\psi}(x)$ die von x auslaufende Linie; im Unterschied zu den elektromagnetischen Linien sind Spinorlinien also gerichtet.

Der Graph (19.3) kann anschaulich als Emission (bzw. Absorption) eines Photons durch ein Elektron (bzw. Positron) gedeutet werden.

Ein einfacheres Beispiel liefert das φ^4-Modell des skalaren Feldes. Einer solchen Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte entspricht ein Vertex mit vier gleichen Linien:

$$h\,{:}\varphi^4(x){:} \quad \sim \quad \times_x \,. \tag{19.4}$$

Zur Illustration betrachten wir in diesem Modell den Term S_2 der Streumatrix

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= \mathrm{i}^2h^2\mathrm{T}\{\,{:}\varphi^4(x)\,\varphi^4(y){:}\} \\ &= \mathrm{i}^2h^2\,{:}\varphi^4(x)\,\varphi^4(y){:} + 16\mathrm{i}^2h^2\overbrace{\varphi(x)\,\varphi(y)}\,{:}\varphi^3(x)\,\varphi^3(y){:} \\ &\quad + 72\mathrm{i}h^2[\overbrace{\varphi(x)\,\varphi(y)}]^2\,{:}\varphi^2(x)\,\varphi^2(y){:} \\ &\quad + 96\mathrm{i}^2h^2[\overbrace{\varphi(x)\,\varphi(y)}]^3\,{:}\varphi(x)\,\varphi(y){:} + 24\mathrm{i}^2h^2[\overbrace{\varphi(x)\,\varphi(y)}]^4 \,. \end{aligned}$$

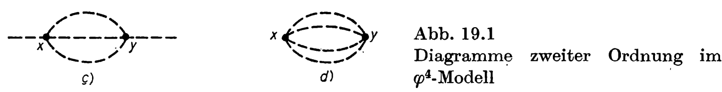


Abb. 19.1
Diagramme zweiter Ordnung im φ^4-Modell

Die entsprechenden Diagramme sind in Abb. 19.1 dargestellt. Auch im Fall $n > 2$ erhalten wir eine Menge von Diagrammen mit genau n Vertizes, aber verschiedenen Kombinationen von inneren und äußeren Linien. Den äußeren Linien der Diagramme kommt dabei eine einfache Bedeutung zu: So hat z.B. das Diagramm 19.1b vier freie (äußere) Linien, die genau den vier nicht kontrahierten Operatoren entsprechen, welche im Normalprodukt ${:}\varphi^2(x)\,\varphi^2(y){:}$ stehen. Der entsprechende Term der S-Matrix gibt einen Beitrag zu denjenigen Matrixelementen, die die Übergänge $1 \leftrightarrow 3$ und $2 \leftrightarrow 2$ beschreiben. Die äußeren Linien kann man deshalb anschaulich als Repräsentanten der Bewegung von Teilchen im Anfangs- bzw. Endzustand auffassen. Die inneren Linien entsprechen dagegen virtuellen Teilchen.

19.3. Die Elektrodynamik

Etwas schwieriger wird die Beschreibung der Wechselwirkung verschiedener Felder mit Matrixstruktur. In diesem Abschnitt betrachten wir die Elektrodynamik (siehe (19.3)). In diesem Fall hat der Operatorausdruck S_n die allgemeine Struktur

$$K_{\ldots\nu\ldots}(x_1, \ldots, x_n)\;{:}\ldots\,\bar{\psi}(x_k)\,\ldots\,A^\nu(x_l)\,\ldots\,\psi(x_m)\,\ldots{:}\,. \tag{19.5}$$

Man erkennt hieraus, daß die S-Matrix einen Zustand $|\alpha\rangle$ mit einer gegebenen Anzahl von Quanten des elektromagnetischen und des Spinorfeldes in einen anderen, analog charakterisierten Zustand $|\beta\rangle$ überführen kann. Wenn der Anfangszustand $|\alpha\rangle$ dabei physikalisch ist, d. h., wenn er entweder keine skalaren und longitudinalen Quanten enthält oder selbige nur in bestimmte Kombinationen eingehen (vgl. Formel (8.20)), so folgt aus (8.21), daß der Endzustand $|\beta\rangle$ ebenfalls physikalisch ist.

Hieraus folgt insbesondere, daß man physikalische Relationen, wie z.B. die Unitaritätsbedingung (15.9′), in der Form

$$\sum_{\tilde{\gamma}} = S_{\beta\tilde{\gamma}} \overset{+}{S}_{\tilde{\gamma}\alpha} = I_{\beta\alpha}$$

schreiben kann, wobei die Summe auf der linken Seite nur über physikalische Zustände des elektromagnetischen Feldes läuft. Das ist dadurch bedingt, wie wir bereits im Abschnitt 4.3. hervorgehoben haben, daß der longitudinale Freiheitsgrad $\chi(x)$ weder mit dem transversalen Feld A^T noch mit anderen Feldern (in unserem Fall mit den Feldern ψ und $\bar{\psi}$)gekoppelt ist.

Die in (19.5) enthaltene Koeffizientenfunktion $K_{\ldots\nu\ldots}(\ldots x \ldots)$ enthält zwei verschiedene zeitgeordnete Kontraktionen, denen wir auch verschiedene graphische Symbole zuordnen müssen

$$\overbrace{A_\nu(x)\, A_\mu(y)} \quad \backsim \quad x \sim\sim\sim\sim y\,, \tag{19.6}$$

$$\overbrace{\psi(x)\, \bar{\psi}(y)} \quad \backsim \quad x \bullet\!\!\longleftarrow\!\!\bullet\, y\,. \tag{19.7}$$

Der Pfeil in der Kontraktion der Spinorfelder ist notwendig, um die Ausdrücke $\overbrace{\psi(x)\, \bar{\psi}(y)}$ und $\overbrace{\psi(y)\, \bar{\psi}(x)}$ voneinander unterscheiden zu können.

Für nicht kontrahierte Operatoren im Normalprodukt führen wir folgende Darstellungen ein:

$$\begin{aligned} A_\nu(x) &\quad \backsim \quad x \bullet\!\sim\sim\sim\sim\,, \\ \psi(y) &\quad \backsim \quad y \bullet\!\!-\!\!\longleftarrow\!\!-\!\!-\,, \\ \bar{\psi}(z) &\quad \backsim \quad z \bullet\!\!-\!\!\longrightarrow\!\!-\!\!-\,. \end{aligned} \tag{19.8}$$

Auf diese Weise treffen sich in jedem Vertex eine Photon- und zwei Spinorlinien (eine „einlaufende“ und eine „auslaufende“). Außerdem muß man noch die Dirac-Matrix berücksichtigen, die in $\mathcal{L}(x)$ enthalten ist. Wir wollen diese Matrix, ebenso wie die Kopplungskonstante e, dem Vertex zuordnen, wie das in (19.3) schon angedeutet wurde

$$e\gamma^\nu \quad \backsim \quad \sim\sim\sim\!<_x\,. \tag{19.9}$$

Die Relationen (19.6) bis (19.9) enthalten alle Regeln, nach denen man in der Elektrodynamik Feynman-Diagramme konstruieren kann. Aus diesen Regeln folgt, daß ein Summand von S_n genau n Vertizes und eine gewisse Anzahl von inneren und äußeren Photonen- bzw. Elektronenlinien hat. Dabei läuft an jedem Vertex eine Elektronenlinie ein und eine ebensolche aus, oder anders ausgedrückt:

Die Elektronenlinien des gesamten Diagramms sind in allen Vertizes stetig und bilden entweder geschlossene Linienzüge (sogenannte *Loops*) oder offene, stückweise gerade Linienzüge, die am Rand des Diagramms anfangen und enden. Der Kette von kontrahierten Argumenten

$$\bar{\psi}(x)\, \overbracket{\psi(x)\, \bar{\psi}(y)}\, \overbracket{\psi(y)\, \bar{\psi}(z)} \dots \overbracket{\psi(u)\, \bar{\psi}(v)}\, \psi(v)$$

entspricht dabei eine Folge von Vertizes, die durch Elektronenlinien verbunden sind, während die Paare von freien Operatoren $\bar{\psi}(x_f)\, \psi(x_i)$ im Normalprodukt den Anfang (x_i) bzw. das Ende (x_f) der offenen Ketten von Elektronenlinien anzeigen.

Als Beispiel betrachten wir einen Term zweiter Ordnung, der den folgenden Beitrag zu $S_2(x, y)$ gibt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}^2 e^2 \bar{\psi}(x)\, \hat{A}(x)\, \psi(y)\, \bar{\psi}(y)\, \hat{A}(y)\, \psi(y) \\ &= e^2 \operatorname{Sp}\{:\mathrm{i}S^c(y-x)\, \hat{A}(x)\, \mathrm{i}S^c(x-y)\, \hat{A}(y):\} \\ &= -e^2 \operatorname{Sp}\{:S^c(y-x)\, \hat{A}(x)\, S^c(x-y)\, \hat{A}(y):\}\ . \end{aligned} \tag{19.10}$$

Unter Verwendung der angegebenen Regeln erhalten wir ein Feynman-Diagramm, das sogenannte „Selbstenergiediagramm des Photons" (siehe Abb. 19.2).

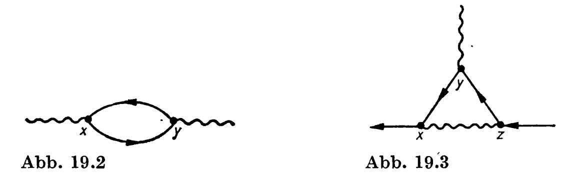


Abb. 19.2 Abb. 19.3

Abb. 19.2
Selbstenergie-Diagramm des Photons in der Elektrodynamik

Abb. 19.3
Vertex-Diagramm dritter Ordnung in der Elektrodynamik

Als zweites Beispiel betrachten wir einen Term dritter Ordnung aus $S_3(x, y, z)$

$$\begin{aligned} &(\mathrm{ie})^3\, :\bar{\psi}(x)\, \hat{A}(x)\, \psi(x)\, \bar{\psi}(y)\, \hat{A}(y)\, \psi(y)\, \bar{\psi}(z)\, \hat{A}(z)\, \psi(z): \\ &= -e^3 D_0^c(x-z)\, :\bar{\psi}(x)\, \gamma^\nu S^c(x-y)\, \hat{A}(y)\, S^c(y-z)\, \gamma_\nu \psi(z):. \end{aligned} \tag{19.11}$$

Mittels der Feynman-Regeln erhält man das in Abb. 19.3 dargestellte Diagramm; es hat die gleiche Struktur der äußeren Linien wie der elementare Vertex (19.9) und wird deshalb auch als *Vertex-Diagramm* bezeichnet.

Bei Betrachtung dieser einfachen Diagramme erkennen wir, daß beim Verfolgen der Elektronenlinie in Pfeilrichtung genau alle Faktoren des zugehörigen Terms der S-Matrix von rechts nach links durchlaufen werden. So erhalten wir z.B. für das in Abb. 19.3 dargestellte Diagramm dieselbe Reihenfolge der nicht miteinander

kommutierenden, matrixwertigen Faktoren

$$:\bar{\psi}(x)\,\gamma^\nu S^c(x-y)\,\hat{A}(y)\,S^c(y-z)\,\gamma_\nu\psi(z):\,,$$

wie in Gl. (19.11).

Wir möchten hier noch einmal besonders darauf hinweisen, daß beim Vorhandensein von Fermi-Feldern stets auf die Vorzeichen geachtet werden muß. Laut Definition unterscheidet sich $\overline{\bar{\psi}(x)\,\psi(y)}$ durch das Vorzeichen von der Standardkontraktion $\overline{\psi(y)\,\bar{\psi}(x)}$

$$\overline{\bar{\psi}(x)\,\psi(y)} = -\overline{\psi(y)\,\bar{\psi}(x)}\,.$$

Dieser Vorzeichenwechsel ist wesentlich für Diagramme, die Elektronenloops enthalten. So würden wir z. B. bei formaler Anwendung der Regeln dem Diagramm der Abb. 19.2 den Ausdruck

$$(ie)^2\,\overline{\psi(x)\,\bar{\psi}(y)}\;\overline{\psi(y)\,\bar{\psi}(x)}\,\cdot$$

zuordnen. Dieser Ausdruck unterscheidet sich aber durch sein Vorzeichen von (19.10). Es ist klar, daß auch in komplizierteren Fällen ein solcher Vorzeichenfehler immer dann auftritt, wenn eine gewisse Anzahl von Kontraktionen einem Elektronenloop entspricht, unabhängig von dessen Ordnung. Hieraus folgt, daß man den unter Anwendung der Regeln erhaltenen Ausdruck stets noch mit

$$\eta = (-1)^c$$

multiplizieren muß, wobei c die Anzahl der Fermionenloops im betrachteten Diagramm bezeichnet. Diese *Vorzeichenregel* ist den Feynman-Regeln also noch hinzuzufügen.

19.4. Das Yang-Mills-Feld

Die Betrachtung quantenfeldtheoretischer Modelle, die nichtabelsche Eichfelder und deren Wechselwirkung mit Materiefeldern beschreiben, ist von großem Interesse. Ähnlich dem abelschen Fall, der Elektrodynamik, erweisen sich diese Modelle hinsichtlich der Struktur der Wechselwirkung als äußerst ökonomisch und enthalten in den einfachsten Fällen nur eine Koppelungskonstante g. Letztere tritt auch in der Lagrange-Dichte des „reinen“, d. h. nur mit sich selbst wechselwirkenden Yang-Mills-Feldes

$$\mathscr{L}_{YM}(B) = \mathscr{L}_0(B) + \mathscr{L}_I(g, B)$$

auf, in der neben einer quadratischen Form $\mathscr{L}_0$ auch Terme mit dritten und vierten Potenzen der Feldoperatoren enthalten sind

$$\mathscr{L}_I(g, B) = -\tfrac{1}{4}\big(2igt^{abc}(\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu)\,B^b_\mu B^c_\nu - g^2(t^{abc}B^b_\mu B^c_\nu)^2\big) \tag{19.12}$$

mit

$$H^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu\,.$$

In Analogie zur Behandlung des nichtlinearen Feldes (19.4) ist man geneigt, das Yang-Mills-Feld ausgehend von der durch $\mathscr{L}_0$ beschriebenen linearen Näherung zu quantisieren und die höheren, in $\mathscr{L}_I$ enthaltenen Potenzen des Feldes als Störung zu betrachten.

Zu diesem Zwecke könnte man den Ausdruck $\mathscr{L}_0$ „komponentenweise" als Summe

$$\mathscr{L}_0(B) = \sum_a \tilde{\mathscr{L}}_0(B^a) \tag{19.13}$$

von quadratischen nichtentarteten Formen darstellen, um so die Analogie zur Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes in der Form (4.13) oder (4.19) herzustellen. Wie wir aber schon im Abschnitt 11.1. bemerkt haben, koppelt (im Gegensatz zum elektromagnetischen Feld) die longitudinale Komponente des Yang-Mills-Feldes nicht von den transversalen ab. Das führt dazu, daß die Streumatrix im Raum der physikalischen Zustände nicht unitär ist. Dies kann man folgendermaßen erkennen: Die linke Seite der Unitaritätsbedingung (15.9') enthält eine Summe

$$(S\overset{+}{S})_{\alpha\beta} = \sum_\gamma S_{\alpha\gamma}\overset{+}{S}_{\gamma\beta} = \sum_{\tilde{\gamma}} S_{\alpha\tilde{\gamma}}\overset{+}{S}_{\tilde{\gamma}\beta} + \sum_\chi S_{\alpha\chi}\overset{+}{S}_{\chi\beta} \tag{19.14}$$

über Zwischenzustände $|\gamma\rangle$. Unter diesen Zuständen $|\gamma\rangle$ erscheinen einerseits Zustände $|\tilde{\gamma}\rangle$, die masselosen transversalen Quanten des Yang-Mills-Feldes entsprechen und deshalb im weiteren als physikalische Zustände bezeichnet werden, andererseits aber auch Zustände $|\chi\rangle$, die dem skalaren Anteil $\chi(x)$ entsprechen. In der Yang-Mills-Theorie genügt die Funktion $\chi(x)$ der Gleichung (11.12), so daß eine Wechselwirkung mit den transversalen Komponenten vorhanden ist. Deshalb sind (im Unterschied zur Elektrodynamik) die Matrixelemente

$$S_{\chi\alpha} = \langle\chi|\, S\, |\alpha\rangle\,,$$

wo $|\alpha\rangle$ einen physikalischen Zustand beschreibt, von Null verschieden. Um die Unitarität im Raum der physikalischen Zustände wieder herzustellen, ist es deshalb notwendig, die Operatoren

$$S_n \to \tilde{S}_n$$

so zu modifizieren, daß sie Gl. (16.4) genügen, auf deren rechter Seite die Matrizenmultiplikation nur als Kontraktion über physikalische Zustände $|\tilde{\gamma}\rangle$ verstanden wird

$$\tilde{S}_n + \overset{+}{\tilde{S}}_n + \sum_k P(\ldots)\, \tilde{S}_k \overset{+}{\tilde{S}}_{n-k} = 0\,,$$

$$(\tilde{S}_k \overset{+}{\tilde{S}}_{n-k})_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\tilde{\gamma}} (\tilde{S}_k)_{\alpha\tilde{\gamma}}\, (\overset{+}{\tilde{S}}_{n-k})_{\tilde{\gamma}\beta}\,.$$

Letzten Endes heißt das, daß man bei allen Summationen über Zwischenzustände $|\gamma\rangle$ diejenigen Beiträge auslassen muß, die den skalaren Yang-Mills-Quanten entsprechen:

$$\sum_\gamma \to \sum_\gamma - \sum_\chi = \sum_{\tilde{\gamma}}\,. \tag{19.15}$$

Eine strenge Begründung der soeben beschriebenen Prozedur folgt im Rahmen der Quantisierung von Yang-Mills-Feldern mittels der Funktionalintegrale (siehe z.B. [22], Abschnitt III). Wir wenden uns nun den Feynman-Regeln für das reine Yang-Mills-Feld zu.

Ausgehend vom freien Yang-Mills-Feld kann man die Wechselwirkung störungstheoretisch durch Entwicklungen nach der Kopplungskonstante g berücksichtigen.

Die Feynman-Regeln ergeben sich dabei in folgender Weise: Neben den den Yang-Mills-Feldern direkt zuzuordnenden

inneren Linien

$$\overline{B^a_\nu(x)\,B^b_\mu(y)} \backsim \quad x \text{ ~~~~~ } y\,, \tag{19.16}$$

äußeren Linien

$$B^a_\nu(x) \backsim \quad x \text{ ~~~~~ }\,, \tag{19.17}$$

Dreier-Vertizes

$$igt^{abc}H_{\mu\nu}{}^a B_\mu{}^b B_\nu{}^c \qquad , \qquad (H^a_{\mu\nu} = (\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu)) \tag{19.18}$$

und Vierer-Vertizes

$$-g^2(t^{abc}B_\mu{}^b B_\nu{}^c)^2 \qquad , \tag{19.19}$$

hat man noch weitere Regeln einzuführen, die den zu subtrahierenden longitudinalen Komponenten entsprechen. Dies geschieht am einfachsten dadurch, daß man formal ein skalares, masseloses Isovektorfeld ξ^a einführt, welches nur in virtuellen Zwischenzuständen auftritt und sich deshalb nur durch innere ξ-Linien

$$\overline{\xi^a(x)\,\xi^b}(x) \qquad x \text{ - - - - - - } y$$

bemerkbar macht, die vermöge des Vertex

$$igt^{abc}\xi^a(x)B_\nu^b\partial_\nu\xi \qquad .$$

an das Yang-Mills-Feld ankoppeln. Dieses skalare Hilfsfeld ξ wird häufig als „Faddeev-Popov-Geisterfeld" bezeichnet.

Die angeführten Diagrammregeln können auf eine effektive Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{a}{2}(\partial^\nu B^a_\nu)^2 - \partial_\mu\xi^a\,\partial^\mu\bar{\xi}^a + igt^{abc}\bar{\xi}^a B^b_\nu\,\partial^\nu\xi^c \tag{19.20}$$

zurückgeführt werden. Hierbei haben wir das Geisterfeld als komplexes Feld eingeführt: $\xi^a \to (\xi^a, \bar{\xi}^a)$. Dies wird dadurch begründet, daß den Geisterloops Beiträge entsprechen, die einen „zusätzlichen" Faktor (-1) enthalten. Es ist deshalb zweckmäßig anzunehmen, daß das skalare Feld ξ^a gemäß der Fermi-Dirac-Statistik quantisiert wird. Dieser Umstand wird durch die Bezeichnungen

$$\overline{\xi^a(x)\,\bar{\xi}^a}(y) = -\overline{\bar{\xi}(y)\,\xi^a}(x) \qquad x \text{ - - - ← - - - } y\,, \tag{19.21}$$

$$igt^{abc}\bar{\xi}^a(x)B^b_\nu(x)\partial^\nu\xi^c(x) \tag{19.22}$$

widergespiegelt. Zu den Feynman-Regeln muß jetzt noch der Vorzeichenfaktor

$$\eta = (-1)^g \tag{19.23}$$

ergänzt werden, wobei g die Anzahl der Geisterloops des Diagramms ist.

Zur Illustration betrachten wir in Analogie zum Ausdruck (19.10) einen Term der Streumatrix $S_2(x, y)$ mit zwei unkontrahierten Operatoren des Yang-Mills-Feldes der Ordnung g^2. Solche Terme entstehen erstens durch Kontraktionen von Operatoren aus den Dreier-Vertizes

$$\begin{aligned} S_2(x, y) \sim {}^2g^2 t_{abc} t_{def} :\{ & H^a_{\nu\mu}(x)\, B^b_\nu(x)\, B^c_\mu(x)\, H^d_{\varrho\sigma}(y)\, B^e_\varrho(y)\, B^f_\sigma(y) \\ & + H^a_{\nu\mu}(x)\, B^b_\nu(x)\, B^c_\mu(x)\, H^d_{\varrho\sigma}(y)\, B^e_\varrho(y)\, B^f_\sigma(y) \\ & + H^a_{\nu\mu}(x)\, B^b_\nu(x)\, B^c_\mu(x)\, H^d_{\varrho\sigma}(y)\, B^e_\varrho(y)\, B^f_\sigma(y)\}: \end{aligned} \tag{19.24}$$

mit $H^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu$ und zweitens aus Wechselwirkungsgliedern des Geisterfeldes ξ^a mit dem Yang-Mills-Feld

$$S_2(x, y) \sim g^2 t_{abc} t_{def} :\bar{\xi}^a(x)\, \partial_\nu \xi^b(x)\, B^c_\nu(x)\, \bar{\xi}^d(y)\, \partial_\mu \xi^e(y)\, B^f_\mu(y):. \tag{19.25}$$

Abgesehen von offensichtlichen Modifikationen solcher Kontraktionen, in die Ableitungen von Feldern eingehen, wie beispielsweise

$$\partial_\nu \xi^a(x)\, \bar{\xi}^b(y) = \frac{\delta_{ab}}{\mathrm{i}(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}}{-k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\, \mathrm{d}k = \frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\, k_\nu\, \mathrm{d}k}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}, \tag{19.26}$$

entsprechen diese Terme den beiden in Abb. 19.4 dargestellten Feynman-Diagrammen.

Die Feynman-Regeln für Yang-Mills-Felder, die mit Materiefeldern wechselwirken, sind im Anhang VIII aufgeführt.



Abb. 19.4
Diagramme zweiter Ordnung mit zwei äußeren Vektorlinien für das reine Yang-Mills-Feld

20. Die Feynman-Regeln in der Impulsdarstellung

20.1. Übergang zur Impulsdarstellung

Wir wenden uns nun der Berechnung von Matrixelementen des Streuoperators zu, mit deren Hilfe es uns später möglich sein wird, Übergangswahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Da die Zustände gewöhnlich in der Impulsdarstellung angegeben werden,

$$\Phi_{\dots k \dots} = a_1^+(\boldsymbol{k}_1) \dots a_s^+(\boldsymbol{k}_s)\, \Phi_0, \tag{20.1}$$

ist es angebracht, die Feynman-Regeln ebenfalls in dieser Darstellung zu formulieren und alle Berechnungen vollständig im Impulsraum durchzuführen.

Um Übergangsmatrixelemente zwischen Impulsraumzuständen (20.1) aus den Beiträgen n-ter Ordnung der S-Matrix

$$S_{(n)} = \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\, K(x_1, \ldots, x_n) :\ldots u_\alpha(x_i) \ldots u_\beta(x_j) \ldots: \tag{20.2}$$

bestimmen zu können, müssen wir Ausdrücke der Art

$$\overset{*}{\Phi}_{\ldots k' \ldots} :\ldots u_\alpha \ldots u_\beta \ldots: \Phi_{\ldots k \ldots} = \overset{*}{\Phi}_f :\ldots u_\alpha \ldots u_\beta \ldots: \Phi_{in} \tag{20.3}$$

berechnen. Hierzu ist es aber erforderlich, die im Normalprodukt auftretenden Erzeugungsoperatoren $u^+(x)$ mit den im Zustand $\overset{*}{\Phi}_f$ enthaltenen Vernichtungsoperatoren $a^-(\boldsymbol{p})$ und, völlig analog, die Vernichtungsoperatoren $u^-(x)$ mit den Erzeugungsoperatoren $a^+(\boldsymbol{k})$ des Zustands Φ_i solange zu vertauschen, bis ein u^+ auf $\overset{*}{\Phi}_0$ oder ein u^- auf Φ_0 trifft und damit Null ergibt. Das Matrixelement (20.3) wird also nur dann von Null verschieden sein, wenn sich für jeden Operator $u(x)$ aus dem Normalprodukt ein Operator desselben Feldes a^+ aus Φ_i bzw. a^- aus $\overset{*}{\Phi}_f$ findet, der beim Vertauschen mit $u(x)$ diesen „auslöscht", d. h., die Summe der Teilchen jedes Feldes, sowohl im Anfangs- als auch im Endzustand, muß der Anzahl korrespondierender Feldoperatoren im Normalprodukt entsprechen. Das Matrixelement (20.3) kann aber auch dann von Null verschieden sein, wenn $\overset{*}{\Phi}_f$ und Φ_i darüber hinaus noch Operatoren enthalten, die sich selbst gegenseitig auslöschen; in diesem Fall übersteigt die Gesamtteilchenzahl in den Zuständen $\overset{*}{\Phi}_f$ und Φ_i die Zahl der Operatoren im Normalprodukt um eine gerade Zahl. Solche Matrixelemente liefern jedoch nur dann von Null verschiedene Beiträge, wenn die Impulse dieser „zusätzlichen" Teilchen in $\overset{*}{\Phi}_f$ bzw. Φ_i jeweils paarweise übereinstimmen, d. h., wenn sich diese „überzähligen" Teilchen wechselwirkungsfrei bewegen.

Im weiteren wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß kein Teilchenimpuls des Anfangszustandes mit einem Teilchenimpuls im Endzustand zusammenfällt. Dann ergibt sich das Matrixelement (20.3) als ein Produkt von Faktoren, die beim Vertauschen der Operatoren

$$u^-(x_j) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px_j} \sum_\sigma v_\sigma^-(\boldsymbol{p})\, a_\sigma^-(\boldsymbol{p})\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} \quad \text{mit} \quad a^+(\boldsymbol{k}_j)$$

bzw.

$$u^+(x_l) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}px_f} \sum_\sigma v_\sigma^+(\boldsymbol{p})\, a_\sigma^+(\boldsymbol{p})\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} \quad \text{mit} \quad a^-(\boldsymbol{k}_f)$$

entstehen. Werden diese Vertauschungen explizit ausgeführt, so folgt für (20.3) der Ausdruck

$$\Pi(\ldots x \ldots) = \prod_i \{(2\pi)^{-3/2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i}\, v^-(\boldsymbol{k}_i)\} \cdot \prod_f \{(2\pi)^{-3/2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_fx_f}\, v^+(\boldsymbol{k}_f)\}\,; \tag{20.4}$$

hierbei entsprechen die in das Produkt $\prod_i$ eingehenden Faktoren den Teilchen des Anfangszustandes und die in $\prod_f$ eingehenden Faktoren den Teilchen des Endzustandes.

Um nun das zu Beginn betrachtete Matrixelement des Streuoperators

$$\overset{*}{\Phi}_f S_{(n)} \Phi_i = \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\, K(x_1, \ldots, x_n)\, \Pi(\ldots x \ldots) \tag{20.5}$$

zu berechnen, brauchen wir nur noch die Integration über die Variablen $x_1, \dots, x_n$ auszuführen. Da die Produkte Π von den Ortsvariablen nur über die Exponentialfunktion $\exp(\pm ikx)$ abhängen, ist das betrachtete Matrixelement bis auf die Faktoren $v^-(\boldsymbol{k}), v^+(\boldsymbol{k})$ und Potenzen von (2π) mit der Fourier-Transformierten der Koeffizientenfunktion $K(x_1, \dots, x_n)$ identisch. Da sich aber diese selbst als ein Produkt von Kontraktionen darstellt, ist ihre Fourier-Transformierte nichts anderes als die Faltung der Fourier-Transformierten der Kontraktionen.

Setzen wir die Integraldarstellung der Kontraktionen

$$\frac{1}{i} D^c_{\alpha\beta}(x - y) = (2\pi)^{-4} \int e^{-iq(x-y)} \Delta_{\alpha\beta}(q)\, dq$$

in die rechte Seite von (20.5) ein, so finden wir, daß die Integration über die Ortsvariablen zu Integralen der Art

$$\int dx_j\, e^{ix_j(\sum\limits_\alpha p_\alpha)} = (2\pi)^4\, \delta(\sum_\alpha p_\alpha) \tag{20.6}$$

führt.

20.2. Die Feynman-Regeln für Matrixelemente

Fassen wir die vorangegangenen Überlegungen zusammen, dann erhalten wir die Feynman-Regeln und -Diagramme im Impulsraum.

Zur Berechnung des Übergangs-Matrixelements $s \to r$ für einen Prozeß, bei dem s Teilchen des Anfangszustandes in r Teilchen des Endzustandes übergehen, ist in der n-ten Ordnung der Störungstheorie, in Übereinstimmung mit den in der letzten Vorlesung angegebenen Regeln, zunächst das entsprechende Feynman-Diagramm zu zeichnen. In diesem Diagramm führt man Impulsvariable ein, indem man jeder inneren und äußeren Linie des Diagramms einen Impuls zuordnet. Dabei muß man äußere Linien, die einlaufenden Teilchen (d. h. dem Anfangszustand) entsprechen, von solchen unterscheiden, die auslaufenden Teilchen (d. h. dem Endzustand) entsprechen. Hierbei sind alle topologisch nichtäquivalenten Möglichkeiten dieser Art zu berücksichtigen.

Die Berechnung des Matrixelements erfolgt dann nach folgenden Regeln:

1. Jeder äußeren Linie des Anfangszustandes mit dem Impuls p_i entspricht ein Faktor $(2\pi)^{-3/2}\, v^-_\sigma(\boldsymbol{p}_i)$.

2. Jeder äußeren Linie des Endzustandes mit dem Impuls k_f entspricht ein Faktor $(2\pi)^{-3/2}\, v^+_\varrho(\boldsymbol{k}_f)$.

3. Jedem Vertex entspricht ein Faktor

$$igO_\alpha(2\pi)^4\, \delta(\sum p_i)\,,$$

wobei gO_α die Koppelungskonstante mit der in der entsprechenden Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte auftretenden Matrix bezeichnet; in die Argumente der δ-Funktion geht die Summe der Impulse aller, d. h. sowohl innerer als auch äußerer, Linien ein, die in dem gegebenen Vertex zusammentreffen, und der Faktor i sichert, daß S_n in S den richtigen Faktor i^n aufweist.

4. Jeder inneren Linie mit dem Impuls q_j entspricht ein Faktor

$$(2\pi)^{-4}\, \Delta_{\alpha\beta}(q_j)\,,$$

wobei

5. über alle inneren Impulse q_j zu integrieren ist.

6. Falls Fermi-Felder in den betrachteten Prozeß eingehen, ist die Vorzeichenregel zu berücksichtigen, d. h., der gesamte Ausdruck ist mit dem Faktor η zu multiplizieren (siehe Abschnitt 19.3.).

7. Der auf diese Weise entstehende Ausdruck muß noch mit einer Zahl, dem sogenannten *Symmetriefaktor* c_n multipliziert werden, den wir am Ende des nächsten Abschnitts bestimmen werden.

20.3. Eine Illustration für das φ^4-Modell

Als Beispiel betrachten wir den Beitrag des Diagramms 19.1b) zum Matrixelement einer $(2 \to 2)$-Streuung. Wir bezeichnen die Impulse der Anfangsteilchen mit p_1 und p_2, die der Endteilchen mit k_1 und k_2.

Die äußeren Impulse p_i und k_f können auf drei topologisch nichtäquivalente Weisen den äußeren Linien zugeordnet werden. Das ist in der Abb. 20.1 dargestellt. Die Impulse der inneren Linien haben wir hierbei mit q_j bezeichnet, die Pfeile geben die Richtung der entsprechenden Impulse an.

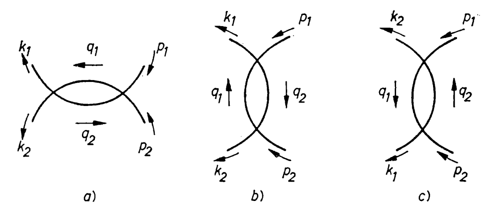


Abb. 20.1
Diagramme eines Streuprozesses zweiter Ordnung im φ^4-Modell in der Impulsdarstellung

Wenn wir die oben formulierten Regeln anwenden und berücksichtigen, daß für das skalare Feld

$$v^-(\boldsymbol{p}) = v^+(\boldsymbol{p}) = (2p_0)^{-1/2}\,, \qquad \Delta(q) = \frac{1}{\mathrm{i}(m^2 - q^2 - \mathrm{i}\varepsilon)}$$

gilt, so erhalten wir für das Diagramm 20.1a)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= [(2\pi)^{12}\, 2p_1^0\, 2p_2^0\, 2k_1^0\, 2k_2^0]^{-1/2} \int \frac{\mathrm{d}q_1}{(2\pi)^4\, \mathrm{i}(m^2 - q_1^2)} \\ &\quad \times \int \frac{\mathrm{d}q_2}{(2\pi)^4\, \mathrm{i}(m^2 - q_2^2)}\, \mathrm{i}^2 h^2 (2\pi)^8\, \delta(p_1 + p_2 + q_2 - q_1) \\ &\quad \times \delta(q_1 - k_1 - k_2 - q_2) \\ &= \frac{h^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{(2\pi)^6\, (16 p_1^0 p_2^0 k_1^0 k_2^0)^{1/2}} \int \frac{\mathrm{d}q_1}{(m^2 - q_1^2)\, [m^2 - (q_1 - k_1 - k_2)^2]}\,,\end{aligned}$$

und entsprechend für die Diagramme 20.1b) und c)

$$\mathcal{M}_b = \frac{h^2\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{(2\pi)^6\,(16p_1^0p_2^0k_1^0k_2^0)^{1/2}} \int \frac{\mathrm{d}q_1}{(m^2 - q_1^2)\,[m^2 - (q_1 - k_1 + p_1)^2]}$$

bzw.

$$\mathcal{M}_c = \frac{h^2\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{(2\pi)^6\,(16p_1^0p_2^0k_1^0k_2^0)^{1/2}} \int \frac{\mathrm{d}q_1}{(m^2 - q_1^2)\,[m^2 - (q_1 - k_1 + p_2)^2]}.$$

Um den endgültigen Ausdruck für den Beitrag dieser Diagramme zum Matrixelement $\overset{*}{\Phi}_f S\Phi_i$ zu erhalten, haben wir noch den Symmetriefaktor zu berücksichtigen. Dieser bestimmt sich aus allen möglichen Varianten der Bildung von Kommutatoren und Kontraktionen zwischen den Operatoren des betrachteten Matrixelements

$$\overset{*}{\Phi}{}_2' S\Phi_2 = \frac{i^2h^2}{2!} \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\langle a_1^- a_2^-\,\mathrm{T}[\varphi^4(x)\,\varphi^4(y)]\,a_1^+ a_2^+\rangle_0\,. \tag{20.7}$$

Dem Diagramm 20.1a) entspricht folgendes Schema der Bildung von Kommutatoren zwischen den Operatoren $a_i^{\pm}$ $(i = 1, 2)$ und den Feldoperatoren φ:

$$\langle a_1^- a_2^- \varphi_x\varphi_x\varphi_x\varphi_x\varphi_y\varphi_y\varphi_y\varphi_y a_1^+ a_2^+\rangle_0\,.$$

8 3 4 3

Hier bezeichnen die Klammern die entsprechenden Kommutatorbildungen, und der angefügte Index gibt den zugehörigen kombinatorischen Faktor an: Betrachten wir zunächst den Vernichtungsoperator a_1^-, der mit jedem der acht Operatoren des Produkts $\varphi_x^4\varphi_y^4$ eine Kommutatorbildung eingehen kann, das zugehörige „Gewicht" ist daher gleich 8. Wegen der Topologie des Diagramms 20.1a) „hängt" der Operator a_2^- an demselben Vertex wie der Operator a_1^- und kann nunmehr Kommutatorbildungen lediglich mit den Operatoren φ_x eingehen; das zugehörige Gewicht ist daher gleich 3. Analoge Überlegungen gelten für a_1^+ und a_2^+.

Darüber hinaus müssen wir noch denjenigen Gewichtsfaktor berücksichtigen, der den zeitgeordneten Kontraktionen der restlichen Operatoren entspricht. Man sieht leicht ein, daß

$$\langle \mathrm{T}\ {:}\varphi_x\varphi_x{:}\ {:}\varphi_y\varphi_y{:}\rangle_0 = 2(\overline{\varphi_x\varphi_y})^2 \tag{20.8}$$

ist. Wenn wir alle Faktoren zusammentragen, so erhalten wir

$$c_{(2)}^a = \frac{1}{2!}\,8\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = \frac{(4!)^2}{2}.$$

Analog kann man auch die Diagramme 20.1b) und c) betrachten. Das ergibt

$$c_{(2)}^a = c_{(2)}^b = c_{(2)}^c = (4!)^2/2\,.$$

Aus den soeben angestellten Überlegungen folgt, daß das Matrixelement einer $(2 \to 2)$-Streuung in der zweiten Ordnung der Störungstheorie des φ^4-Modells die Gestalt

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &= c_{(2)}^a\cdot\mathcal{M}_a + c_{(2)}^b\cdot\mathcal{M}_b + c_{(2)}^c\cdot\mathcal{M}_c\\ &= \frac{\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)\,18h^2}{(p_1^0p_2^0k_1^0k_2^0)^{1/2}\,(2\pi)^4\,i}\,[I(k_1 + k_2) + I(k_1 - p_1) + I(k_1 - p_2)]\end{aligned} \tag{20.9}$$

hat, wobei

$$I(k) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}q}{(m^2 - q^2 - \mathrm{i}\varepsilon)\,[m^2 - (q - k)^2 - \mathrm{i}\varepsilon]} \tag{20.10}$$

ist.

Die durchgeführten Betrachtungen erlauben uns außerdem, eine Regel für die Berechnung des *Symmetriefaktors* anzugeben:

1. Im n-ten Term der Entwicklung der S-Matrix ist ein Faktor $(n!)^{-1}$ enthalten. Dieser Faktor wird stets durch jenen Faktor $n!$ kompensiert, der entsteht, wenn wir alle möglichen Permutationen der Vertizes $x_1, \ldots, x_n$ berücksichtigen, welche auf Grund der auszuführenden Integrationen zu äquivalenten Ausdrücken führen.

2. Falls die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte k gleiche Operatorfaktoren enthält (in dem oben betrachteten Fall ist $k = 4$), ist jedem Vertex ein Faktor $k!$ zuzuordnen, der jene Symmetrie berücksichtigt, welche durch alle möglichen Anordnungen von Kommutatorbildungen und zeitgeordneten Kontraktionen entsteht.

3. Falls es jedoch ν topologisch äquivalente Möglichkeiten der Bildung zeitgeordneter Kontraktionen gibt (die zu inneren Linien Anlaß geben), so sind diese nur einmal zu zählen. Es ist also ein allgemeiner Faktor $(\nu!)^{-1}$ einzuführen.

20.4. Elektrodynamik

In diesem Abschnitt formulieren wir die Feynman-Regeln für die Elektrodynamik (siehe Tab. 20.1). Außer den in Tab. 20.1 aufgeführten Vorschriften sind noch die Vorzeichenregel und der Symmetriefaktor zu berücksichtigen.

Wie wir schon bemerkt hatten, kann ein und dasselbe Diagramm gleichzeitig verschiedene Prozesse beschreiben. Als Beispiel betrachten wir das in Abb. 20.2 dargestellte Diagramm, bei dem aus Symmetriegründen alle äußeren Impulse einlaufend gewählt wurden.

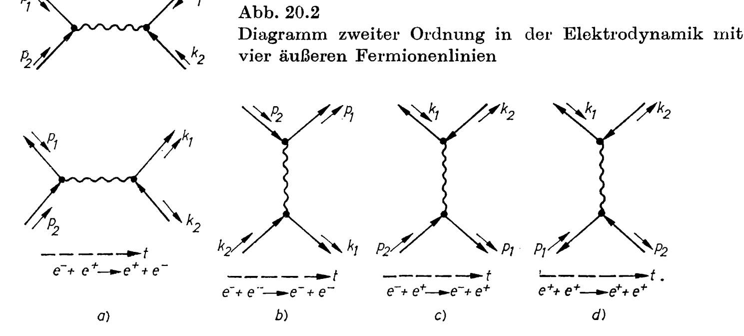
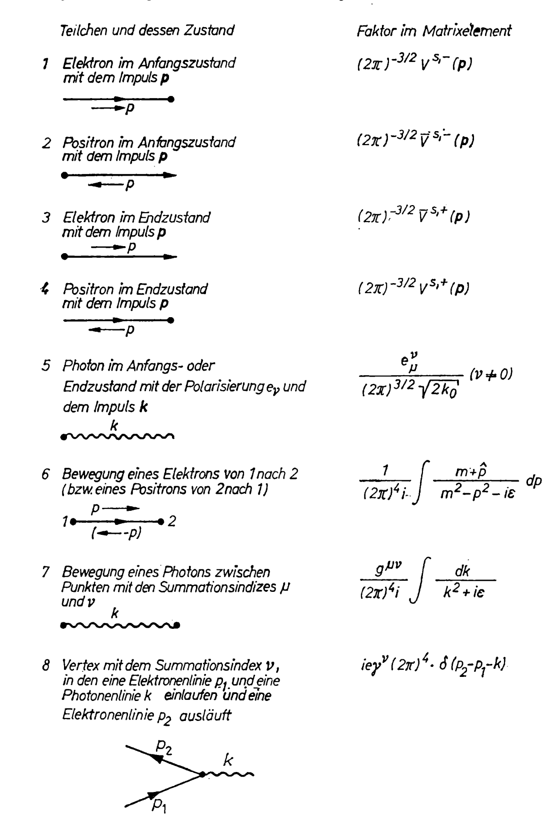


Abb. 20.2
Diagramm zweiter Ordnung in der Elektrodynamik mit vier äußeren Fermionenlinien

Abb. 20.3
Verschiedene physikalische Prozesse, die durch das in Abb. 20.2 dargestellte Diagramm beschrieben werden

Tabelle 20.1

Feynman-Regeln für die Berechnung von Matrixelementen in der Elektrodynamik



	Teilchen und dessen Zustand	Faktor im Matrixelement
1	Elektron im Anfangszustand mit dem Impuls **p**	$(2\pi)^{-3/2}\, v^{s,-}(p)$
2	Positron im Anfangszustand mit dem Impuls **p**	$(2\pi)^{-3/2}\, \bar{v}^{s,-}(p)$
3	Elektron im Endzustand mit dem Impuls **p**	$(2\pi)^{-3/2}\, \bar{v}^{s,+}(p)$
4	Positron im Endzustand mit dem Impuls **p**	$(2\pi)^{-3/2}\, v^{s,+}(p)$
5	Photon im Anfangs- oder Endzustand mit der Polarisierung e_ν und dem Impuls **k**	$\dfrac{e_\mu^\nu}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}}$ $(\nu \neq 0)$
6	Bewegung eines Elektrons von 1 nach 2 (bzw. eines Positrons von 2 nach 1)	$\dfrac{1}{(2\pi)^4 i}\displaystyle\int \frac{m+\hat{p}}{m^2-p^2-i\varepsilon}\, dp$
7	Bewegung eines Photons zwischen Punkten mit den Summationsindizes μ und ν	$\dfrac{g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i}\displaystyle\int \frac{dk}{k^2+i\varepsilon}$
8	Vertex mit dem Summationsindex ν, in den eine Elektronenlinie p_1 und eine Photonenlinie k einlaufen und eine Elektronenlinie p_2 ausläuft	$ie\gamma^\nu (2\pi)^4 \cdot \delta(p_2-p_1-k)$

Wenn man annimmt, daß die nullten Komponenten der Impulse p_1 und p_2 positiv, die der Impulse k_1 und k_2 aber negativ sind ($p_1^0, p_2^0 > 0$; $k_1^0, k_2^0 < 0$), so entspricht dieses Diagramm der Annihilation eines Elektrons $e^-(p_2)$ und eines Positrons $e^+(p_1)$ in ein Photon und der nachfolgenden Paar-Erzeugung von $e^-(K_1 = -k_1)$ und $e^+(K_2 = -k_2)$. Dieser Prozeß ist in Abb. 20.3a) dargestellt, wobei die Zeitachse von links nach rechts gerichtet ist.

Wenn hingegen p_2^0 und $k_2^0 > 0$, jedoch p_1^0 und $k_1^0 < 0$ sind, erhalten wir den Prozeß einer Elektron-Elektron-Streuung mit Ein-Photon-Austausch (Møller-Streuung). In diesem Fall ist es günstig, die Bezeichnungen $K_1 = -k_1$ und $P_1 = -p_1$ einzuführen und das Diagramm um 90° im Uhrzeigersinn zu drehen. In dem auf diese Weise erhaltenen Diagramm läuft die Zeit wieder von links nach rechts.

Der Fall $p_2^0, k_1^0 > 0, p_1^0, k_2^0 < 0$ entspricht der Møller-Streuung eines Elektrons an einem Positron. Mit den Bezeichnungen $P_1 = -p_1$, $K_2 = -k_2$ erhalten wir das Diagramm 20.3c). Das Matrixelement des Diagramms c) muß zu dem des Diagramms a) addiert werden, da beide Diagramme einen Beitrag zu ein und demselben physikalischen Prozeß (nochmalige Umbezeichnung der Impulse)

$$e^+(p_1) + e^-(p_2) \to e^+(K_1) + e^-(K_2) \tag{20.11}$$

liefern (wobei nur zu berücksichtigen ist, daß im Diagramm 20.3c) die Vektoren p_1 und K_1 mit k_1 und P_1 bezeichnet sind). Das vollständige Matrixelement des Prozesses (20.11) in der zweiten Ordnung der Störungstheorie ist deshalb gleich der Summe der den beiden Diagrammen entsprechenden Terme

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(20.3\text{a}) + \mathcal{M}(20.3\text{c})\,. \tag{20.12}$$

Betrachten wir abschließend den Fall $k_1^0, p_1^0 > 0$; $p_2^0, k_2^0 < 0$. Er entspricht der Møller-Streuung eines Positrons an einem Positron (siehe Abb. 20.3d)). Um das Streumatrixelement in diesem Falle zu erhalten, muß man die Antisymmetrie physikalischer Zustände gegenüber der Vertauschung zweier identischer Fermi-Teilchen, in unserem Falle also zweier Positronen, berücksichtigen.

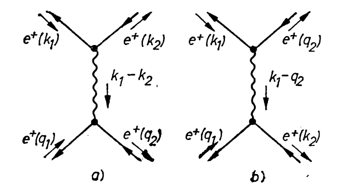


Abb. 20.4
Direktes und gekreuztes Diagramm der Møller-Streuung von Positronen

Beim Berechnen des Ausdrucks

$$\int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \langle a^-(k_2)\, a^-(q_2)\, \bar{\psi}(x)\, \hat{A}(x)\, \psi(x)\, \bar{\psi}(y)\, \hat{A}(y)\, \psi(y)\, a^+(k_1)\, a^+(q_1)\rangle$$

treten zwei Varianten der „Verkettung" der Fermi-Operatoren auf, die in der Abb. 20.4 dargestellt sind. Das Matrixelement des Prozesses

$$e^+(k_1) + e^+(q_1) \to e^+(k_2) + e^+(q_2) \tag{20.13}$$

ist deshalb als Differenz

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(20.4\text{a}) - \mathcal{M}(20.4\text{b}) \tag{20.14}$$

der den Abbildungen 20.4a) und 20.4b) entsprechenden Matrixelemente aufzuschreiben. Diese Darstellung sichert die erwähnte Antisymmetrie und damit die Einhaltung des Pauli-Prinzips. Eine analoge Situation liegt für die e^-e^--Streuung vor.

Zum Abschluß möchten wir noch auf folgendes hinweisen: In den von uns betrachteten Beispielen traten die Propagatoren des skalaren, des Spinor- und des elektromagnetischen Feldes auf. Diese Felder besitzen keine innere Symmetrie. In unseren Beispielen wurde ferner kein massives Vektorfeld betrachtet. Um das Bild abzurunden, geben wir deshalb noch die Ausdrücke für den Propagator des π-Meson-Feldes

$$\int \overline{\varphi_a(x)\, \varphi_b(y)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}\, \mathrm{d}x = \frac{\delta_{ab}}{\mathrm{i}(m^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon)} \tag{20.15}$$

und des massiven Vektorfeldes

$$\int \overline{U_\nu(x)\, U_\mu(y)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}\, \mathrm{d}x = \mathrm{i}\, \frac{g_{\nu\mu} - k_\nu k_\mu/m^2}{m^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon} \tag{20.16}$$

(vgl. Formel (18.14) und Anhang VIII.) an.

21. Übergangswahrscheinlichkeiten

21.1. Die allgemeine Struktur von Matrixelementen

Anhand des in Abschnitt 20.3. betrachteten Beispiels haben wir gesehen, daß das Übergangsmatrixelement eine δ-Funktion enthält, welche den Energie-Impuls-Erhaltungssatz für die Anfangs- und Endteilchen sichert. Unter Verwendung der Feynman-Regeln für Matrixelemente (siehe Abschnitt 20.2., Punkt 3.) kann man unschwer zeigen, daß dies eine allgemeine Eigenschaft ist, d. h. daß das entsprechende Übergangsmatrixelement $s \to r$ stets der 4-dimensionalen δ-Funktion

$$\delta\Big(\sum_{i=1}^{s} p_i - \sum_{f=1}^{r} p_f'\Big) \tag{21.1}$$

proportional ist. Das folgt auch direkt aus der Translationsinvarianz der S-Matrix. Wenn der Wechselwirkungsprozeß allerdings unter dem Einfluß äußerer Felder steht, so wird die Homogenität von Raum und Zeit teilweise oder ganz zerstört, und auch der Faktor (21.1) verschwindet teilweise oder vollständig. Zum Beispiel erhält man bei der Streuung an einem äußeren Feld, das von den räumlichen Koordinaten, aber nicht von der Zeit abhängt, anstelle von (21.1) die eindimensionale δ-Funktion

$$\delta\Big(\sum_i p_i^0 - \sum_f p_f'^0\Big)\,,$$

die dem Energieerhaltungssatz entspricht.

Wenn wir den Fall einer Wechselwirkung ohne äußere Felder betrachten, so gilt gemäß dem oben gesagten

$$\overset{*}{\Phi}_{p'}, S\Phi_p = \delta(\sum p - \sum p')\, F(p', p)\,. \tag{21.2}$$

Die Funktion F wird durch einen Satz von Feynman-Diagrammen mit $s + r$ äußeren Linien beschrieben.

Für die weiteren Betrachtungen ist es günstig, einige Begriffe aus der Graphentheorie einzuführen.

Ein Diagramm G heißt *zusammenhängend*, wenn alle Teildiagramme durch Linien verbunden sind, wenn also jeder beliebige Vertex von jedem anderen Vertex des Diagramms durch Verfolgen irgendeines Linienzuges erreicht werden kann. Falls das Diagramm G jedoch in zusammenhängende „Teile" G_1, G_2, ... zerfällt, so nennen wir es *nichtzusammenhängend*, und seine „Teile" G_i werden als zusammenhängende Komponenten bezeichnet. Ein zusammenhängendes Diagramm heißt *schwach zusammenhängend* (oder 1-Teilchen-reduzibel), wenn man es durch Entfernen lediglich einer inneren Linie in ein nichtzusammenhängendes verwandeln kann. Falls dieses nicht möglich ist, heißt das Diagramm *stark zusammenhängend* (1-Teilchen-irreduzibel oder kurz 1PI).

Jede zusammenhängende Komponente eines nichtzusammenhängenden Diagramms bringt in das Matrixelement (21.1) eine δ-Funktion ein; Beiträge von zusammenhängenden Diagrammen enthalten nur jeweils eine δ-Funktion. Aus diesem Grunde ist die Funktion F auf der rechten Seite von (21.2) für zusammenhängende Diagramme glatt, d. h., in ihr sind keine weiteren δ-Funktionen enthalten.

Bei der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten müssen Betragsquadrate berechnet werden. Offensichtlich muß man dabei auch das Quadrat der δ-Funktion bilden, was auf die in Abschnitt 18.3. erwähnte Problematik führt.

Zur Umgehung dieser Schwierigkeit erinnern wir daran, daß in der Quantentheorie gewöhnlich nur die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit- und Volumeneinheit von Interesse ist. Berücksichtigen wir noch, daß die 4-dimensionale δ-Funktion der Impulse als Ergebnis der Integration über das 4-dimensionale Volumen $V \cdot T$ für $V \to \infty$, $T \to \infty$ entsteht, dann erhalten wir die Beziehung

$$[\delta(p)]^2 = \delta(p)\,\delta(0) = \delta(p)\,(2\pi)^{-4} \int \mathrm{d}x = \delta(p)\,(2\pi)^{-4}\,VT\,.$$

Infolgedessen ist

$$|\overset{*}{\Phi}_{p'} S \Phi_p|^2 = (2\pi)^{-4}\, VT\delta(\sum p - \sum p')\,|F(p', p)|^2\,. \tag{21.3}$$

Analoge Betrachtungen für einen Übergangsprozeß in einem statischen äußeren Feld A_{ext} führen zu

$$|\overset{*}{\Phi}_{p'} S(A_{\text{ext}})\,\Phi_p|^2 = (2\pi)^{-1}\, T\delta(\sum p_0 - \sum p_0')\,|F(p', p; A_{\text{ext}})|^2\,. \tag{21.4}$$

Formel (21.4) entspricht den aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik bekannten Ausdrücken für Übergangswahrscheinlichkeiten (siehe beispielsweise [4], § 84); der divergierende Faktor T entfällt, wenn wir die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit betrachten. Das Auftreten des divergierenden Faktors V in Formel (21.3) ist auf die Verwendung ebener Wellen zurückzuführen, die in die Definition der freien Anfangs- und Endzustände mit festem räumlichen Impuls eingehen. Er fällt weg, wenn wir die Übergangswahrscheinlichkeit pro Volumeneinheit berechnen.

21.2. Normierung der Zustände

Wir wenden uns nun der Frage der Normierung von Zuständen

$$\Phi_s = a_1^+(\boldsymbol{k}_1) \cdots a_s^+(\boldsymbol{k}_s)\,\Phi_0$$

zu. Da solche Zustände Teilchen mit streng fixierten Impulswerten beschreiben, entsprechen sie ebenen Wellen. Diese haben jedoch bezüglich des ganzen 3-dimensionalen Raumes keine endliche Norm und müssen daher pro Volumenelement normiert werden. Dementsprechend ist es erforderlich, den Zustand Φ_s pro Volumenelement zu normieren.

Um den Grenzübergang $V \to \infty$ exakt durchführen zu können, betrachten wir einen 1-Teilchen-Zustand und gehen von folgendem Wellenpaket aus:

$$\Phi_1 = \int \chi_\sigma(\boldsymbol{k})\, a_\sigma^+(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \Phi_0\,. \tag{21.5}$$

Die Norm dieses Zustandes ist gleich

$$\overset{*}{\Phi}_1 \Phi_1 = \int |\chi_\sigma(\boldsymbol{k})|^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} = N\,.$$

Wenn wir $N = 1$ setzen, so ist

$$|\chi_\sigma(\boldsymbol{k})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen mit der inneren Quantenzahl σ einen Impuls im Intervall $\mathrm{d}\boldsymbol{k}$ um den Mittelwert $\boldsymbol{k}$ herum besitzt. Die Funktion $\chi(\boldsymbol{k})$ selbst kann dann als Wellenfunktion des Teilchens in der Impulsdarstellung aufgefaßt werden. Ihre Fourier-Transformierte

$$f_\sigma(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \chi_\sigma(\boldsymbol{k}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{21.6}$$

ist somit die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung, deren Norm gleich

$$\int |f_\sigma(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int |\chi_\sigma(\boldsymbol{k})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{k} = N$$

ist. Für $N = 1$ kann man die Größe

$$|f(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{21.7}$$

als Wahrscheinlichkeit im Ortsraum interpretieren. Falls wir N gleich der Teilchenzahl setzen und annehmen, daß diese sehr groß ist, so gibt (21.7) die mittlere Teilchenzahl pro Volumenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ an.

Wir erinnern hier daran, daß wir, entsprechend der statistischen Interpretation der Quantenmechanik, stets Gesamtheiten von Quantensystemen betrachten müssen, d. h. eine große Anzahl identischer Systeme von Mikroobjekten oder eine fiktive Gesamtheit identischer Exemplare ein und desselben Systems. In dem hier betrachteten Fall ist diese Vorstellung der im Experiment realisierten Situation völlig adäquat; z. B. sind die in den Beschleunigern erzeugten Teilchenstrahlen als Strahlen identischer Teilchen von äußerst geringer Dichte anzusehen, so daß die Teilchen nicht miteinander wechselwirken und „der Reihe nach" auf ein und dieselbe Weise auf das Target treffen.

Wenn wir nun die Norm N unbegrenzt wachsen lassen, wobei χ_σ gegen $(2\pi)^{3/2} \times \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)$ streben soll, so erhalten wir ein Wellenpaket mit einem immer schärfer fixierten Impuls. Aus (21.6) folgt dann, daß dabei

$$|f_\sigma(\boldsymbol{x})| \to 1$$

und also auch

$$|f_\sigma(\boldsymbol{x})|^2 \to 1$$

strebt, so daß im Grenzfall auf jede Volumeneinheit genau ein Teilchen kommt.

Nach Ausführung dieses Grenzübergangs erhalten wir somit einen Ausdruck für den 1-Teilchen-Zustand, der bezüglich des Einheitsvolumens normiert ist

$$\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} \, a_\sigma^+(\boldsymbol{k}) \, \Phi_0 \, .$$

Falls mehrere Teilchensorten an dem Streuprozeß teilnehmen, so haben wir anstelle von (21.5) den Ausdruck

$$\Phi_s = \prod_{1 \leq i \leq s} \{ \int \chi_{\sigma_i}(\boldsymbol{k}_i) \, \overset{+}{a}_{\sigma_i}(\boldsymbol{k}_i) \, \mathrm{d}\boldsymbol{k}_i \} \, \Phi_0 \tag{21.8}$$

zu betrachten, wobei alle Mengen $\{\sigma_i, \boldsymbol{k}_i\}$ voneinander verschieden sind. Die Norm einer solchen Amplitude ist offensichtlich gleich dem Produkt der Normen der s 1-Teilchen-Zustände

$$\overset{*}{\Phi}_s \Phi_s = N_1 N_2 \ldots N_s \, . \tag{21.9}$$

Wiederholen wir diese Betrachtungen für jeden der Faktoren in (21.8) und (21.9), so kommen wir zu dem Ergebnis, daß der bezüglich des Einheitsvolumens (pro Teilchensorte) normierte Zustand die Gestalt

$$\Phi_s = \prod_i \{(2\pi)^{3/2} a_{\sigma_i}(\boldsymbol{k}_i)\} \Phi_0 \tag{21.10}$$

hat.

21.3. Allgemeine Formel für die Übergangswahrscheinlichkeit

Wir wenden uns nun der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten solcher Prozesse zu, in deren Anfangszustand sich s Teilchenströme mit genau definierten Impulsen $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_s$ und inneren Quantenzahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ (wie Masse, Ladung und Spin) befinden. Wir interessieren uns für die mittleren Teilchenzahlen der in die infinitesimalen Impulsintervalle $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1, \ldots, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_r$ um die Impulse $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_r$ gestreuten Teilchen mit den inneren Quantenzahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$.

Wenn wir als Anfangszustand Φ_k den Ausdruck (21.10) wählen, dann führt die Wechselwirkung das System in den Zustand

$$S(1)\,(2\pi)^{3s/2}\,\Phi_k$$

über. Deshalb sind die mittleren Teilchenzahlen in einem durch die normierbare Amplitude Φ_α beschriebenen Endzustand entsprechend der allgemeinen quantenmechanischen Regel durch

$$(2\pi)^{3s}\,\frac{|\overset{*}{\Phi}_\alpha S(1)\,\Phi_k|^2}{\overset{*}{\Phi}_\alpha \Phi_\alpha} \tag{21.11}$$

bestimmt. Die gewählte Normierung entspricht hierbei dem Fall, daß die mittleren Teilchenzahlen im Anfangszustand pro Volumeneinheit gleich Eins sind, anderenfalls ist die Formel (21.11) mit dem Produkt $n_1 n_2 \ldots n_r$ der entsprechenden Teilchenzahlen n_i zu multiplizieren.

Uns interessiert die Zahl der Teilchen, die in die Impulsintervalle $\Delta\boldsymbol{p}_1, \ldots, \Delta\boldsymbol{p}_r$ um die Mittelwerte $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_r$ gestreut werden. Wir wollen dabei annehmen, daß jedes Teilchen im Anfangszustand einen anderen Impuls besitzt als im Endzustand. Vom experimentellen Standpunkt aus gesehen bedeutet dies, daß jene Teilchen, die ihren Impuls nicht geändert haben, zum Primärstrahl gezählt werden, während als gestreut nur diejenigen Teilchen angesehen werden, die ihren Impuls geändert haben.

Wir wählen als Ansatz für den Endzustand

$$\Phi_\alpha = (2\pi)^{3r/2} \int_\Delta \Phi_{\ldots \boldsymbol{p} \ldots}\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_r\,,$$

wobei Δ das Produkt aller Volumenelemente $\Delta\boldsymbol{p}_f$ bezeichnet. Es gilt deshalb

$$\overset{*}{\Phi}_\alpha \Phi_\alpha = (2\pi)^{3r}\, \Delta\boldsymbol{p}_1 \ldots \Delta\boldsymbol{p}_r\,,$$

und anstelle von (21.11) erhalten wir

$$\frac{n_1 \ldots n_s (2\pi)^{3s}}{\Delta\boldsymbol{p}_1 \ldots \Delta\boldsymbol{p}_r} \left| \int_\Delta \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1' \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_r'\, \Phi_{\boldsymbol{p}'} S \Phi_k \right|^2.$$

Das ist wegen der Definition des Gebietes Δ gleich

$$n_1 \dots n_s (2\pi)^{3s} \, |\overset{*}{\Phi}_p S \Phi_k|^2 \, \Delta \boldsymbol{p}_1 \dots \Delta \boldsymbol{p}_r \,. \tag{21.12}$$

Die allgemeine Struktur von Quadraten der Matrixelemente $|\overset{*}{\Phi} \dots S\Phi \dots|^2$ haben wir bereits im Abschnitt 21.1. erörtert. Setzen wir den Ausdruck (21.3) in (21.12) ein und dividieren durch $V \cdot T$, dann erhalten wir für die Anzahl der Teilchen, die pro Zeit- und Volumeneinheit in das Intervall $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1, \dots, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_r$ um $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_r$ gestreut werden,

$$(2\pi)^{3s-4} \, n_1 \dots n_s \, |F(p, k)|^2 \, \delta(\sum p - \sum k) \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \dots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_r \,. \tag{21.13}$$

Mittels (21.4) kann man auch den entsprechenden Ausdruck für die Streuung an einem statischen klassischen Feld pro Zeiteinheit angeben

$$(2\pi)^{3s-1} \, n_1 \dots n_s \, |F(p, k, A_{\text{ext}})|^2 \, \delta(\sum p^0 - \sum k^0) \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \dots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_r \,. \tag{21.14}$$

Wir sehen also, daß man zur Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten zuerst das Matrixelement (21.2) berechnen muß und dann die sich daraus ergebende Funktion F in (21.13) bzw. (21.14) einzusetzen hat.

In Verbindung mit dem Übergang von (20.1) zu (21.10) ist es von Nutzen, die Normierung des Matrixelementes zu ändern. Anstelle von (21.2) setzen wir

$$\overset{*}{\Phi}_{\dots p \dots} S \Phi_{\dots k \dots} = \frac{\mathrm{i}(2\pi)^{4-(3/2)(s+r)}}{\{\prod\limits_i (2k_i^0) \prod\limits_f (2p_f^0)\}^{1/2}} \, \delta(\sum p - \sum k) \, \mathcal{M}(p, k) \,. \tag{21.15}$$

Formel (21.13) nimmt dann die Form

$$2\pi \, n_1 \dots n_s \frac{|\mathcal{M}(p, k)|^2}{\prod\limits_i (2k_i^0)} \, R_r \tag{21.16}$$

an, wobei

$$R_r = \prod_{1 \leqq f \leqq r} \left\{ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f}{(2\pi)^3 \, 2p_f^0} \right\} (2\pi)^3 \, \delta(\sum p - \sum k) \tag{21.17}$$

die Dichte der Endzustände im $3r$-dimensionalen Impulsraum bezeichnet. Wenn sich im Endzustand lediglich zwei Teilchen befinden ($r = 2$), so ist es günstiger, mit Hilfe der δ-Funktionen vier Integrationen auszuführen und anstelle des 6-dimensionalen ein 2-dimensionales Phasenvolumen zu benutzen. Die Dichte im 2-dimensionalen Phasenraum kann dann in folgender Weise dargestellt werden:

$$R_2 = \frac{\mathrm{d}\Omega_1}{4\pi \cdot 8\pi^2} \cdot \frac{p_1^3}{[(\boldsymbol{p}_1)^2 \, Q_0 - p_1^0 (\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{Q})]} \,, \tag{21.18a}$$

wobei die Bezeichnung $Q = \sum\limits_i k_i$, $p_1 = |\boldsymbol{p}_1|$ eingeführt wurde, und p_1 die Gleichung

$$(Q - p_1)^2 - m_2^2 = 0$$

erfüllt.

Falls ein Teilchen wesentlich schwerer als das andere ist ($m_2 \gg m_1, p_1$), erhalten wir

$$R_2 = \frac{p_1 \, \mathrm{d}\Omega_1}{32\pi^3 \, m_2} \,. \tag{21.18b}$$

Im Schwerpunktsystem gilt dann

$$R_2 = \frac{p_1 \, \mathrm{d}\Omega_1}{32\pi^3 \, Q^0} \,. \tag{21.18c}$$

21.4. Streuung zweier Teilchen

Ein wichtiger Spezialfall ist die Streuung zweier Teilchen ($2 \to 2$). Das Übergangsmatrixelement auf der linken Seite von (21.15) kann bekanntlich auch bei verschwindender Wechselwirkung (d. h. auch wenn $S = 1$ ist) von Null verschieden sein, wenn die Impulse und Quantenzahlen der Teilchen im Anfangs- mit denen des Endzustands zusammenfallen.

Um lediglich den reinen Wechselwirkungseffekt zu erfassen, subtrahiert man vom vollständigen Matrixelement den „diagonalen" Anteil, d. h., man betrachtet den Ausdruck

$$\overset{*}{\Phi}_{\ldots\boldsymbol{p}\ldots}(S-1)\,\Phi_{\ldots\boldsymbol{k}\ldots}\,,$$

der sich für $p_i \neq k_i$ nicht vom ursprünglichen unterscheidet. In Übereinstimmung mit (21.15) schreiben wir

$$\overset{*}{\Phi}_0 a_1^-(\boldsymbol{p}_1)\, a_2^-(\boldsymbol{p}_2)\,(S-1)\, a_1^+(\boldsymbol{k}_1)\, a_2^+(\boldsymbol{k}_2)\,\Phi_0 = \frac{\mathrm{i}\delta(p_1+p_2-k_1-k_2)}{2\pi(p_1^0p_2^0k_1^0k_2^0)^{1/2}}\, f(p_1, p_2; k_1, k_2)\,, \tag{21.19}$$

wobei wir gleichzeitig die Norm etwas abgeändert haben. Die hier eingeführte Funktion f ist die Streuamplitude im relativistischen Fall. Die Normierung der rechten Seite von (21.19) entspricht der Streuung spinloser Teilchen. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Amplitude f eine dimensionslose, relativistisch invariante Funktion ist.

Bei der Streuung eines Bosons (mit dem Erzeugungsoperator $a_n^+(\boldsymbol{k})$) an einem Fermion (mit dem Erzeugungsoperator $b_\nu^+(\boldsymbol{q})$) führt man die Streuamplitude gewöhnlich etwas anders ein:

$$\overset{*}{\Phi}_0 a_m^-(\boldsymbol{k}')\, b_\mu^-(\boldsymbol{q}')\,(S-1)\, a_n^+(\boldsymbol{k})\, b_\nu^+(\boldsymbol{q})\,\Phi_0 = \frac{\mathrm{i}\delta(k'+q'-k-q)}{2\pi\sqrt{k_0k_0'}}\, f_{\nu n,\mu m}(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{q}'; \boldsymbol{k}, \boldsymbol{q})\,. \tag{21.20}$$

Hierbei sind n und m Isospin-Indizes der Bosonen, ν und μ Spin- und Isospin-Indizes der Fermionen. Die Formel (21.20) wird z.B. bei der Streuung von Photonen, Elektronen (Compton-Streuung) oder für die Pion-Nukleon-Streuung angewendet. Die matrizenwertige Streuamplitude $f_{\nu n,\mu m}$ hat die Dimension $[m^{-1}] = \mathrm{cm}^1$ und kann durch Einführung einer entsprechenden Masse dimensionslos gemacht werden. Gewöhnlich verzichtet man jedoch darauf, um die Korrespondenz zum nichtrelativistischen Grenzfall mit der dimensionsbehafteten quantenmechanischen Streuamplitude zu erhalten.

Durch die Normierung (21.20) erhalten wir anstelle von (21.16)

$$n_1 n_2 (2\pi)^3\, 4\,\frac{q_0'}{k_0}\, |f|^2\, R_2\,. \tag{21.21}$$

Dieser Ausdruck gibt die Anzahl der Teilchen an, die pro Zeit- und Volumeneinheit in R_2 gestreut werden. Diese Zahl wird gewöhnlich in der Form $n_1 n_2 v(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\sigma$ dargestellt, wobei $v(\boldsymbol{k})$ der Betrag der Geschwindigkeit der Primärteilchen im Laborsystem (LS) ist, d. h., es gilt $v = 1$ für das Photon und $v = |\boldsymbol{k}|/k_0$ für Teilchen mit endlicher Ruhmasse. Der Faktor $\mathrm{d}\sigma$ wird als *differentieller Wirkungsquerschnitt*

bezeichnet und hat die Dimension einer Fläche [cm²]. Er ist proportional dem Raumwinkelelement $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}$, in dem die gestreuten Teilchen, d. h. die Teilchen des Sekundärstrahls, registriert werden. Gemäß (21.18a) und (21.21) hat er die Form

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{k'}} = \frac{q_0'(k')^3}{k[(k')^2 Q_0 - k_0'(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{Q})]} |f|^2 , \qquad k = |\boldsymbol{k}| . \tag{21.22}$$

Im statischen Grenzfall der Pion-Nukleon-Streuung ist

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}} = |f|^2 . \tag{21.23}$$

Integrieren wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt über den vollen Raumwinkel, dann erhalten wir den *totalen Wirkungsquerschnitt* im Laborsystem

$$\sigma = \int\limits_{4\pi} \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}} . \tag{21.24}$$

Zum Abschluß weisen wir noch darauf hin, daß es mit Hilfe des sogenannten optischen Theorems (siehe [4], § 86; [17], § 125; [8], § 107 und [20], Kapitel XIX) möglich ist, den Imaginärteil der elastischen Vorwärts-Streuamplitude, die als Grenzwert der Streuamplitude für kleine Winkel definiert ist,

$$f(E, \Theta = 0) = \lim_{\Theta \to 0} f(E, \Theta) \tag{21.25}$$

durch den totalen Wirkungsquerschnitt gemäß

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{elast}} + \sigma_{\text{unelast}} \tag{21.26}$$

auszudrücken.

Für die in (21.20) eingeführte Pion-Nukleon-Streuamplitude schreibt sich das optische Theorem in der Form

$$\operatorname{Im} f_{\nu n, \mu m}(k, q; k, q) = \frac{|\boldsymbol{k}|_{Ls}}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}^{\nu n} . \tag{21.27}$$

Für die dimensionslose Pion-Pion-Streuamplitude mit der Normierung (21.19) ist es jedoch günstiger, diese durch invariante Veränderliche folgendermaßen auszudrücken:

$$\begin{gathered} \operatorname{Im} f(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) = \frac{\sqrt{s(s - 4m^2)}}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}(s) , \\ s = (k_1^0 + k_2^0)^2 - (\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)^2 . \end{gathered} \tag{21.28}$$

21.5. Zweiteilchenzerfall

Wir wollen nun annehmen, daß sich im Anfangszustand ein Teilchen ($s = 1$) der Masse M befindet, im Endzustand dagegen zwei Teilchen ($r = 2$) mit den zugehörigen Massen m_1 und m_2. Eine solche Situation entspricht dem Zweiteilchenzerfall des Teilchens M, der bei $M > m_1 + m_2$ kinematisch erlaubt ist.

Gemäß Formel (21.16) ist die mittlere Anzahl der Teilchen, die sich im Endzustand in den Intervallen $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1$ bzw. $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2$ pro Zeit- und Volumeneinheit befinden,

gleich

$$2\pi\, n \frac{|\mathcal{M}(p, k)|^2}{2k^0} R_2 \,.$$

Wenn wir uns in das Ruhsystem des Anfangsteilchens, d. h. in das Schwerpunktsystem der Zerfallprodukte begeben, erhalten wir mit Hilfe von (21.18c) für $n = 1$

$$\frac{p}{32\pi^2 M^2} |\mathcal{M}(p, k)|^2 \, d\boldsymbol{\Omega}$$

mit

$$p = \frac{[(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2]^{1/2}}{2M} \,.$$

Integriert man diesen Ausdruck über den Raumwinkel, bekommt man die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Zweiteilchenzerfalls pro Zeiteinheit

$$w = \frac{p}{M^2} \int d\boldsymbol{\Omega} \, |\mathcal{M}(p, \boldsymbol{\Omega})|^2 \,. \tag{21.29}$$

Die Größe w hat die Dimension einer Masse (in gewöhnlichen Maßeinheiten $= \mathrm{cm}^{-1}$) und fällt mit der energetischen Halbwertsbreite zusammen: $w = \Gamma$. Falls mehrere Zerfallskanäle existieren, so setzt sich die gesamte Halbwertsbreite als Summe aus den einzelnen Halbwertsbreiten (21.29) zusammen

$$\Gamma_{\mathrm{tot}} = \sum_i \Gamma_i \,.$$

Die mittlere Lebensdauer τ des zerfallenden Teilchens ist durch die Beziehung

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{\mathrm{tot}}} \left(= \frac{\hbar}{\Gamma_{\mathrm{tot}}} \right) \tag{21.30}$$

definiert.

Berechnung von Feynman-Integralen. Divergenzen

22. Integrationsmethoden

22.1. Integrale über virtuelle Impulse

Im allgemeinen ist die Anzahl n der Vertizes kleiner als die Anzahl L der inneren Linien eines Diagramms. Infolgedessen enthalten die Matrixelemente Integrale über virtuelle Impulse

$$\mathcal{M}(\dots p \dots) = \int \mathrm{d}k_1 \dots \mathrm{d}k_c\, F(p, k)\,.$$

Die Anzahl c der Integrationen ist dabei gleich der Anzahl der „Loops", d. h. der Anzahl topologisch unabhängiger, geschlossener Linienzüge des Diagramms.

Der Integrand F dieser Integrale ist ein Produkt von Propagatoren und Vertexfaktoren. Die Propagatoren (Green-Funktionen der freien Theorie) haben dabei die allgemeine Struktur

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{P_{\alpha\beta}(k)}{m^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\,;$$

sie entsprechen den inneren Linien, längs der der abzuintegrierende Impuls läuft. Die Vertexfaktoren enthalten die Kopplungskonstante, Matrizen und, falls die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte Ableitungen enthält, Komponenten der in die Vertizes einlaufenden Impulse.

Der allgemeinste Ausdruck für ein Integral über die virtuellen Impulse hat daher die Gestalt

$$I(p, L) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \mathrm{d}k \prod_{l=1}^{L} \{m_l^2 - (k + p_l)^2 - \mathrm{i}\varepsilon\}^{-1}\, P(k, p)\,, \tag{22.1}$$

wobei P ein Polynom der Vektoren $k, \dots, p, \dots$ mit Matrixkoeffizienten ist.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, Methoden zur Behandlung von Integralen dieses Typs zu entwickeln.

22.2. α-Darstellung und Gaußsche Integrale

Eine erfolgreiche Methode zur Berechnung der Integrale (22.1) besteht darin, die Faktoren im Nenner des Integranden als Parameterintegrale

$$\frac{1}{m^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon} = \mathrm{i} \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(k^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon)}\, \mathrm{d}\alpha \tag{22.2}$$

umzuschreiben. Dies bezeichnen wir als den Übergang in die α-Darstellung. Damit wird die Integration in (22.1) auf eine Gaußsche Quadratur zurückgeführt.

Das vierdimensionale Gaußsche Grundintegral hat die Gestalt

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2 + 2bk)}\, \mathrm{d}k = \frac{1}{a^2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b^2/a}\,, \tag{22.3}$$

wobei a eine Zahl und b ein beliebiger Vektor ist. Da beide Seiten der Gleichung bezüglich der Komponenten der Vektoren faktorisieren, genügt es, ein Produkt von vier eindimensionalen Gaußschen Integralen der Gestalt

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(-at^2 + 2bt)\, dt$$

zu berechnen.

Um von einem wohldefinierten Ausdruck auszugehen, betrachten wir $I(a, b)$ als Grenzwert des Integrals

$$I(a - i\eta, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\,[i(-at^2 + 2bt) - \eta t^2]\, dt\,, \qquad a > 0\,, \qquad \eta \to +0\,.$$

Zu seiner Berechnung führen wir die Variablentransformation

$$t = \frac{1 - i}{\sqrt{2}} x + \frac{b}{a}\,, \qquad i(-at^2 + 2bt) = -ax^2 + ib^2/a$$

durch. Sie entspricht einer Verschiebung des Koordinatenursprungs um b/a und einer nachfolgenden Drehung des Integrationsweges in der komplexen Ebene um 45°. Im Grenzwert $\eta = 0$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \frac{1 - i}{\sqrt{2}} e^{ib^2/a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx \\ &= (\pi/ai)^{1/2} \exp\,(+ib^2/a)\,, \qquad a > 0\,. \end{aligned}$$

Das entsprechende Integral für $a < 0$ ergibt sich hieraus durch komplexe Konjugation zu

$$I(-|a|, b) = \overset{*}{I}(a, b) = (i\pi/|a|)^{1/2} \exp\,(-ib^2/|a|)\,.$$

Für die linke Seite der Gleichung (22.3) erhält man damit das nachfolgende Produkt

$$\begin{aligned} &\int e^{i(ak_0^2 + 2b_0k_0)}\, dk_0 \prod_{1 \leq n \leq 3} \int e^{-i(ak_n^2 + 2b_nk_n)}\, dk_n \\ &= I(-a, b_0)\, I(a, -b_1)\, I(a, -b_2)\, I(a, -b_3) = (\pi^2/ia^2) \exp \frac{b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2}{ia}\,, \end{aligned}$$

womit Gl. (22.3) bewiesen ist.

Es sei bemerkt, daß bei der Berechnung des Integrals über k_0 anstelle der komplexen Konjugation auch der Übergang zu einem komplexen Argument $k_0 = ik_4$ möglich ist. Das entspricht einer Drehung des Integrationsweges bezüglich k_0 um 90°. Eine solche Operation, die zu dem vierdimensionalen euklidischen Integral

$$\int d^4k = \int dk^0 \int d\boldsymbol{k} \to i \int dk_4 \int d\boldsymbol{k} \equiv i \int (d_4k)_E$$

führt, wird *Wick-Rotation* genannt.

Alle im weiteren benötigten Integrale mit Faktoren k_μ im Zähler (sie kommen aus dem Polynom $P(k, p)$ in Formel (22.1)), lassen sich aus dem Gaußschen Grund-

integral durch Differentiation nach den Komponenten b_ν berechnen:

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2+2bk)}\,[k^\nu]\,\mathrm{d}k = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b^2/a}\left[-\frac{b^\nu}{a}\right], \tag{22.4a}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2+2bk)}\,[k^\nu k^\mu]\,\mathrm{d}k = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b^2/a}\left[\frac{2b^\nu b^\mu + \mathrm{i}ag^{\nu\mu}}{2a^2}\right], \tag{22.4b}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2+2bk)}\,[k^2]\,\mathrm{d}k = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b^2/a}\left[\frac{b^2 + 2\mathrm{i}a}{a^2}\right]. \tag{22.4c}$$

Mit der Darstellung (22.2) können wir nun die rechte Seite von (22.1) in die Form

$$\frac{\mathrm{i}^{L+1}}{\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_L \int \mathrm{d}k\; P(k,p)\,\exp \mathrm{i}(Ak^2 + 2Bk - M^2 + \mathrm{i}\varepsilon A)$$

bringen. Hier ist $A = \alpha_1 + \cdots + \alpha_L$, $B = \sum_l \alpha_l p_l$ und $M^2 = \sum \alpha_l(m_l^2 - p_l^2)$. Stellen wir ferner P in der Form

$$P(k,p) = P(p) + k^\nu P_\nu(p) + k^\nu k^\mu P_{\nu\mu}(p) + \cdots$$

dar, so erhalten wir mit (22.3) und (22.4)

$$I(p,L) = \mathrm{i}^L \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_L}{A^2}\exp \mathrm{i}\left(-\frac{B^2}{A} - M^2 + \mathrm{i}\varepsilon A\right)$$
$$\times\left[P(p) - \frac{B^\nu}{A}P_\nu(p) + \frac{2B^\nu B^\mu + \mathrm{i}Ag^{\nu\mu}}{2A^2}P_{\nu\mu}(p) + \cdots\right].$$

Um diese singuläre Integration ausführen zu können, führen wir folgende Transformation $(\alpha_1, \ldots, \alpha_L) \to (x_1, \ldots, x_{L-1}, A)$ der Integrationsvariablen durch:

$$\alpha_l = x_l A\,, \qquad l = 1, 2, \ldots, L-1, \qquad \alpha_L = (1 - x_1 - \cdots - x_{L-1})\,A\,,$$
$$\left|\frac{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_L}{\partial x_1 \ldots \partial x_{L-1}\,\partial A}\right| = A^{L-1}\,. \tag{22.5}$$

Unter Berücksichtigung von $\sum_{l=1}^{L} x_l = 1$ und

$$B^2/A + M^2 = AD(x,p);$$
$$D(x,p) = \Big(\sum_{l=1}^{L} x_l p_l\Big)^2 + \sum_{l=1}^{L} x_l(m_l^2 - p_l^2) \tag{22.6}$$

erhalten wir

$$I(p,L) = \mathrm{i}^L \int_0^\infty \mathrm{d}A\, A^{L-3}\int_0^1 \{\mathrm{d}x\}_L\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}A(-D+\mathrm{i}\varepsilon)}\left\{Q_0 + \frac{1}{A}Q_1 + \ldots\right\}, \tag{22.7}$$

mit

$$\int_0^1 \{\mathrm{d}x\}_L = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \ldots \int_0^1 \mathrm{d}x_L \, \delta(1 - \sum_l x_l)$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{1-x_1-x_2} \mathrm{d}x_3 \ldots \int_0^{1-x_1-x_2-\cdots-x_{L-2}} \mathrm{d}x_{L-1} \, ,$$

$$Q_0(p, x) = P(p) - b^\nu P_\nu + b^\nu b^\mu P_{\nu\mu} \, ,$$

$$Q_1(p, x) = (\mathrm{i}/2) \, P^\nu_\nu + \cdots \, , \qquad b = \sum_l x_l p_l \, .$$

Jetzt läßt sich die singuläre Integration über A mit Hilfe der zu Gl. (22.2) analogen Formel

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}A(-D+\mathrm{i}\varepsilon)} A^{L-3} \, \mathrm{d}A = \frac{-\Gamma(L-2)}{\mathrm{i}^L(D - \mathrm{i}\varepsilon)^{L-2}} \, , \qquad L > 2 \, , \tag{22.8}$$

ausführen. Für $L \leqq 2$ bzw. bei Anwesenheit von Teilchen mit von Null verschiedenem Spin ($P_{\nu\mu} \neq 0$) kann der Fall eintreten, daß (22.8) nicht anwendbar ist, da dann $L - 2$ Null oder negativ ist. Solche Integrale enthalten eine nichtintegrable Singularität bei $A = 0$, die mit den sogenannten UV-Divergenzen des Ausgangsintegrals (22.1) zusammenhängt; sie werden ausführlich in Vorlesung 23. betrachtet.

Die oben dargelegte Methode ist jedoch für die Berechnung von Feynman-Integralen ohne UV-Divergenzen ausreichend. Nach Ausführung der Integration über A hat $I(p, L)$ die Form eines mehrfachen Integrals über die Parameter x_l

$$I(p, L) = \mathrm{i}^2 \int_0^1 \frac{\{\mathrm{d}x\}_L}{(D - \mathrm{i}\varepsilon)^{L-2}} \left\{ (L-3)! \, Q_0 + \frac{(L-2)!}{\mathrm{i}D} Q_1 + \cdots \right\} . \tag{22.9}$$

Diese verbleibenden Integrationen über die Parameter x_l sind im allgemeinen nicht singulär und können für $l \leqq 3$ vollständig ausgeführt werden.

22.3. Die Feynman-Parametrisierung

Wir wollen nun eine andere Methode zur Berechnung der Integrale vom Typ (22.1) vorstellen. Als Ausgangspunkt dient die Formel

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_L} = (L-1)! \int_0^1 \frac{\{\mathrm{d}x\}_L}{\left(\sum_{1 \leqq l \leqq L} a_l x_l\right)^L} \, , \tag{22.10}$$

die Feynman in seinen ersten Arbeiten verwendete.

Indem wir $(k + p_l)^2 - m_l^2 + \mathrm{i}\varepsilon = a_l$ setzen, ergibt sich (22.1) als Integral über gewisse Parameter x_l

$$I(p, L) = (-1)^L (L-1)! \int_0^1 \{\mathrm{d}x\}_L \, J_L(p, x) \, , \tag{22.11}$$

wobei

$$J_L(p, x) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}k \, P(k, p)}{[Z(p, k, x)]^L} \quad .$$

und Z eine quadratische Form in den Komponenten von k ist:

$$Z(p, k, x) = \sum_l x_l[(k + p_l)^2 - m_l^2 + i\varepsilon] = k^2 + 2bk + b^2 - D + i\varepsilon .$$

Nach der Translation $k \to k + b = q$ der Integrationsvariablen folgt

$$J_L(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq\, P(q - b, p)}{(q^2 - D + i\varepsilon)^L}, \tag{22.12}$$

wobei D der (22.6) eingeführte Ausdruck ist.

In einer Reihe von Fällen kann dieses Integral auf das einfachere Integral

$$\tilde{J}_3(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{(q^2 - D + i\varepsilon)^3} \tag{22.13}$$

zurückgeführt werden. Um dies einzusehen, bemerken wir zunächst, daß alle Integrale der Form $\int q^\nu F(q^2)\, dq$, $\int q^\nu q^\mu q^\varrho F(q^2)\, dq, \ldots$, mit einer ungeraden Anzahl von Komponenten des Integrationsvektors q^ν aus Symmetriegründen verschwinden. Aus denselben Gründen vereinfachen sich die Integrale mit einer geraden Anzahl von Komponenten wie folgt:

$$\int q^\nu q^\mu F(q^2)\, dq = \tfrac{1}{4} g^{\nu\mu} \int q^2 F(q^2)\, dq ,$$

$$\int q^\nu q^\mu q^\varrho q^\sigma F(q^2)\, dq = \tfrac{1}{24} (g^{\nu\mu} g^{\varrho\sigma} + g^{\nu\varrho} g^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\mu\varrho}) \int (q^2)^2 F(q^2)\, dq .$$

Damit kann das Polynom $P(q - b, p)$ durch ein Polynom in q^2 und schließlich durch eines in $(q^2 - D)$ ersetzt werden. Daher kann das Integral (22.12) als Linearkombination von Integralen

$$\tilde{J}_l(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{(q^2 - D + i\varepsilon)^l}, \qquad l \leqq L \tag{22.14}$$

ausgedrückt werden. Diese wiederum werden im Falle $l \geqq 3$ mittels Integration über D auf $\tilde{J}_3$ zurückgeführt. Für $l \leqq 2$ hingegen existiert das Integral (22.14) nicht. Durch Kombination der Formeln (22.2), (22.3) und (22.8) können wir das Integral (22.13) berechnen und erhalten

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq_0\, d\boldsymbol{q}}{(q_0^2 - \boldsymbol{q}^2 - D + i\varepsilon)^3} = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq_0\, d\boldsymbol{q}}{(-q_4^2 - \boldsymbol{q}^2 - D + i\varepsilon)^3}$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d_E q}{(q_E^2 + D)^3} = \frac{1}{2D}. \tag{22.15}$$

Die Differentiation nach D liefert

$$\tilde{J}_L(p, x) = \frac{(-1)^{L+1}}{(L-1)(L-2)} \cdot \frac{1}{D^{L-2}} \qquad (L \geqq 3) . \tag{22.16}$$

Setzen wir dies schließlich in (22.11) ein, so ergibt sich

$$\tilde{I}_L(p, L) = -(L - 3)! \int_0^1 \frac{\{dx\}_L}{[D(x, p) + i\varepsilon]^{L-2}}, \tag{22.17}$$

eine Formel, die im einfachsten Fall $\big(P(k, p) = 1\big)$ mit dem Ausdruck (22.9) übereinstimmt.

Damit führen beide Integrationsmethoden zu demselben Ergebnis.

22.4. Die Ultraviolett-Divergenzen

Wie oben bereits mehrfach betont wurde, können sich Matrixelemente, die formal vermöge der Feynman-Regeln durch Integrale des Typs (22.1) über virtuelle Impulse gegeben sind, als nicht wohldefiniert erweisen; sie divergieren, weil der Integrand für große k nicht schnell genug abfällt.

Diese vom Bereich großer virtueller Impulse k herrührenden Divergenzen werden *Ultraviolett-(UV)-Divergenzen* genannt. Sie sind typisch für die störungstheoretisch berechneten Matrixelemente einer relativistischen Quantenfeldtheorie und treten in der Regel für die Mehrzahl aller Feynman-Diagramme auf.

Die einfachste Divergenz begegnet uns im Integral

$$I(p) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}k}{(m^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon)\,[m^2 - (k - p)^2 - \mathrm{i}\varepsilon]},$$

das einem 1-Loop-Diagramm mit zwei skalaren inneren Linien entspricht (Abb. 22.1); für große Impulse k divergiert es logarithmisch.

Abb. 22.1
Skalares 1-Loop-Diagramm zweiter Ordnung

Dieses Integral $I(p)$ stellt formal die Fourier-Transformierte des Quadrates der kausalen Green-Funktion dar

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}\, I(p)\, \mathrm{d}p = \mathrm{i}2^8\pi^6[D^c(x - y)]^2 .$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Relation ist jedoch wegen des singulären Verhaltens der Funktion D^c auf dem Lichtkegel nicht definiert. Er ergibt sich bei der Umformung des in $S_2(x, y)$ eingehenden T-Produktes $\mathrm{T}(\mathcal{L}(x)\, \mathcal{L}(y))$ mittels des Wick-Theorems. In der Vorlesung 14. war bereits gezeigt worden, daß derartige Ausdrücke für $x = y$ nicht definiert sind. Die Möglichkeit, sie mittels quasilokaler Operatoren $\Lambda_2(x, y)$ korrekt zu definieren, war dann in Vorlesung 16. dargelegt worden.

Die quasilokalen Operatoren Λ_2 können stets so gewählt werden, daß die mit ihrer Hilfe korrigierten Ausdrücke (22.16) und (22.17) endlich werden. Diese Prozedur bezeichnet man als Beseitigung der UV-Divergenzen mittels Renormierung. Sie wird in den Vorlesungen 27. und 28. ausführlich dargelegt.

Zur Analyse des Charakters der UV-Divergenzen und zur Wahl geeigneter Operatoren $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ ist es zweckmäßig, die divergenten Integrale vorübergehend zu regularisieren. In der nächsten Vorlesung werden daher verschiedene Varianten der Regularisierung vorgestellt.

23. Regularisierungen

23.1. Die Notwendigkeit der Regularisierung

Aus mathematischer Sicht sind die in die Feynman-Regeln eingehenden kausalen Green-Funktionen Distributionen, deren Singularitäten auf dem Lichtkegel liegen. Das wurde ausführlich in Abschnitt 18.3. dargelegt. Die im vorangegangenen Ab-

schnitt betrachteten Integrale über virtuelle Impulse stellen die fouriertransformierten Produkte kausaler Δ^c-Funktionen dar, deren Argumente den Elementen der Loops entsprechen.

Wie soeben dargelegt wurde, entspricht das einfachste derartige Integral

$$I(k) \sim \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}p}{(m^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon)\,[m^2 - (p - k)^2 - \mathrm{i}\varepsilon]} \tag{23.1}$$

einem 1-Loop-Diagramm mit zwei skalaren inneren Linien (Abb. 22.1), und es läßt sich als Fourier-Transformierte des Produktes zweier Propagatoren gleichen Arguments darstellen:

$$I(k) = 16\pi^2 \mathrm{i} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,[D^c(x)]^2\,\mathrm{d}x\,. \tag{23.2}$$

Solche Produkte enthalten, wie man Gl. (18.22) entnimmt, Quadrate singulärer Distributionen der Form $\delta(\lambda)$, λ^{-1} (mit $\lambda = x^2$); sie sind daher keine wohldefinierten Größen. Mit anderen Worten, die Produkte von Propagatoren und ihre Fourier-Transformierten benötigen vom mathematischen Standpunkt aus zusätzliche Definitionen.

Es sei hervorgehoben: Die Notwendigkeit spezieller Definitionen ist für Produkte von Distributionen typisch und folgt aus ihrem mathematischen Charakter. Der Grund hierfür besteht darin, daß jede Distribution mittels eines Funktionals, d. h. eines Integrals über das Produkt der Distribution mit einer hinreichend regulären Testfunktion, definiert ist; tritt jedoch an die Stelle der Testfunktion eine singuläre Distribution, so ist das entsprechende Integral nicht definiert.

Um zu einer korrekten Definition zu kommen, kann man uneigentliche Grenzübergänge benutzen. Dazu stellt man die entsprechenden Produkte $\prod\limits_{r \neq s} \{\Delta^c(x_r - x_s)\}$ und ihre Fourier-Transformierten (22.1) durch eine Folge regulärer Ausdrücke dar. Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste besteht darin, die singulären Distributionen durch solche regularisierten Ausdrücke zu ersetzen, die auf dem Lichtkegel, zusammen mit einer hinreichend großen Anzahl ihrer Ableitungen, stetig sind

$$\Delta^c(x) \to \operatorname{reg} \Delta^c(x)\,.$$

Dadurch werden auch die Produkte $\prod \{\operatorname{reg} \Delta^c(x_r - x_s)\}$ der regularisierten Propagatoren regulär. Eine häufig verwendete Art dieser Regularisierung ist die Pauli-Villars-Regularisierung.

Die zweite Möglichkeit der Regularisierung läßt die Propagatoren selbst ungeändert. Statt dessen werden nur deren Produkte oder erst die entsprechenden Integrale über die virtuellen Impulse durch geeignete approximative Ausdrücke ersetzt. Varianten dieser Regularisierung sind die Einführung eines Abschneideimpulses ("cut off") und die Dimensionsregularisierung.

23.2. Die Pauli-Villars-Regularisierung

Die Pauli-Villars-Regularisierung besteht in der Substitution der singulären Green-Funktionen freier Felder mit der Masse m durch die folgende Linearkombination:

$$\Delta(x, m) \to \operatorname{reg}_M \Delta(x, m) = \Delta(x, m) + \sum_i c_i \Delta(x, M_i)\,. \tag{23.3}$$

Mit $\Delta(x, m)$ ist hierbei die Green-Funktion des Feldes der Masse m bezeichnet. Im weiteren wird Δ stets die kausale Green-Funktion bezeichnen, obwohl die Pauli-Villars-Regularisierung ohne jede Änderung auch auf die Funktionen Δ_c, Δ^{ret}, Δ^{adv} und Δ^+, Δ^- übertragbar ist. Auf der rechten Seite von Formel (23.3) sind $\Delta(x, M_i)$ Hilfsgrößen, die Green-Funktionen fiktiver Felder mit den Massen M_i darstellen. Die Koeffizienten c_i sind derart zu wählen, daß die Funktionen $\text{reg}\,\Delta(x, m)$ im x-Raum in der Nähe des Lichtkegels hinreichend regulär sind. Äquivalent hierzu ist die Forderung, daß die Funktionen $\text{reg}\,\tilde{\Delta}(p, m)$ im Impulsraum für große $|p^2|$ hinreichend schnell abfallen.

Für Felder mit ganzzahligem Spin kann man auf Grund der letzten Formeln des Abschnitts 18.3. schließen, daß die stärksten Singularitäten auf dem Lichtkegel, $\delta(\lambda)$ und λ^{-1}, in $D(x, m)$ mit Koeffizienten eingehen, die nicht von der Masse m abhängen. Deshalb führt die Bedingung

$$1 + \sum_i c_i = 0 \tag{23.4a}$$

zu einem Ausdruck für $\text{reg}\,\Delta(x, m)$, in dem keine Terme mit $\delta(\lambda)$ und λ^{-1} enthalten sind. Die zugehörige Fourier-Transformierte $\text{reg}\,\tilde{\Delta}(p, m)$ verhält sich für große $|p^2|$ wie $|p^2|^{-2}$. Analog garantiert die Bedingung

$$m^2 + \sum_i c_i M_i^2 = 0 \tag{23.4b}$$

die Abwesenheit von Termen mit $\Theta(\lambda)$ und $\ln \lambda$ in $\text{reg}\,\Delta(x, m)$; dementsprechend fällt $\text{reg}\,\tilde{\Delta}(p, m)$ wie $|p^2|^{-6}$.

Die Pauli-Villars-Regularisierung wird durch den Grenzübergang $M_i \to \infty$ wieder aufgehoben.

Im einfachsten Fall besteht die Pauli-Villars-Regularisierung in der Einführung einer einzigen Hilfsmasse M mit einem der Gleichung (23.4a) entsprechenden Koeffizienten $c = -1$. In der Impulsdarstellung gilt dann

$$D^c(p) = \frac{1}{m^2 - p^2} \to \text{reg}_M\, D^c(p) = \frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{M^2 - p^2}. \tag{23.5}$$

Führen wir die Regularisierung (23.5) im Integranden der rechten Seite von Formel (23.1) aus, so entsteht

$$I(k) \to \text{reg}_M\, I(k) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \mathrm{d}p \left[\frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{M^2 - p^2}\right] \times \left[\frac{1}{m^2 - (p-k)^2} - \frac{1}{M^2 - (p-k)^2}\right].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein endlicher Ausdruck und kann mit den in Vorlesung 22. entwickelten Methoden berechnet werden. Auf diese Weise erhalten wir

$$\text{reg}_M\, I(k) = \mathrm{i}^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta}{(\alpha+\beta)^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^2 \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha m^2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha M^2}\right] \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta m^2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta M^2}\right]$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \ln\left[\frac{m^2 - x(1-x)\,k^2}{xM^2 + (1-x)\,m^2 - x(1-x)\,k^2} \times \frac{M^2 - x(1-x)\,k^2}{(1-x)\,M^2 + xm^2 - x(1-x)\,k^2}\right].$$

Hierbei wurde die Formel

$$\int_0^\infty \frac{da}{a} (e^{iAa} - e^{iBa})\, e^{-\varepsilon a} = \ln \frac{B + i\varepsilon}{A + i\varepsilon}$$

benutzt (siehe Anhang VI.).

Nun muß die Regularisierung wieder aufgehoben werden. Für große M^2 haben wir

$$\operatorname{reg}_M I(k) \approx -\ln \frac{M^2}{\mu^2} + \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)\, k^2 - i\varepsilon}{\mu^2}\right] + O\left(\frac{1}{M^2}\right), \tag{23.6}$$

wobei μ^2 ein beliebiger positiver Parameter ist.

Offensichtlich ist es nicht möglich, die Regularisierung vollständig aufzuheben. Es gelingt lediglich, die UV-Divergenz von $I(k)$ explizit darzustellen:

$$\operatorname{reg}_M I(k) = -\ln \frac{M^2}{\mu^2} + I_{\text{endl}(M)}(k^2, \mu^2)\,, \tag{23.7}$$

wobei der endliche Ausdruck I_{endl} ebenfalls explizit berechnet werden kann (s. u. Abschnitt 24.1.).

Ohne weitere Begründung sei noch das Ergebnis der Berechnung des quadratisch divergenten Integrals

$$J_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\mu p_\nu\, dp}{[m^2 - (p - k/2)^2]\,[m^2 - (p + k/2)^2]} \tag{23.8}$$

mittels Pauli-Villars-Regularisierung angegeben, das vom Photonselbstenergiediagramm herrührt (s. u. Abschnitt 24.2.). Für große M^2 erhalten wir

$$\operatorname{reg}_M J_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} M^2 + \left[g_{\mu\nu}\left(\frac{k^2}{12} - \frac{m^2}{2}\right) + \frac{k_\mu k_\nu}{12}\right] \ln \frac{M^2}{\mu^2} + J_{\mu\nu}^{\text{endl}(M)}(k) \tag{23.9}$$

mit dem endlichen Anteil

$$J_{\mu\nu}^{\text{endl}(M)}(k) = \frac{3}{4} g_{\mu\nu} m^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 dx\, [2 g_{\mu\nu} Z(x, k^2) - k_\mu k_\nu (1 - 2x)^2] \ln \frac{Z(x, k^2)}{\mu^2},$$

$$Z(x, k^2) = m^2 - x(1 - x)\, k^2 - i\varepsilon\,,$$

der wiederum explizit berechnet werden kann.

Eine Reihe anderer Formeln für häufig auftretende divergente Integrale ist in Anhang VI. angegeben.

23.3. Die Dimensionsregularisierung

Diese Regularisierung besteht darin, das vierdimensionale Impulsraumintegral durch ein Symbol zu ersetzen, das formal einem Integral über eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 4 - 2\varepsilon$ entspricht. Dabei ist ε eine kleine positive Größe, und die Anzahl n der Integrationen im regularisierten Ausdruck ist somit nicht mehr ganzzahlig. Wir bezeichnen hier, wie es allgemein üblich ist, den nicht ganzzahligen

Teil der Dimension mit demselben Symbol ε, das bereits zur Definition der kausalen Green-Funktion verwendet wurde. Wir weichen damit von unserer bisherigen Vereinbarung ab und setzen stillschweigend voraus, daß $m^2 = m^2 - \mathrm{i}\delta$ $(\delta \to +0)$ ist.

Im euklidischen Raum erfolgt die Einführung der *Dimensionsregularisierung* folgendermaßen:

$$\int (\mathrm{d}^4p)_E = \int\limits_{\Omega(4)} \mathrm{d}\Omega \int\limits_0^\infty p^3\,\mathrm{d}p \to \int \mathrm{d}^np \equiv \mu^{2\varepsilon} \int\limits_{\Omega(n)} \mathrm{d}\Omega \int\limits_0^\infty p^{n-1}\,\mathrm{d}p\,, \qquad (23.10)$$

wobei $\Omega(n)$ das Volumen der Einheitskugel im n-dimensionalen Raum ist und für nicht ganzzahlige n durch die Eulersche Gammafunktion dargestellt wird:

$$\Omega(n) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)\,.$$

Der einer Masse entsprechende Parameter μ wurde aus Dimensionsgründen eingeführt.

Es ist auch möglich, die Regularisierung direkt in den Formeln des vorangegangenen Abschnitts durchzuführen. Das Gaußsche Grundintegral hat dann die Gestalt

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \mathrm{d}^np\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ap+2bp)} = \left(\frac{\mathrm{i}a\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b^2/a}\,. \qquad (23.11)$$

Das Grundintegral in der Feynmanschen Parametrisierung kann nun mit den Formeln (23.11) und (22.8) direkt berechnet werden; es ist

$$\operatorname{reg}_\varepsilon \tilde{J}_l(D) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}^np}{(p^2-D)^l} = \left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{(-1)^{l+1}\,\Gamma(l+\varepsilon-2)}{D^{l+\varepsilon-2}\,\Gamma(l)}\,. \qquad (23.12)$$

Bestimmen wir nun das Integral (23.1) in der Dimensionsregularisierung mittels Übergang in die α-Darstellung:

$$\begin{aligned} I(k) \to \operatorname{reg}_\varepsilon I(k) &= \frac{\mathrm{i}\mu^{2\varepsilon}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}^np}{(m^2-p^2)\,[m^2-(p-k)^2]} \\ &= \frac{\mathrm{i}^3\mu^{2\varepsilon}}{\pi^2} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta k^2 - \mathrm{i}(\alpha+\beta)m^2} \int \mathrm{d}^np\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)p^2+2\mathrm{i}\beta pk} \\ &= -\left(\frac{\mathrm{i}\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta}{(\alpha+\beta)^{2-\varepsilon}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}k^2 - \mathrm{i}(\alpha+\beta)m^2} \\ &= -\left(\frac{\mathrm{i}\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}a}{a^{1-\varepsilon}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}aZ(x,k^2)}\,. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des hierbei auftretenden Integrals verwenden wir Formel (22.8) und erhalten

$$\operatorname{reg}_\varepsilon I(k) = -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{[m^2 - x(1-x)\,k^2]^\varepsilon}\,. \qquad (23.13)$$

Schließlich muß die Regularisierung wieder aufgehoben werden, d. h., ε muß gegen Null streben. Unter Beachtung der asymptotischen Entwicklung

$$\Gamma(\varepsilon) \to \frac{1}{\varepsilon} - C + O(\varepsilon)\,, \qquad C = 0{,}5772\,, \qquad \varepsilon \to +0\,,$$

erhalten wir

$$\operatorname{reg}_\varepsilon I(k) \to -\frac{1}{\varepsilon} + I^{\mathrm{endl}(\varepsilon)}(k)\,, \tag{23.14}$$

wobei

$$I^{\mathrm{endl}(0)}(k) = \int_0^1 \mathrm{d}x \ln\left[\frac{m^2 - x(1-x)\,k^2}{\mu^2}\right] + \ln\pi + C$$

ist. Es zeigt sich, daß bei Anwendung der Dimensionsregularisierung der singuläre Teil des im ultravioletten Bereich logarithmisch divergenten Integrals sich hier als Pol ε^{-1} bemerkbar macht.

Ferner sei noch ohne Rechnung das Ergebnis für das quadratisch divergente Integral (23.8) angegeben:

$$\operatorname{reg}_\varepsilon J_{\mu\nu}(k) = \left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon)}{4} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(Z)^\varepsilon}\left[2g_{\mu\nu}\frac{Z}{1-\varepsilon} - k_\mu k_\nu(1-2x)^2\right],$$

wobei

$$Z = Z(x, k^2) = m^2 - x(1-x)\,k^2$$

ist. Für kleine ε folgt daraus

$$\operatorname{reg}_\varepsilon J_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[g_{\mu\nu}m^2 - \frac{g_{\mu\nu}m^2 + k_\mu k_\nu}{6}\right] + J_{\mu\nu}^{\mathrm{endl}(\varepsilon)}(k) \tag{23.15}$$

mit

$$J_{\mu\nu}^{\mathrm{endl}(0)}(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{2}\left(m^2 - \frac{k^2}{6}\right) + \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d}x\,[2g_{\mu\nu}Z - k_\mu k_\nu(1-2x)^2]\ln Z\,. \tag{23.16}$$

Der Vergleich der Formeln (23.6) und (23.14) zeigt, daß die logarithmischen UV-Divergenzen bei Anwendung der Dimensionsregularisierung als Pol ε^{-1} in Erscheinung treten. Der Vergleich der Formeln (23.9) und (23.15) bestätigt dies und zeigt darüber hinaus, daß die quadratischen UV-Divergenzen ebenfalls zu einem Pol ε^{-1} führen.

23.4. Einführung eines Abschneideimpulses

Diese Methode der Regularisierung ist die intuitiv einfachste. Sie besteht im „Abschneiden“ (“cut off”) der oberen Integrationsgrenze der Impulsintegrale. Für ein vierdimensionales euklidisches Impulsintegral kann sie folgendermaßen formuliert werden:

$$\int \mathrm{d}p = \mathrm{i} \int (\mathrm{d}^4p)_E = \mathrm{i} \int \mathrm{d}p_4 \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

$$\to \operatorname{reg}_\Lambda \int \mathrm{d}p = \int_{\Omega\Lambda} \mathrm{d}p = \mathrm{i} \int_{\Omega(4)} \mathrm{d}\Omega \int_0^\Lambda p^3\,\mathrm{d}p\,.$$

Es läßt sich einfach zeigen, daß die mittels *Abschneideimpuls* berechneten, regularisierten Impulsintegrale in der Feynman-Parametrisierung folgende Form annehmen:

$$\mathrm{reg}_\Lambda \tilde{J}_2(p, x) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int\limits_{\Omega\Lambda} \frac{\mathrm{d}p}{(q^2 - D + \mathrm{i}\varepsilon)^2} = \ln \frac{D - \mathrm{i}\varepsilon}{\Lambda^2} + 1 \,, \tag{23.17}$$

$$\mathrm{reg}_\Lambda J_{\mu\nu}(p, x) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int\limits_{\Omega\Lambda} \frac{q_\mu q_\nu \, \mathrm{d}q}{(q^2 - D + \mathrm{i}\varepsilon)^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left(\Lambda^2 - 2D \ln \frac{\Lambda^2}{D} - D \right). \tag{23.18}$$

Bei Verwendung der α-Darstellung ist es bequemer, eine *gleitende Abschneidung* einzuführen (Feynman-Regularisierung):

$$\int \mathrm{d}p \to \mathrm{reg}_{\Lambda(F)} \int \mathrm{d}p = \int \mathrm{d}p \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - p^2}. \tag{23.19}$$

Sie ist für logarithmisch divergente Integrale ausreichend. In den einfachsten Fällen läßt sie sich auf eine Variante der Pauli-Villars-Regularisierung zurückführen. Dies gestattet es, nach einer Modifizierung des Ausgangsintegrals die Formeln des letzten Abschnitts ohne Änderung zu übernehmen. So gilt z.B. für das Integral (23.1):

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}_{\Lambda(F)} I(k) &= \frac{\mathrm{i}\Lambda^2}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}p}{(m^2 - p^2)(\Lambda^2 - p^2)[m^2 - (p - k)^2]} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}p}{m^2 - (p - k)^2} \left(\frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{\Lambda^2 - p^2} \right) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} \\ &= \mathrm{i}^2 \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta}{(\alpha + \beta)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}k^2 - \mathrm{i}\alpha m^2} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta m^2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\Lambda^2}) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} \\ &= \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \ln \left[\frac{m^2 - x(1 - x)\, k^2}{xm^2 + (1 - x)\Lambda^2 - x(1 - x)\, k^2} \right] \\ &\to - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + 1 + \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \ln \left[\frac{m^2 - x(1 - x)\, k^2}{\mu^2} \right]. \end{aligned} \tag{23.20}$$

24. 1-Loop-Diagramme

Nunmehr wollen wir einige der einfachsten Feynman-Integrale, die 1-Loop-Diagrammen entsprechen, explizit untersuchen. Dazu muß eine 4-dimensionale Impulsraum-Integration ausgeführt werden.

24.1. Das skalare „Fisch"-Diagramm

Das einfachste Diagramm zweiter Ordnung mit zwei inneren Linien (Abb. 22.1) ist unter der Bezeichnung „Fisch" bekannt. Falls beide inneren Linien einem skalaren Feld der Masse m entsprechen, ist das Matrixelement I durch das Integral (23.1) gegeben:

$$I(k) \sim \frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}p}{(m^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon)\,[m^2 - (p-k)^2 - \mathrm{i}\varepsilon]}\,.$$

Es ist für große Werte von p logarithmisch divergent. In der vorletzten Vorlesung wurde es in verschiedenen Regularisierungen vorgestellt. Ein Vergleich der Formeln (23.6), (23.7), (23.14) und (23.20) zeigt, daß der divergente Ausdruck (23.1) nach Abtrennung des additiven, von k unabhängigen singulären Beitrags in das endliche Integral

$$I_{\text{endl}}(k) = \int_0^1 \mathrm{d}x \ln\left[\frac{m^2 - x(1-x)\,k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}{\mu^2}\right] \tag{24.1}$$

übergeht, d. h., es gilt

$$I(k) = I_{\text{sing}} + I_{\text{endl}}(k)\,. \tag{24.2}$$

Die divergente Konstante I_{sing} ist in der Pauli-Villars-Regularisierung durch $\ln(\mu^2/M^2)$, in der Dimensionsregularisierung durch $\ln\pi + C - 1/\varepsilon$ und bei Einführung eines Abschneideimpulses durch $1 + \ln\mu^2/\Lambda^2$ gegeben.

Der endliche Teil I_{endl} hängt allerdings von dem frei wählbaren Parameter μ^2 ab und ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Die von uns mit (24.1) vorgenommene Festlegung dieser Konstante ist völlig willkürlich. Es ist vorteilhaft, die rechte Seite von (24.1) in der Form

$$J\left(\frac{k^2}{4m^2}\right) + \left(\ln\frac{m^2}{\mu^2} - 2\right)$$

darzustellen, wobei das Integral $J\left(\frac{k^2}{4m^2}\right)$ durch

$$J(z) = \int_0^1 \mathrm{d}x \ln[1 - 4x(1-x)\,z] + 2 = \int_0^1 \mathrm{d}x \ln\frac{1 - 4x(1-x)\,z}{1 - 4x(1-x)}$$

oder auch durch

$$J(z) = (1-z)\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma-1)}\,(\sigma - z + \mathrm{i}\varepsilon)} \tag{24.3}$$

dargestellt werden kann.

Der Ausdruck (24.3) hat die Form eines Cauchy-Integrals. Wir wollen derartige Formeln *Spektraldarstellungen* nennen. Die Spektraldarstellung (24.3) definiert eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, die auf der reellen Achse einen Schnitt $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z \geqq 1$ hat; auf dem verbleibenden Teil der reellen Achse ist

sie reell:

$$J(x) = 2\left(\frac{1-x}{x}\right)^{1/2} \arctan\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1 ,$$

$$\left.\begin{aligned} &= 2\left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{1/2} \\ &= 2\left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2} \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{-x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad x \leqq 0 . \tag{24.4}$$

Für $x > 1$ enthält der Integrand einen Pol, der im Sinne des unendlich kleinen Zusatzterms $+\mathrm{i}\varepsilon$ zu umgehen ist. Unter Verwendung der symbolischen Formel (A V.6) erhalten wir

$$J(x) = -\mathrm{i}\pi\left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2} + 2\left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2} \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right) \qquad \text{für } x \geqq 1 . \tag{24.5}$$

Somit gilt im ultravioletten Bereich, d. h. für $|p^2| \gg m^2$,

$$\begin{aligned} I_{\text{endl}}(p^2, \mu^2) &= -\ln\left(|p^2|/\mu^2\right) - \mathrm{i}\pi\Theta(p^2) + \text{const} \\ &= -\ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right) + \text{const} . \end{aligned} \tag{24.6}$$

24.2. Die Selbstenergie des Photons und des Elektrons

In der Elektrodynamik können sich Diagramme, die den soeben betrachteten topologisch äquivalent sind, durch die Arten ihrer inneren und äußeren Linien unterscheiden (vgl. Abb. 24.1a, b)). Korrespondieren die äußeren Linien Photonen



Abb. 24.1
1-Loop-Diagramme der Elektrodynamik zweiter Ordnung a) Photonselbstenergie b) Elektronselbstenergie

und die inneren Linien Elektronen, so liegt ein Photonselbstenergie-Diagramm vor. Das entsprechende Integral

$$I^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi^2} \int \mathrm{d}q \, \mathrm{Sp}\left(\frac{1}{m+\hat{q}} \gamma^\mu \frac{1}{m+\hat{q}+\hat{k}} \gamma^\nu\right) \tag{24.7}$$

bezeichnet man nach Multiplikation mit $e^2/16\pi^2 = \alpha/4\pi$ als *Polarisationsoperator*

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{\alpha}{4\pi} I^{\mu\nu}(k) . \tag{24.8}$$

Das Feynman-Integral (24.7) divergiert für große q quadratisch. Zur Regularisierung verwenden wir eine Variante der Pauli-Villars-Regularisierung

$$S^c(q) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{1}{m+\hat{q}} \to \operatorname{reg} S^c(q) = \frac{m-\hat{q}}{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{m^2-q^2} - \frac{1}{M^2+m^2-q^2}\right).$$

Der regularisierte Ausdruck

$$I_M^{\nu\mu}(k) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}q \, \mathrm{Sp}(\ldots)}{(m^2 - q^2)(M^2 + m^2 - q^2)[m^2 - (k+q)^2][M^2 + m^2 - (k+q)^2]} \tag{24.9}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(\ldots) &= \mathrm{Sp}[(m - \hat{q})\,\gamma^\nu (m - \hat{q} - \hat{k})\,\gamma^\mu] \\ &= 4g^{\nu\mu}m^2 + 8q^\nu q^\mu + 4(q^\nu k^\mu + k^\nu q^\mu) - 4g^{\nu\mu}(q^2 + qk) \end{aligned}$$

läßt sich mittels der Standard-Techniken der Abschnitt 22. in das Integral

$$\begin{aligned} I_M^{\nu\mu}(k) &= 4\mathrm{i} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \exp \mathrm{i}\lambda[x(1-x)\,k^2 - m^2 - \mathrm{i}\varepsilon] \\ &\quad \times (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\lambda M^2})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1-x)\lambda M^2}) \\ &\quad \times \left[\mathrm{i}x(1-x)\,(2k^\nu k^\mu - g^{\nu\mu}k^2) + g^{\nu\mu}\left(\frac{1}{\lambda} + \mathrm{i}m^2\right)\right] \end{aligned}$$

umformen. Um die Integration über λ ausführen zu können, werden solche Terme, die λ und λ^2 im Nenner enthalten, mit Hilfe der Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \mathrm{e}^{-\varepsilon\lambda} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\lambda} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}A\lambda}) = \ln \frac{A + \mathrm{i}\varepsilon}{a + \mathrm{i}\varepsilon},$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2} \mathrm{e}^{-\varepsilon\lambda} f(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \mathrm{e}^{-\varepsilon\lambda} f'(\lambda)$$

umgeschrieben. Das endgültige Ergebnis hat im Limes $M^2 \to \infty$ die Gestalt

$$\Pi_M^{\nu\mu}(k) = \frac{\alpha}{2\pi} M^2 g^{\nu\mu} + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} (g^{\nu\mu}k^2 - k^\nu k^\mu) + \Pi_{\mathrm{endl}}^{\nu\mu}(k) \tag{24.10}$$

mit

$$\Pi_{\mathrm{endl}}^{\nu\mu}(k) = \frac{\alpha}{\pi} (k^2 g^{\nu\mu} - k^\nu k^\mu)\, I\left(\frac{k^2}{4m^2}\right) \tag{24.11}$$

und

$$I(z) = 2 \int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x)\,x \ln[1 - 4x(1-x)\,z]\,.$$

Das letzte Integral kann vermöge der in Gl. (24.3) eingeführten Funktion $J(z)$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$I(z) = \frac{1}{4} \int_0^z [J'(t) - J'(0)] \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{24.12}$$

Die Spektraldarstellung für I ergibt sich dann zu

$$I(z) = -\frac{z}{6}\int_1^\infty \frac{1+2\sigma}{\sigma^2}\sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma - z}\,. \tag{24.13}$$

Dem Selbstenergie-Diagramm des Elektrons (Abb. 24.1 b)) entspricht der linear divergente Ausdruck

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha \mathrm{i}}{4\pi^3}\int \frac{\mathrm{d}q}{q^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\nu \frac{1}{m - \hat{q} - \hat{p}}\gamma_\nu\,, \tag{24.14}$$

der nach der Regularisierung des Photonpropagators

$$\frac{1}{q^2} \to \frac{1}{q^2} + \frac{1}{M^2 - q^2} = \frac{M^2}{q^2(M^2 - q^2)} \tag{24.15}$$

die Form

$$\Sigma_M(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x\,(2m - x\hat{p})\ln\frac{p^2x(1-x) - (1-x)\,m^2 - xM^2}{xp^2(1-x) - (1-x)\,m^2}$$

annimmt.

Im Limes $M^2 \to \infty$ erhalten wir

$$\Sigma_M(p) \approx \frac{\alpha}{4\pi}(4m - \hat{p})\ln\frac{M^2}{m^2} + \Sigma_{\mathrm{endl}}(p) \tag{24.16}$$

mit

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathrm{endl}}(p) &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x(2m - x\hat{p})\left(\ln\frac{m^2}{m^2 - xp^2} + \ln\frac{x}{1-x}\right)\\ &= \frac{\alpha}{\pi}\left\{\left[\hat{p}\left(\frac{p^2+m^2}{4p^2}\right) - m\right]\left(\frac{p^2 - m^2}{p^2}\right)\ln\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right)\right.\\ &\quad\left. + m - \hat{p}\left(\frac{3}{8} + \frac{m^2}{4p^2}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{24.17}$$

24.3. Vertex-Diagramme

Wir betrachten nun 1-Loop-Diagramme mit drei inneren und drei äußeren Linien. Im einfachsten Falle, wenn alle diese Linien skalaren Teilchen korrespondieren

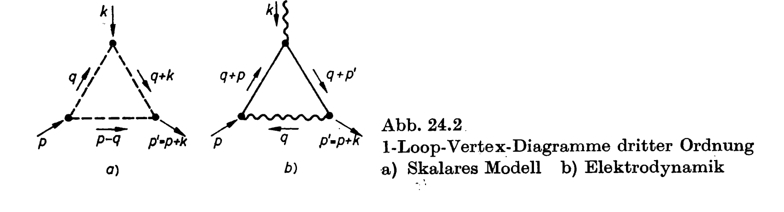


Abb. 24.2
1-Loop-Vertex-Diagramme dritter Ordnung
a) Skalares Modell b) Elektrodynamik

(Abb. 24.2a)), ist das entsprechende Feynman-Integral

$$\Gamma(p, k) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}q}{m^2 - q^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (q+k)^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (q-p)^2} \tag{24.18}$$

konvergent. Nach Ausführung der Integration über q hat es die Form

$$\Gamma(p^2, k^2, p'^2) = \int_0^1 \frac{\{\mathrm{d}x\}_3}{m^2 - x_1 x_2 k^2 - x_1 x_3 p^2 - x_2 x_3 p'^2}, \qquad p' = p + k\,. \tag{24.19}$$

Dabei wurden die im Anschluß an (22.7) und im Anhang (A VI.3) eingeführten Abkürzungen benutzt.

Betrachten wir nunmehr das physikalisch wichtige Vertex-Diagramm der Elektrodynamik (Abb. 24.2b)). Das zugehörige Integral

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}q}{-q^2} \gamma^\mu \frac{1}{m - \hat{q} - \hat{p}} \gamma^\nu \frac{1}{m - \hat{q} - \hat{p}'} \gamma_\mu \tag{24.20}$$

divergiert für große q logarithmisch. Regularisiert man den Photonpropagator gemäß Formel (24.15), so erhält man

$$\Gamma_M^\nu(p, p') = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{M^2 \mathrm{i}}{\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}q}{q^2(q^2 - M^2)} \cdot \frac{\gamma^\mu(m + \hat{q} + \hat{p})\,\gamma^\nu(m + \hat{q} + \hat{p}')\,\gamma_\mu}{[m^2 - (q+p)^2]\,[m^2 - (q+p')^2]}, \tag{24.21}$$

und nach entsprechenden Umformungen gilt für $M \to \infty$

$$\mathrm{reg}_M\, \Gamma^\nu(p', p, k) = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\nu \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \Gamma^\nu_{\text{endl}} \tag{24.22}$$

mit

$$\Gamma^\nu_{\text{endl}} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 \{\mathrm{d}x\}_3 \left(\gamma^\nu \ln \frac{\mu^2}{Z} + \frac{N^\nu}{Z} \right) \tag{24.23}$$

und

$$\begin{aligned} Z &= m^2(1 - x_1) - x_1 x_2 p'^2 - x_1 x_3 p^2 - x_2 x_3 k^2\,, \\ N^\nu &= \gamma^\nu \{m^2 + (1 - x_3)(1 - x_2) k^2 - x_1(1 - x_2) p'^2 - x_1(1 - x_3) p^2\} \\ &\quad + k^\nu \{(1 - x_2)(1 - x_3)(\hat{p} - \hat{p}') + 2m(x_2 - x_3)\} \\ &\quad + (p^\nu + p'^\nu)\{(1 - x_2)(1 - x_3)(\hat{p} + \hat{p}') - 2m x_1\} \\ &\quad - x_1 \hat{p}' \gamma^\nu \hat{p} - 2x_2(1 - x_2) p'^\nu \hat{p}' - 2x_3(1 - x_3) p^\nu \hat{p}\,. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (24.23) lassen sich einige Vereinfachungen durchführen und zwei der Integrationen explizit ausführen. Die entsprechenden Rechnungen sind jedoch umfangreich und werden hier nicht ausgeführt. Für den wichtigen Spezialfall, wenn sich das Elektron sowohl vor als auch nach der Wechselwirkung auf der Massenschale befindet, kann die entsprechende Projektion der Vertex-Funktion in der Form

$$\begin{aligned} \bar{u}(\boldsymbol{p}')\, \Gamma^\nu_{\text{endl}}\, u(\boldsymbol{p}) &= \frac{\alpha}{4\pi} f_1(k^2)\, \bar{u}(\boldsymbol{p}')\, \gamma^\nu u(\boldsymbol{p}) \\ &\quad + \frac{\alpha}{4\pi} f_2(k^2)\, \bar{u}(\boldsymbol{p}') \left\{ \frac{p^\nu + p'^\nu}{2m} - \gamma^\nu \right\} u(\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{24.24}$$

dargestellt werden. Sie ist damit eine Summe zweier Formfaktoren

$$f_1(k^2) = 2\int_0^1 \{\mathrm{d}x\}_3 \ln\frac{\mu^2}{Z_0} + \int_0^1 \{\mathrm{d}x\}_3 \frac{N_1}{Z_0} \tag{24.25}$$

und

$$f_2(k^2) = \int_0^1 \{\mathrm{d}x\}_3 \frac{N_2}{Z_0} \tag{24.26}$$

mit

$$Z_0 = m^2(1 - x_1)^2 - x_2x_3k^2 ,$$
$$N_1 = 2m^2(1 - 4x_1 + x_1^2) - 2k^2(1 - x_2)(1 - x_3) ,$$
$$N_2 = 4m^2x_1(x_1 - 1) .$$

Die Integrale in den Gleichungen (24.25) und (24.26) lassen sich durch elementare Funktionen ausdrücken. Mit der Substitution $x_2 = t(1 - x_1)$ erhalten wir für f_2

$$f_2(k^2) = 2\int_0^1 \frac{m^2\,\mathrm{d}t}{t(1-t)\,k^2 - m^2 + i\varepsilon} = -8\frac{m^2}{k^2Q}\arctan\frac{1}{Q};$$
$$Q = \left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{1/2} \quad \text{für} \quad k^2 \leqq 4m^2 , \tag{24.27}$$

und insbesondere

$$f_2(0) = -2 . \tag{24.28}$$

Gleichzeitig weist die Substitution $x_2 = t(1 - x_1)$ im zweiten Term des Formfaktors f_1 auf eine nichtintegrierbare Singularität des Integranden bei $x_1 = 1$ hin. Sie ist Ausdruck der sogenannten *Infrarotkatastrophe* und resultiert aus einer Singularität des Integranden im Feynman-Integral (24.20) bei kleinen Werten von q, d. h. aus der Integration über die Impulse der *weichen* virtuellen Photonen. Eine ähnliche Singularität enthält auch die Ableitung des Selbstenergieoperators des Elektrons auf der Massenschale. Wir wollen das Problem der Infrarotdivergenzen der Quantenelektrodynamik hier jedoch nicht diskutieren und verweisen den Leser auf die kurze Darlegung in Abschnitt 29.4. und auf die dort zitierte Literatur. Es sei lediglich folgendes bemerkt: Gibt man dem virtuellen Photon im Diagramm (Abb. 24.2b)) eine kleine Masse λ_0, so kann die erwähnte Singularität durch den Logarithmus dieser Masse ausgedrückt werden

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x_1}{1 - x_1} \to \ln\frac{\lambda_0}{m} \tag{24.29}$$

(siehe diesbezüglich Abschnitt 5. im Anhang VI.). Gleichzeitig kann der Formfaktor $f_1(k^2)$ um eine Konstante „verschoben“ werden

$$f_1(k^2) \to f_1(k^2) + c ,$$

was als Folge der Renormierung der Kopplungskonstanten, d. h. der elektrischen Ladung e des Elektrons (siehe Vorlesung 25. und Abschnitt 28.1.) verstanden werden kann. Deshalb haben die impulsunabhängigen additiven Terme in (24.25) keinen direkten physikalischen Sinn.

Der zweite Term in Formel (24.24) kann übrigens mit Hilfe der aus der Dirac-Gleichung folgenden Beziehung

$$2\bar{u}(\boldsymbol{p}')\,[p^\nu + p'^\nu - 2m\gamma^\nu]\,u(\boldsymbol{p}) = \bar{u}(\boldsymbol{p}')\,[\gamma^\nu\hat{k} - \hat{k}\gamma^\nu]\,u(\boldsymbol{p})\,; \qquad k = p' - p \tag{24.30}$$

in eine Form gebracht werden, die zur Berechnung der Strahlungskorrekturen zum magnetischen Moment des Elektrons besonders geeignet ist (siehe Abschnitt 30.2.).

24.4. UV-Divergenzen in den höheren Ordnungen der Störungstheorie

Die betrachteten Beispiele einfachster 1-Loop-Diagramme gestatten die Schlußfolgerung, daß das Auftreten der UV-Divergenzen eine typische, häufig vorkommende Erscheinung, also die Regel, und nicht die Ausnahme ist. Beim Übergang zu komplizierteren Diagrammen in höherer Ordnung der Störungstheorie mit einer größeren Anzahl von Loops ändert sich hieran dem Wesen nach nichts.

Zur Illustration betrachten wir kurz den Prozeß der *Compton-Streuung.* In niedrigster (d. h. zweiter) Ordnung der Störungstheorie wird dieser Prozeß durch die zwei Feynman-Diagramme der Abb. 24.3 beschrieben. Sie enthalten keine geschlossenen Linienzüge und die entsprechenden Matrixelemente daher keine Integration über innere Impulse.

In vierter Ordnung wird der Prozeß durch acht Diagramme mit jeweils einem Loop beschrieben, von denen nur die charakteristischen in Abb. 24.4 wiedergegeben



Abb. 24.3
Diagramme zweiter Ordnung zur Compton-Streuung

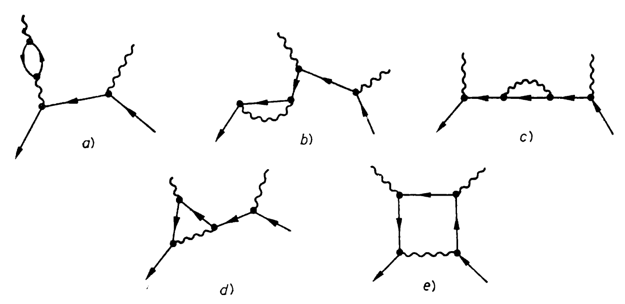


Abb. 24.4
Einige Diagramme vierter Ordnung zur Compton-Streuung

sind. Zwei von ihnen enthalten Selbstenergieeinsetzungen (Subdiagramme) in die äußeren Photonlinien (vgl. Abb. 24.4a)), zwei Diagramme Selbstenergieeinsetzungen in die äußeren Elektron-Positronlinien (Abb. 24.4b)), ein Diagramm eine Selbstenergieeinsetzung in die innere Elektron-Positronlinie (Abb. 24.4c)), und zwei Diagramme enthalten Vertexeinsetzungen (Abb. 24.4d)). Nach den Ergebnissen des Abschnitts 24.3. enthalten alle diese Diagramme UV-Divergenzen. Das letzte Diagramm (Abb. 24.4e)) schließlich enthält einen geschlossenen Linienzug mit vier Vertizes; das zugehörige Impulsintegral ist konvergent.

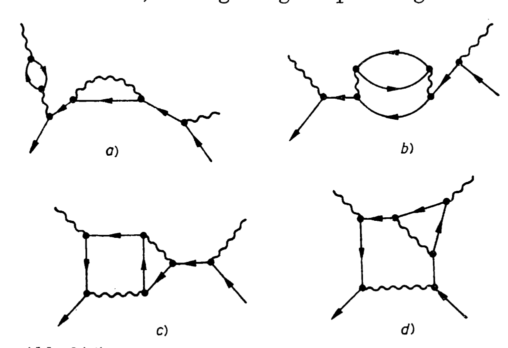


Abb. 24.5
Beispiele für Diagramme sechster Ordnung zur Compton-Streuung

Die sechste Ordnung der Störungstheorie entspricht 2-Loop-Diagrammen, von denen einige in Abb. 24.5 dargestellt sind. Es treten ebenso Diagramme mit 2 unabhängigen 1-Loop-Subdiagrammen auf (z.B. in Abb. 24.5a)) wie Diagramme, in denen ein divergentes 1-Loop-Subdiagramm Bestandteil eines umfassenden Linienzuges ist, der bereits Impulsintegrationen entspricht. Beispiele für solche Fälle sind in den Abbildungen 24.5b), c), d) abgebildet. In der Regel enthalten dann beide Integrationen UV-Divergenzen, die sich somit überlagern, und als *überlappende Divergenzen* bezeichnet werden.

Unsere nächste Aufgabe besteht folglich darin, die allgemeine Struktur der divergenten Beiträge zu den Matrixelementen zu untersuchen und ein konsistentes Verfahren für deren Beseitigung (Renormierungsprozedur) zu konstruieren.

25. Abtrennung der Divergenzen

25.1. Die Struktur der 1-Loop-Divergenzen

Wie wir im letzten Abschnitt sahen, weisen alle 1-Loop-Diagramme eine bemerkenswerte Eigenschaft auf: Die vom ultravioletten Impulsbereich herrührenden Unendlichkeiten können unabhängig von der speziellen Regularisierung als additive Terme abgetrennt werden (vgl. (24.2), (24.10), (24.16) und (24.22)). Dabei sind diese Terme Polynome in den äußeren Impulsen mit Koeffizienten, die bei der Aufhebung der Regularisierung divergieren.

Geht man nun von der Impulsdarstellung zur Ortsdarstellung über, so können diese divergenten Beiträge als Polynome von Ableitungen dargestellt werden, die auf entsprechende δ-Funktionen wirken. So folgt z.B. aus (23.1), (23.2) und (24.2)

$$\operatorname{reg}\,[D^c(x)]^2 = \frac{\pi^2}{\mathrm{i}(2\pi)^8}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\, I_\Lambda(p^2)\,\mathrm{d}p = \frac{1}{16\pi^2\mathrm{i}}\, I_{\mathrm{sing}}\delta(x) + \tilde{D}_c^2(x)\,, \tag{25.1}$$

wobei die singuläre Konstante in der Pauli-Villars-Regularisierung durch $I_{\mathrm{sing}} = \ln(\mu^2/M^2)$ gegeben ist, während die Funktion

$$\tilde{D}_c^2(x) = \frac{\pi^2}{\mathrm{i}(2\pi)^8}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\,\tilde{I}(p^2, \mu^2)\,\mathrm{d}p \tag{25.2}$$

frei von Singularitäten ist.

Analog erhält man

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}\,[\Pi^{\mu\nu}(x)] &= -\mathrm{i}e^2\,\mathrm{Sp}\,[\gamma^\mu \operatorname{reg} S^c(x)\,\gamma^\nu \operatorname{reg} S^c(-x)]\\ &= \frac{\alpha}{2\pi} g^{\mu\nu} M^2\delta(x) + \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}\,(g^{\mu\nu}\Box + \partial^\mu\partial^\nu)\,\delta(x) + \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(x)\,,\end{aligned} \tag{25.3}$$

$$\operatorname{reg}\,[\Sigma(x)] = -\mathrm{i}e^2\,\gamma^\nu S^c(x)\,\gamma_\nu \operatorname{reg} D_0^c(x) = \frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}\,(4m - \mathrm{i}\hat{\partial})\,\delta(x) + \tilde{\Sigma}(x)\,, \tag{25.4}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}\,\Gamma^\nu(x, z; y) &= \mathrm{i}e^2 \operatorname{reg} D_0^c(x - z)\,\gamma^\mu S^c(x - y)\cdot\gamma^\nu S^c(y - z)\,\gamma_\mu\\ &= \frac{\alpha}{4\pi}\gamma^\nu \ln\frac{M^2}{m^2}\,\delta(x - y)\,\delta(x - z) + \tilde{\Gamma}^\nu(x, z; y)\,.\end{aligned} \tag{25.5}$$

Hierbei sind die Funktionen $\tilde{\Pi}$, $\tilde{\Sigma}$ und $\tilde{\Gamma}$ die Fourier-Transformierten der endlichen Ausdrücke (24.11), (24.17) und (24.23).

25.2. Der Beitrag zur S-Matrix

Betrachten wir nun die Struktur der divergenten Terme auf den rechten Seiten der Formeln (25.1), (25.3), (25.4) und (25.5), die zur Streumatrix beitragen.

Wir beginnen mit der Untersuchung des einfachsten Diagramms, des skalaren „Fisches". Im φ^3-Modell mit der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte $\mathscr{L}_I = g\varphi^3$ enthalten die Beiträge zweiter Ordnung zur S-Matrix einen ultraviolett-divergenten

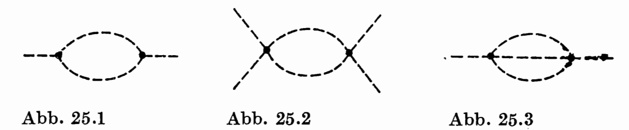


Abb. 25.1 Abb. 25.2 Abb. 25.3

Abb. 25.1
Selbstenergiediagramm zweiter Ordnung im skalaren φ^3-Modell

Abb. 25.2
Streudiagramm zweiter Ordnung im φ^4-Modell

Abb. 25.3
Das „Nuß"-Diagramm, die Selbstenergie zweiter Ordnung im φ^4-Modell darstellend

Term, der von der Selbstenergie eines Teilchens (Abb. 25.1) herrührt:

$$S_2(x, y) = \mathrm{i}^2 g^2 \mathrm{T}\big(\varphi^3(x)\,\varphi^3(y)\big) = 18g^2 :\varphi(x)\,[D^c(x-y)]^2\,\varphi(y): + \dots$$

Nach Einführung der Regularisierung vermöge (25.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= \mathrm{i}g^2 C :\varphi(x)\,\delta(x-y)\,\varphi(y): + 18g^2 :\varphi(x)\,\widetilde{[D^c(x-y)]^2}\,\varphi(y): + \dots \\ &= \mathrm{i}g^2 C :\varphi(x)\,\delta(x-y)\,\varphi(y): + \tilde{S}_2(x, y)\,, \end{aligned} \tag{25.6}$$

wobei $C = (9/8\pi^2)\ln(M^2/\mu^2)$ ist und $\tilde{S}_2$ frei von UV-Divergenzen ist. Bei der Berechnung der Matrixelemente entspricht $\tilde{S}_2$ der endliche Ausdruck (25.2) des Selbstenergie-Diagramms.

Durch Einsetzen von (25.6) in die Entwicklung der S-Matrix erhalten wir

$$\begin{aligned} S &= 1 + \int S_1(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2!}\int S_2(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \cdots \\ &= 1 + \mathrm{i}\int [\mathcal{L}(x) + \Delta\mathcal{L}(x)]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2!}\int \tilde{S}_2(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \cdots \end{aligned} \tag{25.7}$$

mit

$$\Delta\mathcal{L}(x) = \frac{g^2}{2} C :\varphi^2(x):. \tag{25.8}$$

Somit entspricht dem Abtrennen eines quasilokalen divergenten Beitrages $\varphi(x)\,\delta(x-y)\,\varphi(y)$ von S_2 das Hinzufügen eines lokalen Beitrages $\Delta\mathcal{L}(x)$ zu S_1. Derartige Ausdrücke heißen *Konterterme.*

Das skalare „Fisch"-Diagramm trägt auch zu den Termen zweiter Ordnung im φ^4-Modell ($\mathcal{L}_I = h\varphi^4$) bei

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= \mathrm{i}^2 h^2 T\big(\varphi^4(x)\,\varphi^4(y)\big) \\ &= 72h^2 :\varphi^2(x)\,D_c^2(x-y)\,\varphi^2(y): - \mathrm{i}\,96h^2 :\varphi(x)\,D_c^3(x-y)\,\varphi(y): + \cdots, \end{aligned} \tag{25.9}$$

wo es einen Beitrag zur Streuamplitude $2 \leftrightarrow 2$ (Abb. 25.2) liefert. Der zweite Term auf der rechten Seite von (25.9) entspricht dem sogenannten „Nuß-"Diagramm (Abb. 25.3). Das zugehörige Matrixelement divergiert quadratisch. Seine Regularisierung ergibt

$$\operatorname{reg}\,[D^c(x-y)]^3 = -\frac{A_2}{48}\delta(x) - \frac{A_0}{48}\Box_x\,\delta(x) + \tilde{D}_c^3(x); \tag{25.10}$$

wobei sich die divergenten Konstanten A_0 und A_1 in der Pauli-Villars-Regularisierung zu

$$A_0 = a_0 \ln\frac{M^2}{m^2}, \qquad A_2 = a_2 M^2$$

ergeben und $\tilde{D}_c^3$ frei von UV-Divergenzen ist. Setzen wir (25.9), (25.10) und (25.1) in die Entwicklung der S-Matrix ein, so erhalten wir eine Formel vom Typ (25.7), wobei sich $\Delta\mathcal{L}$ nun aus drei Kontertermen zusammensetzt:

$$\Delta\mathcal{L}(x) = Ch^2 :\varphi^4(x): + A_2 h^2 :\varphi^2(x): - A_0 h^2 :\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi:. \tag{25.11}$$

Die S-Matrix der Elektrodynamik enthält in zweiter Ordnung divergente Terme, die den Formeln (25.3) und (25.4) entsprechen:

$$S_2(x, y) = -\mathrm{i} :\overline{\psi}(x)\, \Sigma(x-y)\, \psi(y): \\ -\mathrm{i} :A_\mu(x)\, \Pi^{\mu\nu}(x-y)\, A_\nu(y): + (x \leftrightarrow y) + \cdots .$$

a) b) c) d)

Abb. 25.4
Die divergenten Beiträge dritter Ordnung zur Streumatrix der Elektrodynamik

In dritter Ordnung treten schließlich Beiträge auf (Abb. 25.4), die als Faktoren entweder die Photon- bzw. Elektron-Selbstenergie (25.3) bzw. (25.4) oder die Vertex-Funktion (25.5) (Abb. 25.4a) enthalten:

$$\begin{aligned} S_3(x, y, z) = &-\mathrm{ie} :\overline{\psi}(z)\, A_\nu(x)\, \Gamma^\nu(z, y; x)\, \psi(y): \\ &-\mathrm{ie} :\overline{\psi}(z)\, \Sigma(z-y)\, S^c(y-x)\, \gamma^\nu A_\nu(x)\, \psi(x): \\ &-\mathrm{ie} :\overline{\psi}(x)\, \gamma^\nu A_\nu(x)\, S^c(x-z)\, \Sigma(z-y)\, \psi(y): \\ &+\mathrm{ie} :A_\nu(x)\, \Pi^{\nu\mu}(x-z)\, D^c_{\nu\varrho}(z-y)\, \overline{\psi}(y)\, \gamma^\varrho \psi(y): \\ &+ (x \leftrightarrow y) + (x \leftrightarrow z) + (y \leftrightarrow z) + \cdots . \end{aligned}$$

Die Abtrennung quasilokaler divergenter Terme aus Σ, Π und Γ gemäß

$$\begin{aligned} \Sigma(x-y) &= (am + \mathrm{i}b\hat{\partial})\, \delta(x-y) + \Sigma'(x-y)\,, \\ \Pi^{\mu\nu}(x-y) &= cg^{\mu\nu}\delta(x-y) + \mathrm{d}(g^{\mu\nu}\Box + \partial^\mu\partial^\nu)\, \delta(x-y) + \Pi'^{\mu\nu}\,, \\ \Gamma^\nu(x, z; y) &= f\gamma^\nu\delta(x-y)\, \delta(x-z) + \Gamma'^\nu(x, z; y) \end{aligned} \tag{25.12}$$

führt zu den folgenden Umordnungen sowohl des Beitrages zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \int S_2(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = &-\mathrm{i} \int \overline{\psi}(x)\, (am + \mathrm{i}b\hat{\partial})\, \psi(x)\, \mathrm{d}x \\ &-\mathrm{i} \int A_\mu(x)\, [cg^{\mu\nu} + \mathrm{d}(g^{\mu\nu}\Box + \partial^\mu\partial^\nu]\, A_\nu(x)\, \mathrm{d}x \\ &+ \tfrac{1}{2} \int S_2'(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{25.13}$$

als auch des Beitrages dritter Ordnung

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3!} \int S_3(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ &= \mathrm{ie} : \int A_\mu(x)\, [cg^{\mu\nu} + \mathrm{d}(g^{\mu\nu}\Box_x + \partial^\mu_x\partial^\nu_x)]\, D_{\varrho\nu}(x-y)\, \overline{\psi}(y)\, \gamma^\varrho\psi(y): \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &\quad -\mathrm{ie} \int :\overline{\psi}(x)\, (am + \mathrm{i}b\hat{\partial}_x)\, S^c(x-y)\, \gamma^\nu A_\nu(y)\, \psi(y): \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &\quad -\mathrm{ie} \int :\overline{\psi}(x)\, \gamma^\nu A_\nu(x)\, S^c(x-y)\, (am + b\hat{\partial}_y)\, \psi(y): \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &\quad -\mathrm{ie}f \int :\overline{\psi}(x)\, A_\nu(x)\, \gamma^\nu\psi(x): \mathrm{d}x + \frac{1}{3!} \int S_3'(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,. \end{aligned} \tag{25.14}$$

zum S-Operator. Hier ist nun zu sehen, daß die beiden ersten Terme der rechten Seite von Formel (25.13) und der vierte Term der rechten Seite von Formel (25.14) zum Term erster Ordnung $\int S_1(x)\,\mathrm{d}x$ hinzugefügt werden können:

$$\int S_1(x)\,\mathrm{d}x \to \mathrm{i}\int [\mathscr{L}_I(x) + \Delta\mathscr{L}(x)]\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{L}(x) = &- :\bar{\psi}(x)\,(am + \mathrm{i}b\hat{\partial})\,\psi(x): - c :A_\nu(x)\,A_\nu(x):\\ &-\mathrm{d} :A_\mu(x)\,\Box A^\mu(x): + \mathrm{d} :(\partial^\mu A_\mu)\,(\partial^\nu A_\nu):\\ &-ef :\bar{\psi}(x)\,\hat{A}(x)\,\psi(x):\,.\end{aligned} \tag{25.15}$$

Gleichzeitig lassen sich die ersten drei Terme der rechten Seite von Formel (25.14) in der Form

$$\frac{\mathrm{i}^2}{2}\int T\{\mathscr{L}_I(x) + \Delta\mathscr{L}(x),\, \mathscr{L}_I(y) + \Delta\mathscr{L}(y)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\frac{\mathrm{i}^2}{2}\int T(\mathscr{L}_I(x)\,\mathscr{L}_I(y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{i}^2\int T\big(\mathscr{L}_I(x),\,\Delta\mathscr{L}(y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

darstellen, wobei unter dem Symbol $\Delta\mathscr{L}$ die rechte Seite von Formel (25.15) ohne deren letzten Term zu verstehen ist.

Damit haben wir gezeigt, daß die Abtrennung der den quasilokalen Ausdrücken in (25.12) entsprechenden singulären Beiträge von S_2 und S_3 dem Hinzufügen lokaler Konterterme (25.15) zur Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte $\mathscr{L}(x)$ äquivalent ist.

Diese Äquivalenz ist die Grundlage der im folgenden beschriebenen Methode zur Beseitigung der UV-Divergenzen, der *Methode der Renormierung.*

25.3. Konterterme und Renormierung

Die Idee der Renormierung beruht wesentlich darauf, daß die Konterterme in der Regel strukturmäßig mit den einzelnen Termen der ursprünglichen Lagrange-Dichte übereinstimmen.

Betrachten wir z. B. das skalare reelle Feld im φ^4-Modell:

$$\mathscr{L}_{\text{vollst}}(x) = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\,\varphi^2(x) + h\varphi^4(x)\,.$$

Ein Vergleich mit der Formel (25.11) zeigt, daß die divergenten Konterterme die gleiche Struktur wie die Terme dieser vollständigen Lagrange-Dichte haben.

Um den physikalischen Sinn des Hinzuschlagens von Kontertermen dieser Art zur Lagrange-Dichte zu klären, betrachten wir vorerst Konterterme

$$\Delta\mathscr{L}(x) = \frac{a_0}{2}\,\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{a_2}{2}\,\varphi^2(x) + c\varphi^4(x) \tag{25.11'}$$

mit *endlichen* Koeffizienten a_0, a_2 und c. Für die Summe aus $\mathscr{L}_{\text{vollst}}$ und $\Delta\mathscr{L}$ erhalten wir

$$\mathscr{L}' = \frac{z_1}{2}\,(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{z_1 m'^2}{2}\,\varphi^2 + z_2 h\varphi^4\,, \tag{25.16}$$

wobei

$$z_1 = 1 + a_0\,, \qquad z_1 m'^2 = m^2 + a_2\,, \qquad z_2 h = h + c$$

gesetzt wurde.

Zuerst untersuchen wir die Bedeutung des Koeffizienten z_1. Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite von (25.16) stellen die Lagrange-Dichte des freien skalaren Feldes mit der Masse m', multipliziert mit dem Faktor z_1, dar. Die absolute Normierung der freien Lagrange-Dichte spielt nur bei der Feldquantisierung eine Rolle, d. h. in Gleichungen, wie sie uns in der Relation (7.1) entgegentreten. Wie man sich leicht überzeugt, führt die Substitution

$$\varphi \to \varphi' = \sqrt{z_1}\,\varphi \tag{25.17}$$

zu einem renormierten Feld $\varphi'(x)$, das den normalen Vertauschungsrelationen (8.4) genügt. Setzen wir nun (25.17) in (25.16) ein, so erhält $\mathcal{L}'$ die Gestalt

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi')^2 - \frac{m'^2}{2}\varphi'^2 + h'\varphi'^4 \tag{25.18}$$

mit

$$h' = z_1^{-2} z_2 h = \frac{h + c}{(1 + a_0)^2}\,, \qquad m'^2 = \frac{m^2 + a_2}{1 + a_0}\,. \tag{25.19}$$

Hieraus sehen wir, daß das Hinzufügen der drei Konterterme (25.11') der endlichen Umnormierung zweier physikalischer Parameter des Modells, der Masse m und der Kopplungskonstanten h, äquivalent ist.

In Wirklichkeit sind die Koeffizienten der Konterterme (wie z.B. C, A_0, A_2 in den Formeln (25.8) und (25.11)) singulär, d. h., sie streben bei Aufheben der Regularisierung gegen Unendlich. Als Folge hiervon werden die Beziehungen (25.19), die die ursprünglichen Werte von m und h mit den physikalischen, „renormierten" Werten m' und h' verbinden, singulär.

Analoge Beziehungen für die Renormierung der Masse und der Norm der operatorwertigen Wellenfunktionen traten bereits im Modell des schweren Nukleons (vgl. Abschnitt 13.4.) auf. Wir erinnern daran, daß diese Beziehungen beim Übergang zum punktförmigen Nukleon singulär wurden. In der relativistischen Quantenfeldtheorie ist die Natur der UV-Divergenzen ebenfalls durch den lokalen und punktförmigen Charakter der Wechselwirkung bedingt. Besonders deutlich zeigte sich dies bei den in Vorlesung 24. betrachteten Selbstenergie-Diagrammen des Elektrons und des Vertex-Diagramms. Die dort verwendete Regularisierung des Photonpropagators (24.15) entspricht einer „Verschmierung" des punktförmigen Elektrons, d. h. dem Übergang zu einer nichtlokalen Wechselwirkung

$$j_\mu(x)\,A^\mu(x) \to j_\mu(x) \int K(x-y)\,A^\mu(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

wobei der Formfaktor

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{iqx}\,\frac{M^2}{M^2 - q^2}\,\mathrm{d}q$$

im Limes $M^2 \to \infty$ gegen die δ-Funktion strebt.

In der Methode der Renormierung, die wir (siehe Vorlesung 28. und 29.) noch ausführlicher darlegen werden, werden solche singulären Beziehungen wie (25.19)

lediglich als rein formale Beziehungen angesehen. Damit wird dem Umstand Rechnung getragen, daß die ursprünglichen Werte solcher Konstanten wie m und h, die in der ursprünglichen Lagrange-Dichte auftreten und zu den freien Feldern (genauer, zu Feldern mit unendlich schwacher Wechselwirkung) gehören, keinen physikalischen Sinn haben. Das hängt damit zusammen, daß derartige idealisierte Felder in der Natur nicht vorkommen und mit keinem Experiment, nicht einmal mit einem gedanklichen, in Verbindung gebracht werden können.

Andererseits führt die Berücksichtigung höherer Korrekturen dazu, daß nicht nur S_1, sondern auch die S_n ($n \geqq 2$) nur von der renormierten Masse und den renormierten Kopplungskonstanten abhängen. Deshalb ist es möglich, die renormierten Parameter mit experimentell meßbaren Größen in Verbindung zu bringen und sie mit den physikalischen Massen und Ladungen zu identifizieren. Die Tatsache, daß die durch die Renormierung von UV-Divergenzen freien Matrixelemente lediglich von den renormierten physikalischen Massen und Kopplungskonstanten

$$g' = f_g(m, g, \Lambda)\,, \qquad m' = f_m(m, g, \Lambda) \tag{25.20}$$

abhängen, ist (in Verbindung mit dem Fehlen zusätzlicher Abhängigkeiten der Theorie von den ursprünglichen Größen m und g, dem singulären Parameter Λ oder irgendwelchen anderen Größen) eine wichtige Eigenschaft einer Klasse von Quantenfeldtheorien die wir als *renormierbar* bezeichnen.

25.4. Divergenzen und verallgemeinerte Funktionen

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, den Prozeß der Beseitigung von UV-Divergenzen zu interpretieren, der im wesentlichen auf der Subtraktion geeigneter Polynome von den divergenten Matrixelementen beruht. Diesbezüglich erinnern wir daran, daß den divergenten Feynman-Integralen über die virtuellen Impulse im Konfigurationsraum Produkte einer bestimmten Anzahl von Propagatoren $D^c(x)$, $D_0^c(x)$, $S^c(x)$, ... entsprechen. Wie in Abschnitt 18.3. gezeigt worden ist, enthalten diese Propagatoren Glieder des Typs $\Theta(x^0)$ und $\delta(x^2)$, die vom mathematischen Standpunkt aus gesehen verallgemeinerte Funktionen sind. Im Unterschied zu den gewöhnlichen Funktionen der Analysis, die eine Abbildung „Zahl → Zahl" vermitteln, werden verallgemeinerte Funktionen als Kern linearer Funktionale definiert und vermitteln eine Abbildung „Funktion → Zahl". Aus diesem Grunde erfordert die Operation der Multiplikation verallgemeinerter Funktionen mit sich selbst zusätzliche Definitionen. Ohne auf die Einzelheiten dieser recht komplizierten Frage einzugehen (siehe [1], §§ 18 und 19), sei hier bemerkt, daß sich der Übergang

$$[D^c(x)]^2 \to \operatorname{reg}\,[D^c(x)]^2 \to \tilde{D}_c^2(x)$$

als eine *Definition* des Produktes D_c^2 auffassen läßt. Somit ist es möglich,

$$D_c(x)\cdot D_c(x) \underset{\text{def}}{=} \tilde{D}_c^2(x) \tag{25.21}$$

zu setzen, wobei die rechte Seite durch (25.2) definiert ist.

Bei dieser Betrachtungsweise treten die UV-Divergenzen in der S-Matrix überhaupt nicht in Erscheinung, und die Notwendigkeit einer unendlichen Umnor-

mierung der Masse und der Ladungen entsteht gar nicht erst. Man hat lediglich die endlichen Größen, die mit solchen Parametern wie μ^2 in (24.1) verbunden sind, geeignet zu fixieren.

Bei diesen Betrachtungen stellt sich heraus, daß in renormierbaren Quantenfeldtheorien die Matrixelemente von Funktionen solcher freien Konstanten wie μ und der Parameter m und g der Lagrange-Dichte abhängen

$$\tilde{g} = \varphi_g(m, g, \mu) , \qquad \tilde{m} = \varphi_m(m, g, \mu) , \tag{25.22}$$

aber nicht von m, g oder μ selbst. Diese Fragen werden wir in den nächsten Abschnitten ausführlicher studieren.

Beseitigung der Divergenzen

26. Die allgemeine Struktur der Divergenzen

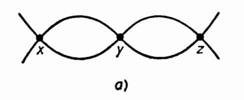
26.1. Divergenzen in den höheren Ordnungen der Störungstheorie

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die UV-Divergenzen in den beiden niedrigsten störungstheoretischen Ordnungen des nichtlinearen skalaren Modells und der Elektrodynamik betrachtet. Dort ist erstens gezeigt worden, daß die UV-Divergenzen der einfachsten 1-Loop-Diagramme als additive quasilokale Terme abgetrennt werden können. Zweitens ist gezeigt worden, daß sie auf Grund ihres quasilokalen Charakters einen Beitrag zur S-Matrix geben, der gerade die Struktur von Termen niedrigerer Ordnung der Störungstheorie hat und somit letztlich einen zusätzlichen lokalen Beitrag zur Lagrange-Dichte liefert, d. h. zu Kontertermen führt.

Im folgenden führen wir eine analoge Analyse für die Diagramme der höheren Ordnungen durch und zeigen, daß auch hier die divergenten Beiträge zu Kontertermen führen, obwohl sie im allgemeinen keine quasilokale Struktur haben. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf das φ^4-Modell mit der Selbstwechselwirkung

$$\mathcal{L}_I = -\frac{16\pi^2}{4!} h\varphi^4(x) . \tag{26.1}$$

Die Diagramme zweiter Ordnung, die in den Abb. 25.2 und 25.3 dargestellt sind, wurden bereits in Abschnitt 25.2. betrachtet. In dritter Ordnung wird der Streuprozeß durch die beiden 2-Loop-Diagramme der Abb. 26.1 beschrieben.



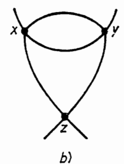


Abb. 26.1
Zwei-Loop-Streudiagramme dritter Ordnung im φ^4-Modell

Das Diagramm der Abb. 26.1a) ist eine Iteration des „Fisch"-Diagramms, und das zugehörige Matrixelement ist in der Koordinatendarstellung zu

$$D_c^2(x-y)\, D_c^2(y-z) \tag{26.2}$$

proportional. Nach Regularisierung mit Hilfe von (25.1) gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}_M\,[D_c^2(x-y)\, D_c^2(y-z)] &= \left(\frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\ln\frac{M^2}{\mu^2}\right)^2 \delta(x-y)\,\delta(y-z) \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\ln\frac{M^2}{\mu^2}\,[\delta(x-y)\,\tilde{D}_c^2(y-z) + \delta(y-z)\,\tilde{D}_c^2(x-y)] \\ &+ \tilde{D}_c^2(x-y)\,\tilde{D}_c^2(y-z) . \end{aligned} \tag{26.3}$$

In Übereinstimmung hiermit ist die Fourier-Transformierte im Impulsraum das Quadrat des Integrals (23.7)

$$[\mathrm{reg}_M\, I(k^2)]^2 = \left(\ln\frac{M^2}{\mu^2}\right)^2 - 2\ln\frac{M^2}{\mu^2} I_{\mathrm{endl}}(k^2) + \left(I_{\mathrm{endl}}(k^2)\right)^2\,, \tag{26.4}$$

wobei I_{endl} durch (24.1) gegeben ist.

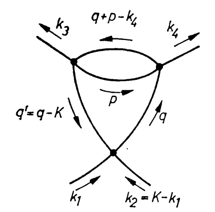


Abb. 26.2
Die Bezeichnungen der Impulse im Integral (26.5)

Die Struktur der singulären Beiträge zum Diagramm der Abb. 26.1b) läßt sich am einfachsten im Impulsraum studieren. Unter Verwendung der Impulsbezeichnungen von Abb. 26.2 betrachten wir also das folgende Feynman-Integral mit zwei unabhängigen Loops:

$$K(k_1, \dots, k_4) \sim \int \frac{\mathrm{i}dq}{\pi^2}\frac{1}{m^2 - q^2}\cdot\frac{1}{m^2-(q-k)^2} \times \int \frac{\mathrm{i}dp}{\pi^2}\cdot\frac{1}{m^2-p^2}\cdot\frac{1}{m^2-(q+p-k_4)^2}\,. \tag{26.5}$$

Es ist klar, daß dieses Integral im Bereich großer Impulse divergiert. Durch „gleitendes Abschneiden" beider Integrationsvariablen gemäß

$$\int dq \to \mathrm{reg}_{M(F)} \int dq = \int \frac{dq\, M^2}{M^2 - q^2} \tag{23.19}$$

erhalten wir

$$\mathrm{reg}_{M(F)}\, K = \int \frac{\mathrm{i}dq}{\pi^2}\frac{M^2}{M^2-q^2}\cdot\frac{1}{m^2-q^2}\cdot\frac{1}{m^2-(q-k)^2}\cdot \mathrm{reg}_{M(F)}\, I(q-k_4)\,. \tag{26.6}$$

In diesem konvergenten Ausdruck haben wir eine bestimmte Reihenfolge für die Integration festgelegt und die in Gl. (23.1) eingeführten Bezeichnungen benutzt. Einsetzen des Ausdrucks (23.7) im Integranden führt auf

$$\mathrm{reg}_{M(F)}\, K = -\ln\frac{M^2}{\mu^2}\,\mathrm{reg}_{M(F)}\, I(k) + \int \frac{\mathrm{i}dq}{\pi^2}\frac{M^2}{M^2-q^2}\cdot\frac{1}{m^2-q^2} \times \frac{1}{m^2-(q-k)^2}\cdot I_{\mathrm{endl}}(q-k_4)\,. \tag{26.7}$$

Die Struktur des ersten Terms ergibt sich direkt aus Formel (23.7). Der zweite Term enthält im Limes $M^2 \to \infty$ eine weitere Singularität, was unmittelbar aus dem asymptotischen Verhalten von I_{endl} gemäß (24.6) folgt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dieser singuläre Beitrag additiv ist. Es zeigt sich, daß er

proportional zum Quadrat des „großen Logarithmus" $\ln M^2$ ist. Ohne auf die expliziten Rechnungen einzugehen, schreiben wir das Endergebnis auf:

$$\mathrm{reg}_{M(F)}\, K = \left(\ln \frac{M^2}{\mu^2}\right)^2 - \ln \frac{M^2}{\mu^2}\, I_{\mathrm{endl}}(k) - \frac{1}{2}\left(\ln \frac{M^2}{\mu^2}\right)^2 + K_{\mathrm{endl}}(\dots k \dots)\,. \tag{26.8}$$

Hierbei entsprechen die ersten beiden Terme der rechten Seite dem ersten Term der rechten Seite von Formel (26.7).

Die von uns abgeleiteten Ausdrücke (26.4) und (26.8) weisen eine gemeinsame Struktur auf: Im Limes großer M^2 sind sie Polynome in $\ln M$, dabei sind die Koeffizienten von $(\ln M)^2$ Zahlen, während diejenigen von $\ln M$ Funktionen der Impulse sind.

In höheren Ordnungen der Störungstheorie divergieren auch die Diagramme mit vier äußeren Linien (und zwar logarithmisch). Der vollständige Ausdruck für jedes Diagramm ist für große M ein Polynom in $\ln M$. Die höchste Potenz der divergenten Logarithmen ist durch die Anzahl l der Loops, d. h. die Anzahl der unabhängigen Impulsintegrationen des Diagramms gegeben. Der Koeffizient von $(\ln M)^l$ ist eine Zahl und die Koeffizienten der niedrigeren Potenzen von $\ln M$ sind Funktionen der Impulse.

26.2. Der Zusammenhang von Kontertermen und Renormierung

Wir zeigen nun, daß die Beiträge mit niedrigeren Potenzen divergierender Logarithmen ebenfalls zu Kontertermen der Lagrange-Dichte und zur Renormierung führen, obwohl sie in der x-Darstellung keine quasilokale Struktur haben.

Zu diesem Zweck führen wir eine graphische Darstellung für den Prozeß der Abtrennung der Divergenzen ein, und drücken (24.2) durch die Graphen

= ⊕ + (26.9)

aus, wobei der schraffierte „Fisch" der endlichen Funktion I_{endl} und das Kreuz im Kreis dem divergenten Logarithmus entspricht. In dieser Symbolik kann der Beitrag des „Fisch"-Diagramms zum Matrixelement zweiter Ordnung (25.9) in der Form

= ⊕ + (26.10)

dargestellt werden. Der Beitrag des Diagramms der Abb. 26.1a) hat dann gemäß Gl. (26.4) die Darstellung

= ⊕^{2} + 2⊕ + (26.11)

und für das Diagramm der Abb. 26.2b) erhält man dementsprechend

= ⊕^{2} + ⊕ + ⊕ + . (26.12)

In der letzten graphischen Darstellung bezeichnet das Kreuz im Doppelkreis den dritten Term der Formel (26.8), d. h. den divergenten Teil des zweiten Terms der rechten Seite von Gl. (26.7); die übrigen Bezeichnungen sind klar.

Die Beiträge der Diagramme (26.10), (26.11) und (26.12) zur Streumatrix ergeben

$$S = 1 + S_1 + S_2 + S_3 + \dots =$$

$$= h \; + h^2 \; + h^3 \; + h^3 \; + \dots =$$

$$= h \, [1 + h \oplus + h^2 \oplus^2 + h^2 (\oplus) + \dots] \; + $$

$$+ h^2 \, [1 + 2h \oplus + \dots] \{ \; + \; \} +$$

$$+ h^3 \{ \; + \; \} + \dots \qquad (26.13)$$

Hieraus ist zu sehen, daß diejenigen divergenten Beiträge von Diagrammen höherer Ordnung mit mehreren Loops, die eine quasilokale Struktur haben, zum Term erster Ordnung S_1 beitragen. Sie ergeben somit Konterterme zur Lagrange-Dichte und führen im speziellen Fall zur Renormierung der Kopplungskonstanten

$$h \to h_* = h(1 + h \oplus + h^2 \oplus^2 + h^2 (\oplus) + \cdots) .$$

Die singulären Beiträge des zweiten Typs, die keinen quasilokalen Charakter haben und, wie die zweiten Terme der rechten Seiten der Formeln (26.4) und (26.8), in der Impulsdarstellung Funktionen der Impulse sind, führen in unserem Beispiel zu Strukturen, die den Term zweiter Ordnung der Streumatrix entsprechen; sie liefern im Endeffekt eine Renormierung der Kopplungskonstanten in S_2:

$$h^2 \to h^2(1 + 2h \oplus + \cdots) \approx h^2(1 + h \oplus + \cdots)^2 = h_*^2 .$$

Die betrachteten Beispiele sind typisch für eine ganze Klasse quantenfeldtheoretischer Modelle wechselwirkender Felder. Diese enthält neben dem skalaren φ^4-Modell auch solche physikalisch wichtigen Modelle wie die Quantenelektrodynamik. Für die Modelle dieser Klasse lassen sich alle divergenten Beiträge zu den Matrixelementen beliebig hoher Ordnung ausnahmslos auf Konterterme zurückführen, die sich der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte der jeweils niedrigeren Ordnung der S-Matrix hinzufügen lassen. Dies ist aber gerade einer Renormierung der physikalischen Parameter dieser Modelle, d. h. der Massen, der Kopplungskonstanten und der Wellenfunktionen äquivalent. Modelle wechselwirkender Felder mit derartigen Eigenschaften heißen *renormierbar*.

26.3. Der Divergenzgrad eines Diagramms

Wir analysieren nun die oben gegebene Beschreibung der Renormierbarkeit ausführlicher und geben Kriterien an, denen renormierbare quantenfeldtheoretische Modelle genügen müssen.

Dazu betrachten wir ein typisches Feynman-Integral im Impulsraum

$$J(\dots k \dots) = \int \prod_{1 \leqq \nu \leqq n} \{\delta(\Sigma p_\nu - \Sigma k_\nu)\} \prod_{1 \leqq l \leqq L} \{\Delta_l^c(p_l) \, \mathrm{d}p_l\} , \qquad (26.14)$$

das einem zusammenhängenden Diagramm n-ter Ordnung entspricht. Hierbei stehen in den Argumenten der für jeden Vertex ν auftretenden δ-Funktionen

Summen der Impulse der sich im Vertex treffenden inneren (virtuelle Impulse k_ν) und äußeren (äußere Impulse p_ν) Linien. Die Propagatoren schreiben wir in der Gestalt

$$\Delta_l^c(p) = \frac{P_l(p)}{m_l^2 - p^2 - i\varepsilon}, \tag{26.15}$$

wobei P_l ein bestimmtes Polynom des vom Spin des Feldes abhängenden Grades r_l ist.

Wie bereits gezeigt wurde, existieren Integrale des Typs (26.14) auf Grund der UV-Divergenzen im allgemeinen nicht und bedürfen einer Regularisierung. Letztere führen wir hier jedoch nicht ein, da wir den Charakter der entsprechenden UV-Divergenzen gerade an Hand der Eigenschaften des Integranden für große Werte von $|p_l|$ studieren wollen.

Da die betrachteten Diagramme zusammenhängend sind, lassen sich mit Hilfe der δ-Funktionen $4(n-1)$ Integrationen ausführen (die verbleibende δ-Funktion enthält dann keine inneren Impulse mehr und drückt die Erhaltung des Gesamtimpulses aus), so daß letztlich nur $4(L-n+1)$ unabhängige Integrationen auszuführen sind, wobei L die Gesamtanzahl der inneren Linien bezeichnet.

In Analogie zu den häufig benutzten Kugelkoordinaten im 3-dimensionalen Raum betrachten wir nun in dem $4(L-n+1)$-dimensionalen Raum den entsprechenden „radialen" Impuls P, der als Betrag des $4(L-n+1)$-dimensionalen Vektors $(p_{10}, \dots, p_{13}, \dots, p_{(L-n+1)0}, \dots, p_{(L-n+1)3})$ gegeben ist; die restlichen Variablen sind dann als „Winkel"-Variable aufzufassen. Das Produkt der unabhängigen Differentiale $\mathrm{d}p_l$ liefert dann den Faktor $P^{4(L-n+1)}\,\mathrm{d}P/P$. Im asymptotischen Bereich brauchen wir nur die höchsten Potenzen der Impulse in den Δ^c-Funktionen zu berücksichtigen; diese sind

$$P^{\sum\limits_l r_l - 2L} = P^{\sum\limits_l (r_l - 2)}.$$

Somit verhält sich der im Integranden bei $\mathrm{d}P/P$ stehende Faktor für große P wie P^ω, wobei

$$\omega(G) = \sum_l (r_l + 2) - 4(n-1) \tag{26.16}$$

ist. Die Zahl ω heißt *Index* oder (oberflächlicher) *Divergenzgrad des Diagramms.*

Das Integral über P konvergiert für $\omega(G) < 0$ und es divergiert für $\omega(G) \geqq 0$.

Es ist klar, daß aus der Konvergenz der P-Integration keinesfalls die Konvergenz des gesamten Integrals (26.14) folgt. Dies sei an Hand des Integrals

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}y \frac{x}{(y^2+1)^2}$$

demonstriert. Die Integration

$$\int_0^\infty \frac{\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho}{(1+\varrho^2 \sin^2\varphi)^2}$$

über die radiale Variable $\varrho = \dfrac{x}{\cos\varphi} = \dfrac{y}{\sin\varphi}$ ist konvergent, während das verbleibende Integral über φ wegen der Singularität bei $\varphi = 0$ divergiert.

Weitere Beispiele für ein solches Verhalten sind Integrale, die den in Abb. 26.3 dargestellten Diagrammen entsprechen. Beide Diagramme haben den negativen Index $\omega = -2$, aber sie enthalten Subdiagramme, die logarithmisch oder quadratisch divergieren. Somit ist die Bedingung

$$\omega(G) < 0 \tag{26.17}$$

für die Konvergenz von (26.14) notwendig, aber nicht hinreichend.

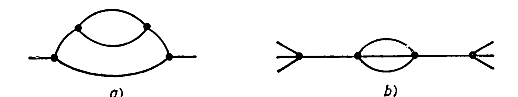


Abb. 26.3
Beispiele für skalare Diagramme, die einen negativen Divergenzindex haben, jedoch divergente Subdiagramme enthalten

Aus den in den Vorlesungen 24. und 25. betrachteten Beispielen divergenter Diagramme ist ersichtlich, daß der Divergenzgrad eines Diagramms für $\omega \geqq 0$ die Struktur der divergenten Beiträge bestimmt, die man bei Aufhebung der Regularisierung (aus dem entsprechenden regularisierten Integral) erhält.

Einem Integral mit dem Index $\omega > 0$ entspricht der Ausdruck

$$I_\omega(p) \sim \operatorname{reg} I_\omega(p, M)\,,$$

wobei im Limes $M \to \infty$ die Entwicklung

$$\operatorname{reg} I_\omega(p, M) \to a_0 M^\omega + a_1 p M^{\omega-1} + \cdots + a_{\omega-1} p^{\omega-1} M + a_\omega p^\omega + I^\omega_{\text{endl}}(p)$$

gilt; dabei ist I_{endl} der vom Regularisierungsparameter unabhängige „endliche Teil“ des Integrals I, und die a_α sind Koeffizienten, die von $\ln M$ abhängen können.

Wir sehen also, daß der Index eines Diagramms den Grad des Polynoms der Impulsvariablen bestimmt, das singuläre Koeffizienten hat. Nach der Abtrennung dieses Polynoms ist das verbleibende Integral endlich. Im Ortsraum handelt es sich um ein Polynom in den Ableitungen der δ-Funktion.

Somit entspricht einem Diagramm G mit n Vertizes und s äußeren Linien ein quasilokaler Operator

$$:u_1(x_1) \dots u_s(x_s): Z_\omega\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_{n-1} - x_n)\,,$$

wobei der Grad des Polynoms Z_ω gleich dem Index ω des Diagramms ist. Nach Integration dieses Ausdrucks über $(n - 1)$ Variable x_i verbleibt ein Integralausdruck, der einen Konterterm zur Lagrange-Dichte darstellt. Bei der Ausführung dieser trivialen Integrationen gehen die Ableitungen der δ-Funktionen auf die Feldoperatoren u_a über, und es entsteht das Normalprodukt einer Anzahl operatorwertiger Feldfunktionen und ihrer Ableitungen. Dabei ist die maximale Anzahl von Ableitungen gleich dem Index $\omega(G)$ des Diagramms und die Anzahl der Feldfunktionen gleich der Anzahl s äußerer Linien.

26.4. Die Eigenschaft der Renormierbarkeit

Aus dem soeben Dargelegten folgt nun für jede Theorie, die auf stark zusammenhängende Diagramme mit nichtnegativem Index führt, daß zur vollständigen Beschreibung ihrer Divergenzen endlich viele verschiedene Typen von Kontertermen ausreichen, sofern nur die Zahlen $\omega(G)$ und s dieser Diagramme beschränkt sind. Unter dem Typ eines Konterterms verstehen wir dabei seine Operatorstruktur einschließlich der Potenzen von Ableitungen jedes Feldoperators. Sind die angegebenen Bedingungen hingegen nicht erfüllt, so ist die Anzahl unterschiedlicher Konterterme nicht endlich.

Analysieren wir nun die Abhängigkeit des Divergenzgrades $\omega(G)$ von der Anzahl der inneren und äußeren Linien des Diagramms G. Dazu führen wir den Begriff des Divergenzgrades (Index) ω_i eines Vertex i vermöge der Relation

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{int}}} (r_l + 2) - 4 \tag{26.18}$$

ein, wobei sich die Summation über alle in diesen Vertex i einlaufenden inneren Linien l_{int} erstreckt. Wie man sich leicht überzeugt, läßt sich der Index $\omega(G)$ eines Diagramms durch die zugehörigen Vertexindizes ω_i ausdrücken. Da jede innere Linie genau zwei Vertizes verbindet, erhält man aus (26.16) die Relation

$$\omega(G) = \sum_{1 \leqq i \leqq n} \omega_i + 4 . \tag{26.19}$$

Für einen gegebenen Vertex nimmt der Index ω_i seinen maximalen Wert Ω_i stets dann an, wenn alle Linien, die in den Vertex einlaufen, innere Linien sind.

Offensichtlich ist der maximale Index Ω_i eines Vertex eine Charakteristik der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte oder, genauer gesagt, ihrer einzelnen Terme. Man kann ihn daher als *Index der Lagrange-Dichte* bezeichnen.

Falls alle

$$\Omega_i \leqq 0 \tag{26.20}$$

sind, so folgt aus (26.19) unmittelbar, daß stets $\omega(G) \leqq 4$ gilt. Wenn jedoch umgekehrt für wenigstens einen Typ von Vertizes, d. h. für einen Term der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte

$$\Omega_i > 0 \tag{26.21}$$

ist, dann läßt sich immer wenigstens ein Diagramm mit einer hinreichend großen Anzahl von Vertizes dieses Typs konstruieren, so daß $\omega(G)$ größer als jede vorgegebene Zahl ist. Hieraus folgt, daß in einer vorgegebenen Theorie der Index eines Diagramms entweder niemals größer als vier ist oder aber beliebig groß sein kann.

Unter Berücksichtigung von

$$\omega_i = \Omega_i - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{ext}}} (r_l + 2) ,$$

wobei sich die Summation über alle äußeren, in den betrachteten Vertex einlaufenden Linien l_{ext} erstreckt, läßt sich $\omega(G)$ in Abhängigkeit von der Anzahl äußerer Linien endgültig so darstellen:

$$\omega(G) = \sum_{i} \Omega_i + 4 - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{ext}}} (r_l + 2) , \tag{26.22}$$

wobei sich nunmehr die Summation im letzten Term über alle äußeren Linien des betrachteten Diagramms erstreckt.

Für den Fall $\Omega_i \leqq 0$ folgt hieraus, daß auch die Anzahl der äußeren Linien eines Diagramms mit positivem Index nicht größer als vier sein kann, also die beiden Größen $\omega(G)$ und s durch die Zahl vier beschränkt sind; die Anzahl verschiedener Typen von entsprechenden Kontertermen ist endlich, und es läßt sich somit eine detaillierte Klassifikation dieser Konterterme durchführen. Für den Fall $\Omega_i > 0$ können beide Summen auf der rechten Seite von (26.22) für nichtnegatives $\omega(G)$ beliebig groß gemacht werden, d. h., beide Charakteristiken, $\omega(G)$ und s, sind unbeschränkt, und die Kompensation der Divergenzen in den höheren Ordnungen zwingt dann zur Einführung von Kontertermen mit immer höheren Potenzen von Feldoperatoren (wachsendem Grad der „Linearität") und wachsender Anzahl von Ableitungen. Es ist dann nicht mehr möglich, einen geschlosssenen Ausdruck für die effektive Lagrange-Dichte anzugeben.

In Übereinstimmung damit lassen sich alle Wechselwirkungen in zwei Klassen teilen:

(a) Wechselwirkungen vom renormierbaren Typ (alle $\Omega_i \leqq 0$),
(b) Wechselwirkungen vom nichtrenormierbaren Typ (einige $\Omega_i > 0$).

Quantenfeldtheoretische Modelle, die Wechselwirkungen der ersten Klasse enthalten, sind renormierbar. Hierbei ist allerdings zu berücksichtigen, daß die Bedingung $\Omega_i \leqq 0$ zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist. Ein Beispiel dafür wird an Hand des Salam-Weinberg-Modells in Abschnitt 32. betrachtet.

27. Die vollständigen Green-Funktionen

27.1. Die Propagatoren der physikalischen Felder

Zum tieferen Verständnis des physikalischen Inhalts der verschiedenen Konterterme und der mit ihnen zusammenhängenden Renormierung ist die Einführung der *vollständigen Green-Funktionen* und *Vertexfunktionen* notwendig. Das sind Objekte, die die Strahlungskorrekturen infolge der Wechselwirkung der Quantenfelder enthalten und deshalb realen physikalischen Teilchen entsprechen.

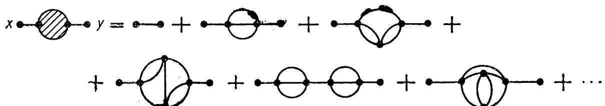


Abb. 27.1
Propagator eines skalaren Teilchens mit Strahlungskorrekturen niedrigster Ordnungen im φ^4-Modell

Wir beginnen die Betrachtung mit den durch zwei äußere Linien gekennzeichneten 1-Teilchen-Green-Funktionen, d. h. mit den Propagatoren. Die Strahlungskorrekturen zu den Propagatoren der freien Felder sind durch die Selbstenergiediagramme gegeben. In Abb. 27.1 sind die Selbstenergieeinsetzungen der niedrigsten Ordnungen für den Propagator des skalaren Teilchens im φ^4-Modell dargestellt. Ihre Summe führt zu den einfach zusammenhängenden Green-Funktionen (kurz Green-Funktionen) des skalaren Feldes.

Abb. 27.2
Summe stark zusammenhängender Diagramme, die den Massenoperator darstellen

Die Gesamtheit aller Selbstenergiediagramme enthält insbesondere die Klasse der stark zusammenhängenden oder 1-Teilchen-irreduziblen (1 PI-)Diagramme, die auch nach Entfernung einer beliebigen inneren Linie nicht zerfallen. Die Summe dieser Diagramme ist in Abb. 27.2 graphisch wiedergegeben. Sie entspricht dem sogenannten Masseoperator $M(p^2)$.

Abb. 27.3
Darstellung der vollständigen Green-Funktion durch Diagramme, die die Iteration des Massenoperators enthalten

Die Green-Funktionen des skalaren Feldes, d. h. die Propagatoren realer skalarer Teilchen, die die virtuelle Erzeugung und Vernichtung zusätzlicher Teilchen („Vakuumpolarisation") bei der Bewegung des ursprünglichen („nackten") Teilchens durch das Vakuum berücksichtigen, sind mit dem Masseoperator $M(p^2; g)$ durch die der Abb. 27.3 entsprechenden Beziehung

$$\Delta(p^2; g) = \Delta_0(p^2) + \Delta_0 \frac{M(p^2; g)}{\mathrm{i}} \Delta_0 + \Delta_0 \frac{M}{\mathrm{i}} \Delta_0 \frac{M}{\mathrm{i}} \Delta_0 + \cdots \tag{27.1}$$

verbunden; hierbei ist

$$\Delta_0(p^2) = \frac{1}{\mathrm{i}(m^2 - p^2)}$$

der Propagator des freien Teilchens. Die Normierung des Masseoperators (die Abtrennung des Faktors i) erfolgte im Einklang mit den in Abschnitt 24. eingeführten einfachsten 1-Loop-Diagrammen. In niedrigster Ordnung der Störungstheorie, die dem „Nuß"-Diagramm entspricht (vgl. Abb. 25.3), gilt

$$M(p^2; g) \simeq g^2 M_2(p^2) = \frac{96 g^2}{(2\pi)^8 \mathrm{i}} \int \mathrm{d}k \, \mathrm{d}q \, \Delta(q) \, \Delta(k) \, \Delta(p + q + k) \,. \tag{27.2}$$

Wie man leicht einsieht, hat die rechte Seite der Formel (27.1) die Struktur einer geometrischen Reihe und kann daher in geschlossener Form geschrieben werden; man erhält zunächst

$$\Delta = \Delta_0[1 - \mathrm{i}M\Delta_0 + (-\mathrm{i}M\Delta_0)^2 + \cdots] = \Delta_0(1 + \mathrm{i}M\Delta_0)^{-1}$$

und hieraus unter Berücksichtigung der expliziten Gestalt von Δ_0

$$\Delta(p^2; g) = \frac{1}{\mathrm{i}[m^2 - p^2 + M(p^2; g)]} \,. \tag{27.3}$$

Auf analoge Weise lassen sich die Green-Funktionen von Teilchen mit Spin darstellen; als Beispiel führen wir den Elektron- und den Photon-Propagator der

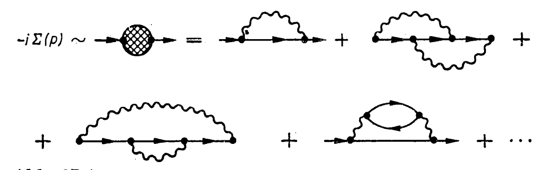


Abb. 27.4
Stark zusammenhängende Diagramme, die den Massenoperator des Elektrons bilden

Elektrodynamik an. Bezeichnet man den Masseoperator des Elektrons mit Σ, so ergibt sich entsprechend seiner graphischen Darstellung in Abb. 27.4 in direkter Analogie zum φ^4-Modell

$$G(p) = \frac{-\mathrm{i}}{m - \hat{p} + \Sigma(p, \alpha)}. \tag{27.4}$$

Die Beiträge der stark zusammenhängenden Selbstenergiediagramme des Photons bilden schließlich den Polarisationsoperator $\Pi_{\mu\nu}(k; \alpha)$. In niedrigster Ordnung der Störungstheorie stimmen diese Operatoren mit den in Ahschnitt 24. eingeführten Ausdrücken (siehe die Formeln (24.8) und (24.14))

$$\begin{aligned} \Sigma(p; \alpha) &= \Sigma(p) + \alpha^2 \dots, \\ \Pi_{\mu\nu}(k; \alpha) &= \Pi_{\mu\nu}(k) + \alpha^2 \dots \end{aligned} \tag{27.5}$$

überein. Die Untersuchung der Matrixstruktur des Polarisationsoperators verschieben wir auf Abschnitt 29., wo sie unter Berücksichtigung der Eichinvarianz erfolgt.

Auf analoge Weise lassen sich auch die Summen von Diagrammen mit mehr als zwei äußeren Linien behandeln, wobei die Summe der stark zusammenhängenden (1 PI-)Diagramme mit $l \geqq 3$ äußeren Linien als *Vertexfunktionen* oder kurz *Vertex* bezeichnet wird (siehe beispielsweise Abb. 27.5). Im weiteren werden wir mit dem Sammelbegriff der *Green-Funktion* oder *n-Punkt-Funktion* alle jene Ausdrücke bezeichnen, die der Summe aller zusammenhängenden Diagramme mit einer vorgegebenen Anzahl ($n \geqq 2$) äußerer Linien entsprechen. Die Propagatoren der physikalischen Felder sind in dieser Terminologie die 2-Punkt-Funktionen, d. h. die Green-Funktionen mit zwei äußeren Linien.

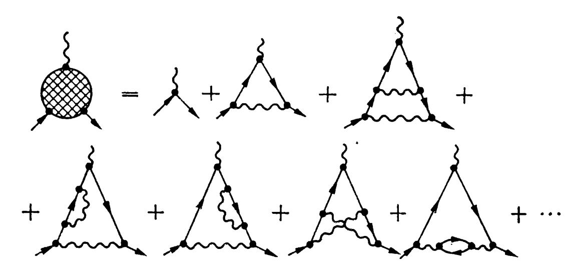


Abb. 27.5
Stark zusammenhängende Diagramme dritter und fünfter Ordnung, die den Elektron-Photon-Vertex in der Elektrodynamik bilden

27.2. Die höheren Green-Funktionen

Die oben eingeführten Begriffe basieren auf mehr oder weniger intuitiven Beobachtungen, denen die Summation bestimmter Typen von Diagrammen zu Grunde liegen. Im folgenden geben wir analytische Ausdrücke für die Green-Funktionen an.

Als Basisobjekt unserer formalen Behandlung der n-Punkt-Funktion wählen wir den Vakuumerwartungswert

$$\langle \mathrm{T} u_1(x_1) \dots u_n(x_n)\, S\rangle_0\,, \tag{27.6}$$

der unter dem T-Produkt außer den Feldoperatoren auch die Streumatrix

$$S = \mathrm{T}(\exp \mathrm{i}\mathcal{A}) \tag{27.7}$$

mit $\mathcal{A} = \int \mathcal{L}_I(x)\, \mathrm{d}x$ enthält. Einerseits sind solche Ausdrücke wie (27.6) mit den Elementen der S-Matrix für Übergänge $n_i \to n_f$ mit $n_i + n_f = n$ verknüpft (siehe Abschnitt 27.4.), andererseits stellen sie die natürliche Verallgemeinerung der 2-Punkt-Funktionen freier Felder auf den Fall wechselwirkender Felder dar.

Die störungstheoretische Entwicklung der S-Matrix führt den Ausdruck (27.6) für $n = 2$ in die Reihe

$$\langle \mathrm{T} u_1(x)\, u_2(y)\, S\rangle_0 = \langle \mathrm{T} u_1(x)\, u_2(y)\rangle_0 + \mathrm{i}\langle \mathrm{T} u_1(x)\, u_2(y)\, \mathcal{A}\rangle + \frac{\mathrm{i}^2}{2!}\langle \mathrm{T} u_1(x)\, u_2(y)\, \mathcal{A}^2\rangle_0 + \frac{\mathrm{i}^3}{3!}\langle \mathrm{T} u_1(x)\, u_2(y)\, \mathcal{A}^3\rangle_0 + \cdots \tag{27.8}$$

über, deren höhere Glieder die Strahlungskorrekturen des ersten Gliedes $\langle \mathrm{T} u_1 u_2\rangle_0$, der elementaren (freien) Kontraktion, sind.

An dieser Stelle ist eine wichtige Bemerkung angebracht, die sich auf solche nicht explizit zeitabhängige operatorwertige Faktoren wie die Exponentialfunktion in (27.7) oder auch Feldoperatoren in der Impulsdarstellung bezieht, die unter dem Operationssymbol $\langle \mathrm{T}(\dots)\rangle_0$ auftreten. Man könnte nämlich in Versuchung geraten, solche „zeitunabhängigen“ Faktoren aus dem T-Produkt herauszuziehen. Jedoch erhält man infolge eines solchen Vorgehens nach der Berechnung des Vakuumerwartungswertes einen Ausdruck, in dem einige zeitgeordnete Kontraktionen durch die gewöhnlichen ersetzt sind, d. h., man erhält ein falsches Ergebnis.

In derartigen Ausdrücken hat man daher immer zuerst die Operation $\langle \mathrm{T}(\dots)\rangle_0$ auszuführen und erst danach über den Konfigurationsraum zu integrieren. Beispielsweise ist der dritte Term auf der rechten Seite von (27.8) per definitionem durch

$$\langle \mathrm{T} u_1(x)\, u_2(y)\, \mathcal{A}^2\rangle_0 \equiv \int \mathrm{d}z_1\, \mathrm{d}z_2\, G(x, y; z_1, z_2)$$

mit

$$G(x, y; z_1, z_2) = \langle \mathrm{T} u_1(x)\, u_2(y)\, \mathcal{L}(z_1)\, \mathcal{L}(z_2)\rangle_0$$

gegeben. Somit sind die Operationen $\langle \mathrm{T}\dots\rangle_0$ und $\int \mathrm{d}x$ nicht vertauschbar, und die Schreibweise der Gleichung (27.8) ist rein symbolisch.

Die Beiträge auf der rechten Seite dieser Gleichung enthalten zum einen Terme, die den zusammenhängenden Diagrammen der Abb. 27.1 mit zwei äußeren, in den

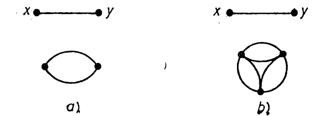


Abb. 27.6
Nichtzusammenhängende Diagramme zweiter und dritter Ordnung, die den Termen der rechten Seite von Formel (27.8) entsprechen

Punkten x bzw. y endenden Linien entsprechen; andererseits gibt es außerdem noch die nicht zusammenhängenden Diagramme, wie z.B. das Diagramm der Abb. 27.6a), welches dem dritten Term auf der rechten Seite von (27.8) entspricht; ferner das Diagramm der Abb. 27.6b), welches dem vierten Term entspricht usw. Solche nicht zusammenhängenden Diagramme sind in allen höheren Ordnungen vorhanden. Sie entsprechen einer bestimmten Art der Kontraktion von Feldoperatoren, bei der die Operatoren $u_1(x)$ und $u_2(y)$ nur über einen Teil der Vertizes $z_1, \dots, z_m$ miteinander kontrahiert sind, während die zu den übrigen Vertizes $z_{m+1}, \dots, z_n$ eines Diagramms n-ter Ordnung gehörenden Operatoren lediglich untereinander kontrahiert sind. Derartige Beiträge faktorisieren

$$\langle \mathrm{T}\{u_1 u_2 (\mathrm{i}\mathcal{A})^m\}\rangle_0^{\mathrm{conn}} \cdot \langle \mathrm{T}(\mathrm{i}\mathcal{A}^{n-m})\rangle_0 \,.$$

Der hier eingeführte obere Index "conn" am Erwartungswert bezeichnet die zusammenhängenden (engl. connected) Beiträge. Da es $n!/m!(n-m)!$ Möglichkeiten gibt, die Vertizes $z_1, \dots, z_m$ aus den n Vertizes auszuwählen, gilt

$$\langle \mathrm{T}u_1u_2S\rangle_0 = \sum_{0\leqq n\leqq\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} \sum_{1\leqq m\leqq n} \frac{n!}{m!(n-m!)} \langle \mathrm{T}u_1u_2\mathcal{A}^m\rangle_0^{\mathrm{conn}} \cdot \langle \mathrm{T}\mathcal{A}^{n-m}\rangle_0 ;$$

hierbei läuft die Summation über n von Null bis unendlich. Nach Vertauschung der Reihenfolge der beiden Summationen folgt

$$\langle \mathrm{T}u_1u_2S\rangle_0 = \sum_{0\leqq m\leqq\infty} \frac{\mathrm{i}^m}{m!} \langle \mathrm{T}u_1u_2\mathcal{A}^m\rangle_0^{\mathrm{conn}} \sum_{0\leqq l\leqq\infty} \frac{\mathrm{i}^l}{l!} \langle \mathrm{T}\mathcal{A}^l\rangle_0 = \langle \mathrm{T}u_1u_2S\rangle_0^{\mathrm{conn}} S_0 \tag{27.9}$$

mit $S_0 = \langle S\rangle_0$. Somit faktorisieren die Vakuumbeiträge S_0 auch im vollständigen Ausdruck.

Ausgehend hiervon definieren wir die 2-Punkt-Funktion durch

$$\Delta_{12}(x, y; g) = \mathrm{i}\frac{\langle \mathrm{T}u_1(x)\, u_2(y)\, S\rangle_0}{S_0}. \tag{27.10}$$

In diesem Ausdruck sind alle Strahlungskorrekturen, die den zusammenhängenden Feynman-Diagrammen entsprechen, berücksichtigt. Im Grenzfall verschwindender Wechselwirkung geht er in die Green-Funktion des freien Feldes über.

Diese zur Faktorisierung der Vakuumbeiträge führende Diskussion kann analog für Vakuumerwartungswerte mit $k > 2$ wiederholt werden. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß nach Entfernung der faktorisierenden Vakuumbeiträge der Ausdruck

$$S_0^{-1}\langle \mathrm{T}u_1 \dots u_k S\rangle_0 \tag{27.11}$$

im allgemeinen noch Terme enthält, in denen ein Teil der Operatoren $u_1, \dots, u_l$ in eine Zusammenhangskomponente des nicht zusammenhängenden Diagramms eingeht, während die restlichen Operatoren $u_{l+1}, \dots, u_k$ in eine oder mehrere andere

Komponenten eingehen. Solche Terme entsprechen daher dem Produkt von Diagrammen, welche in die Green-Funktionen mit einer geringeren Anzahl äußerer Linien eingehen.

Demzufolge können Ausdrücke wie (27.11) für $k > 2$ nicht den k-Punkt-Funktionen gleichgesetzt werden. Eine Ausnahme bildet dabei die 3-Punkt-Funktion

$$S_0^{-1}\langle \mathrm{T}u_1(x)\, u_2(y)\, u_3(z)\, S\rangle_0\,, \tag{27.12}$$

die eine Summe zusammenhängender Diagramme ist.

Für die (zusammenhängenden) 4-Punkt-Funktionen geben wir die entsprechende Formel ohne Beweis an:

$$\begin{aligned} G_{1234}(x, y, z, t) &= S_0^{-1}\langle \mathrm{T}u_1(x)\, u_2(y)\, u_3(z)\, u_4(t)\, S\rangle_0 \\ &\quad - \mathrm{i}\Delta_{12}(x, y)\, \Delta_{34}(t, z) - \mathrm{i}\Delta_{13}(x, z)\, \Delta_{24}(y, t) \\ &\quad - \mathrm{i}\Delta_{14}(x, t)\, \Delta_{23}(y, z)\,. \end{aligned} \tag{27.13}$$

27.3. Stark zusammenhängende n-Punkt-Funktionen (Vertex-Funktionen)

Die oben eingeführten n-Punkt-Funktionen enthalten auch alle schwach zusammenhängenden, d. h. 1-Teilchen reduziblen Beiträge. Diese Aussage ist in den Abb. 27.3 und 27.7 illustriert, in denen die stark zusammenhängenden Beiträge doppelt schraffiert sind.

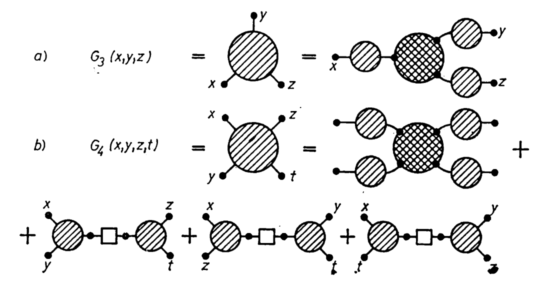


Abb. 27.7
Darstellung der 3- und 4-Punkt-Funktionen durch 2-Punkt-Funktionen Δ und stark zusammenhängende Vertexfunktionen (doppelt schraffiert); mit dem Quadrat □ ist der „inverse Propagator“ Δ^{-1} bezeichnet

Die entsprechenden Formeln, die die (einfach) zusammenhängenden n-Punkt-Funktionen, d. h. die Green-Funktionen mit den stark zusammenhängenden Vertexfunktionen $\Gamma_n(x_1, \ldots, x_n)$ verbinden, lassen sich unter Verwendung des Apparates der erzeugenden Funktionale gewinnen. Dabei geht man von der Darstellung der Green-Funktionen und der Vertexfunktionen durch entsprechende Variationsableitungen aus. Diesbezüglich verweisen wir den interessierten Leser auf die vorhandene Spezialliteratur (siehe dazu [1], § 38) und geben hier lediglich die

Endformeln an, die der Abb. 27.7 für das skalare Feld entsprechen

$$G_3(x, y, z) = \int \Delta(x - x')\,\mathrm{d}x'\,\Gamma_3(x', y', z')\,\mathrm{d}y'\Delta(y' - y)\,\mathrm{d}z'\,\Delta(z' - z)\,, \tag{27.14}$$

$$\begin{aligned} &G_4(x, y, z, t) \\ &= \int \Delta(x - x')\,\mathrm{d}x'\,\Delta(y - y')\,\mathrm{d}y'\,\Gamma_4(x', y', z', t')\,\mathrm{d}z'\,\Delta(z - z')\,\mathrm{d}t'\,\Delta(t' - t) \\ &\quad + \int G_3(x, y, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\Delta^{-1}(\tau - \tau')\,\mathrm{d}\tau'\,G_3(\tau', z, t) \\ &\quad + \int G_3(x, z, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\Delta^{-1}(\tau - \tau')\,\mathrm{d}\tau'\,G_3(\tau', y, t) \\ &\quad + \int G_3(x, t, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\Delta^{-1}(\tau - \tau')\,\mathrm{d}\tau'\,G_3(\tau', y, z)\,. \end{aligned} \tag{27.15}$$

Hierbei ist Δ^{-1} die zu Δ im Sinne der Faltung inverse Funktion (Kern von Integraloperatoren), d. h., es gilt per definitionem

$$\int \Delta(x - \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\Delta^{-1}(\tau - y) = \int \Delta^{-1}(x - \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\Delta(\tau - y) = \delta(x - y)\,. \tag{27.16}$$

Es sei angemerkt, daß in der Impulsdarstellung die Fourier-Transformierten von Δ und Δ^{-1} im algebraischen Sinne zueinander invers sind:

$$\tilde{\Delta}(p)\,\tilde{\Delta}^{-1}(p) = 1\,.$$

Mit Hilfe der Funktion Δ^{-1} kann man die Umkehrformeln zu (27.14) und (27.15) mühelos aufschreiben. So gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} &\Gamma_3(x, y, z) \\ &= \int \Delta^{-1}(x - x')\,\mathrm{d}x'\,\Delta^{-1}(y - y')\,\mathrm{d}y'\,G_3(x', y', z')\,\mathrm{d}z'\,\Delta^{-1}(z' - z)\,. \end{aligned} \tag{27.17}$$

Schließlich geben wir noch die zu (27.14) analoge Formel für die Elektrodynamik an:

$$\begin{aligned} &S_0^{-1}\langle \mathrm{T}\psi(x)\,\bar{\psi}(y)\,\mathcal{A}^\mu(z)\,S\rangle_0 \\ &= \int S^c(x - x')\,\mathrm{d}x'\,D_c^{\mu\nu}(z - z')\,\mathrm{d}z'\,\Gamma_\nu(x', y', z')\,\mathrm{d}y'\,S^c(y' - y)\,. \end{aligned} \tag{27.18}$$

Zum Abschluß bemerken wir, daß die Prozedur des Übergangs von den schwach zusammenhängenden 3-Punkt-Funktionen G_3 zu den stark zusammenhängenden Vertexfunktionen Γ_3 im Entfernen der Strahlungskorrekturen der äußeren Linien besteht; sie wird daher auch *„Amputation" der äußeren Linien* genannt. Für die höheren Green-Funktionen beschränkt sich der entsprechende Übergang nicht allein auf die Amputation der äußeren Linien wie aus (27.15) ersichtlich ist.

27.4.* Die Reduktionsformeln

Die oben betrachteten Green-Funktionen lassen sich durch einfache Beziehungen mit den Matrixelementen der Streumatrix in Verbindung bringen.

Es ist weitgehend klar, daß das Übergangsmatrixelement $m \to n$

$$\langle \overset{*}{\Phi}(\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n)\,S\Phi(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m)\rangle_0 \tag{27.19}$$

mit

$$\Phi_{\alpha\dots\omega}(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m) = \overset{+}{a}_\alpha(\boldsymbol{q}_1)\dots\overset{+}{a}_\omega(\boldsymbol{q}_m)\,\Phi_0$$

durch dieselben Feynman-Diagramme beschrieben wird, wie die zusammenhängende $(n + m)$-Punkt-Funktion G_{n+m}. Der Unterschied beruht lediglich auf Faktoren, die den äußeren Linien entsprechen. Im Matrixelement (27.19) ent-

sprechen den äußeren Linien nach den Feynman-Regeln der Vorlesung 20. die Amplituden $f^{\pm}_{\sigma}(\boldsymbol{k})$ der Teilchen im Anfangs- bzw. Endzustand. Das sind beispielsweise

$$f^{\pm}(\boldsymbol{k}) = \pm\,(16\pi^3 k_0)^{-1/2} \qquad \text{für das spinlose Feld,}$$

$$f^{\pm}_{s}(\boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-3/2}\, v^{\pm}_{s}(\boldsymbol{p}) \qquad \text{für das Spinorfeld und}$$

$$f^{\pm}_{\nu}(\boldsymbol{q}) = \pm\,(16\pi^3 q_0)^{-1/2}\, e_{\nu}(\boldsymbol{q}) \qquad \text{für das elektromagnetische Feld;}$$

wobei die negativ-frequenten Amplituden f^- den Teilchen im Anfangszustand und die positiv-frequenten Amplituden f^+ den Teilchen im Endzustand entsprechen.

Im Unterschied dazu entsprechen den äußeren Linien der Green-Funktionen

$$\tilde{\Delta}_{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \int e^{\mathrm{i}\Sigma k_j x_j}\, \Delta_{(n)}(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n\,, \tag{27.20}$$

die hier in der Impulsdarstellung notiert sind, die Propagatoren der freien Felder. Mit der Kenntnis dieser Sachverhalte läßt sich (in der Impulsdarstellung) unmittelbar folgende *Reduktionsformel* angeben:

$$\langle \overset{*}{\Phi}(\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n)\, S\Phi(\boldsymbol{q}_1, \dots, q_m)\rangle_0 = \mathrm{i}\eta \prod_{1\leq k\leq n} [f^+_k(\boldsymbol{p}_k)\, \Delta_k^{-1}(p_k)]$$

$$\times\, \tilde{\Delta}_{(n+m)}(p_1, \dots, p_n; -\boldsymbol{q}_1, \dots, -q_m) \prod_{1\leq l\leq m} [f^-_l(\boldsymbol{q}_l)\, \Delta_l^{-1}(q_l)]\,, \tag{27.21}$$

der Faktor i auf der rechten Seite ergibt sich aus der üblichen Definition der Green-Funktion, und $\eta = \pm 1$ ist ein Faktor, der die Änderung des Vorzeichens bei Permutationen von Fermi-Operatoren berücksichtigt.

28. Die Renormierungsprozedur

28.1. Die Renormierung der Green-Funktionen

Unser weiteres Programm besteht nun in der Formulierung einer Prozedur zur Subtraktion aller Divergenzen der Green-Funktionen, als deren Ergebnis die sogenannten *renormierten Green-Funktionen* entstehen, die keine ultravioletten Unendlichkeiten mehr enthalten. Solche Ausdrücke tragen allerdings noch willkürliche Züge, die von der Nichteindeutigkeit unendlicher Subtraktionen herkommen; das äußert sich darin, daß in der Impulsdarstellung in diese Green-Funktionen ein Polynom der äußeren Impulse von endlichem Rang ω mit zunächst willkürlichen, aber endlichen Koeffizienten eingeht. Diese Abhängigkeit der renormierten Green-Funktionen von nichtspezifizierten endlichen Konstanten hat aber für renormierbare Theorien einen recht einfachen und gleichzeitig spezifischen Charakter, der sich darin ausdrückt, daß die Willkür auf solche Parameter wie Masse, Kopplungskonstante und Normierung der Wellenfunktion übertragen werden kann. Das ermöglicht letztlich die Ableitung renormierter Green-Funktionen, die nur noch von den sogenannten renormierten Massen und Kopplungskonstanten abhängen und keine zusätzlichen willkürlichen Konstanten, gleich welcher Art, enthalten. Die renormierten Massen und Kopplungskonstanten selbst werden durch direkt beobachtbare Größen ausgedrückt.

Wir beginnen dieses Programm mit der Analyse der 2-Punkt-Funktionen, d. h. der Propapatoren.

Wie in Abschnitt 27.1. gezeigt wurde, hängt die 2-Punkt-Funktion $G(p)$ mit der 1PI-Vertexfunktion $\Gamma_2(p, g)$, die gleich dem Masseoperator ist, über die algebraische Beziehung

$$G(p; q) = G_0(p) + G_0\Gamma_2(p; g)\, G_0 + G_0\Gamma_2 G_0 \Gamma_2 G_0 + \cdots = (G_0^{-1} - \Gamma_2)^{-1} \quad (28.1)$$

zusammen. Durch Subtraktion der Divergenzen wird die Vertexfunktion Γ_2, die formal vermöge der Feynman-Regeln mit Hilfe der stark zusammenhängenden Diagramme definiert ist, durch den Ausdruck $\tilde{\Gamma}_2(p)$ ersetzt, der keine Divergenzen enthält. Die Struktur von $\tilde{\Gamma}_2(p)$ hängt natürlich in starkem Maße vom betrachteten quantenfeldtheoretischen Modell ab.

Für renormierbare Wechselwirkungen, bei denen der maximale Index jedes Vertex Null ist, hängt der Divergenzgrad eines Diagramms nicht von der Ordnung der Störungstheorie ab. Er ist für Diagramme mit zwei äußeren Boson-Linien gleich 2 und für Diagramme mit zwei äußeren Fermion-Linien gleich 1.

Deshalb hat $\tilde{\Gamma}_2$ im ersten Falle die Struktur

$$\tilde{\Gamma}_2(p) = ap^2 + bm^2 + \Gamma_2^{\text{endl}}(p^2)\,, \quad (28.2\text{a})$$

und im zweiten Falle gilt

$$\tilde{\Gamma}_2(p) = a\hat{p} + bm + \Gamma_2^{\text{endl}}(p)\,, \quad (28.2\text{b})$$

d. h., in beiden Fällen enthält $\tilde{\Gamma}_2$ auf Grund der relativistischen Invarianz zwei freie endliche Konstanten.

Im Gegensatz hierzu wächst in nichtrenormierbaren Modellen der Divergenzgrad mit der Ordnung der Störungstheorie: In jeder endlichen Ordnung enthält die Funktion $\tilde{\Gamma}_2$ ein endliches Polynom in p^2 oder $\hat{p}$ mit freien Koeffizienten; jedoch wächst der Grad des Polynoms mit der Ordnung der Diagramme. Damit hängt auch die Vertex-Funktion $\tilde{\Gamma}_2$ als unendliche Summe über alle Ordnungen der Störungstheorie von unendlich vielen freien Parametern, d. h. von einer freien Funktion, ab.

Im Fall eines skalaren Feldes erhalten wir mit den Formeln (28.1) und (28.2)

$$\tilde{G}(p^2) = [(1 - b)\, m^2 - (1 + a)\, p^2 - \Gamma_2^{\text{endl}}(p^2)]^{-1}\,. \quad (28.3)$$

Wir definieren nun das Quadrat der renormierten Masse $\tilde{m}^2$ des skalaren Teilchens in Anlehnung an die Gestalt des freien Propagators $(p^2 - m^2)^{-1}$ als Lage des Pols von $\tilde{G}(p^2)$ bezüglich der Variablen p^2, d. h., wir fordern

$$\tilde{G}^{-1}(\tilde{m}^2) = (1 - b)\, m^2 - (1 + a)\, \tilde{m}^2 - \Gamma_2^{\text{endl}}(\tilde{m}^2) = 0\,. \quad (28.4\text{a})$$

Diese Beziehung läßt sich in die Form

$$\tilde{m}^2 = m^2 + \Delta m^2$$

bringen, wobei

$$\Delta m^2 = -\frac{a + b}{1 + a} m^2 - \frac{\Gamma_2^{\text{endl}}(\tilde{m}^2)}{1 + a} \quad (28.5\text{a})$$

eine Verschiebung des Quadrates der Masse ist, die durch die quantentheoretischen Strahlungskorrekturen hervorgerufen wird. Zur Berechnung von $\tilde{m}^2$ und Δm^2 hat man die transzendente Gleichung (28.4a) zu lösen.

In der Umgebung des Pols $p^2 = \tilde{m}^2$ läßt sich der renormierte Propagator $\tilde{G}$ in der Form

$$\tilde{G}(p^2)|_{p^2 \simeq \tilde{m}^2} \simeq \frac{Z_2}{\tilde{m}^2 - p^2} \tag{28.6a}$$

darstellen, wobei der sogenannte *Z-Faktor* Z_2 über die Relation

$$Z_2^{-1} = 1 + a + \Gamma_2'^{\text{endl}}(\tilde{m}^2), \qquad \Gamma_2'(m^2) = \left.\frac{\partial \Gamma_2(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2 = m^2}$$

bestimmt wird.

Die gleichen Betrachtungen liefern für den Propagator des Spinorfeldes völlig analog

$$\tilde{G}^{-1}(\hat{p} = \tilde{m}) = m(1 - b) - \tilde{m}(1 + a) - \Gamma_2^{\text{endl}}(\tilde{m}) = 0, \tag{28.4b}$$

$$\tilde{m} = m + \Delta m, \qquad \Delta m = -\frac{a + b}{1 + a} m - \frac{\Gamma_2^{\text{endl}}(\tilde{m})}{1 + a}, \tag{28.5b}$$

$$\tilde{G}(\hat{p})|_{\hat{p} \approx \tilde{m}} \simeq \frac{Z_2}{\tilde{m} - \hat{p}} \tag{28.6b}$$

und

$$Z_2^{-1} = 1 + a + \Gamma_2'^{\text{endl}}(\tilde{m}).$$

Wir ersehen hieraus, daß in beiden Fällen letztlich die zwei freien endlichen Konstanten in die Renormierung der Masse und in die Renormierung Z_2 des Propagators (d. h. in die Renormierung des Feldoperators) eingehen.

Hierbei gibt es eine einfache Analogie dieser Renormierungsprozedur und der bei ihr auftretenden Willkür zur Einführung endlicher Konterterme in die Lagrange-Dichte, die in Abschnitt 25.3. betrachtet wurde.

Beim skalaren Feld handelt es sich um die Konterterme

$$\Delta \mathscr{L} = \frac{Z_2 - 1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{(Z_2 Z_m - 1)\, m^2}{2}, \qquad Z_m m^2 = \tilde{m}^2 \tag{28.7a}$$

und beim Spinorfeld um

$$\begin{aligned} \Delta \mathscr{L} &= \mathrm{i}(Z_2 - 1)\, \bar{\psi}\, \hat{\partial} \psi - (Z_2 Z_m - 1)\, m \bar{\psi} \psi, \\ Z_m m &= \tilde{m}. \end{aligned} \tag{28.7b}$$

Im weiteren beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Betrachtung des zweiten Falles. In Analogie zum Abschnitt 25.3. stellt man leicht fest, daß sich der Einfluß der Konterterme (28.7b), die wir zu diesem Zweck in der Form

$$\Delta \mathscr{L} = (Z_2 - 1)\, \mathscr{L}_0 + Z_2(\tilde{m} - m)\, \bar{\psi} \psi,$$

$$\mathscr{L}_0 = \mathrm{i} \bar{\psi}\, \hat{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi, \qquad \tilde{m} = Z_m m,$$

darstellen, auf eine multiplikative Renormierung der Feldfunktion

$$\psi \to \psi' = \sqrt{Z_2}\, \psi$$

sowie auf eine Verschiebung der Masse

$$m \to m + (Z_m - 1)\, m,$$

die wir ebenfalls als multiplikative Transformation

$$m \to \tilde{m} = Z_m m$$

darstellen, zurückführen läßt. Infolgedessen renormiert sich der Propagator gemäß

$$G \to Z_2^{-1} G .$$

Gehen wir nun zu den höheren Green-Funktionen oder, genauer, zu den Vertexfunktionen über. Um immer ein konkretes Objekt vor Augen zu haben, betrachten wir die Vertexfunktion Γ_4 für die φ^4-Theorie und, parallel dazu, die Vertexfunktion Γ_3 für solche Theorien wie die Elektrodynamik, die eine Wechselwirkung von Bosonen und Fermionen beschreiben.

In renormierbaren Modellen, für die der maximale Divergenzindex eines jeden Vertex Null ist, hängen die Divergenzindizes der zu untersuchenden Vertexfunktionen nicht von der Ordnung der Störungstheorie ab; sie verschwinden ebenfalls. Damit ist in beiden Fällen die Willkür die gleiche (im Unterschied zu früheren Definitionen werden hier die nichttrivialen störungstheoretischen Beiträge zu Vertexfunktionen jetzt mit $\tilde{\Lambda}_i$ bezeichnet):

$$\tilde{\Lambda}_4(p_1, \ldots, p_4) = d + \Lambda_4^{\text{endl}}(\ldots p \ldots) , \tag{28.8a}$$

$$\tilde{\Lambda}_3(p_1, \ldots, p_3) = cO + \Lambda_3^{\text{endl}}(\ldots p \ldots) . \tag{28.8b}$$

Hierbei sind c und d willkürliche endliche Konstanten, O ist eine der Lorentzstruktur der 3-Punkt-Funktion entsprechende Matrix der Dirac-Algebra, und Λ_n ist die Summe der Strahlungskorrekturen, die zusammen mit den Beiträgen der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie die Vertexfunktionen Γ_n bilden.

So gilt beispielsweise im $h\varphi^4$-Modell

$$\Gamma_4^{\text{endl}} = h + \Lambda_4^{\text{endl}} , \tag{28.9a}$$

während in der Elektrodynamik

$$\Gamma_\mu^{\text{endl}} = e\gamma_\mu + (\Lambda_3^{\text{endl}})_\mu \tag{28.9b}$$

ist.

Die zugehörigen Konterterme haben folgende Form:
im φ^4-Modell

$$\Delta \mathcal{L} = (Z_1 - 1)\, h\varphi^4 ,$$

in der Elektrodynamik

$$\Delta \mathcal{L} = (Z_1 - 1)\, e\bar{\psi}\hat{A}\psi .$$

Sie führen zu einer multiplikativen Renormierung der stark zusammenhängenden Vertexfunktionen $\Gamma_4 \to Z_1\Gamma_4$, $\Gamma_\mu \to Z_1\Gamma_\mu$ und entsprechen einer endlichen Renormierung der Kopplungskonstanten h und e. Wie in Abschnitt 25.3. (siehe Formel (25.19)) gezeigt worden war, gibt auch die Renormierung der operatorwertigen Feldfunktionen einen Beitrag zur Renormierung der Kopplungskonstanten.

Damit führt eine Renormierung im φ^4-Modell durch die Konterterme

$$\Delta \mathcal{L} = (Z_1 - 1)\, h\varphi^4 + (Z_2 - 1)\, \mathcal{L}_0 - Z_2(Z_m - 1) \frac{m^2}{2} \varphi^2$$

zu folgender Transformation der Green-Funktionen:

$$\begin{aligned} &\Delta(h, m) \to Z_2^{-1}\Delta(\bar{h}, \bar{m}) \; , \\ &\Gamma_4(h, m) \to Z_1\Gamma_4(\bar{h}, \bar{m}) \; , \\ &\bar{h} = Z_1 Z_2^{-2} h \; , \qquad \bar{m} = Z_m m \; . \end{aligned} \tag{28.10}$$

Solche Transformationen tragen den Namen *Dyson-Transformationen.*

Vertexfunktionen mit mehr als vier äußeren Linien sollen hier nicht betrachtet werden, da ihnen in renormierbaren Modellen wegen (26.22) Diagramme entsprechen, die im ganzen konvergent sind (und höchstens divergente Subdiagramme mit weniger als fünf äußeren Linien haben); sie geben daher zu keinen neuen willkürlichen Konstanten Anlaß.

28.2. Das Theorem über die Renormierbarkeit

Die bisher geführten Diskussionen tragen noch immer schematischen Charakter. So blieb u. a. das Problem der divergenten Subdiagramme eines gegebenen Diagramms, wie auch die Frage nach der Willkür bei der Renormierung, unbeantwortet.

Wir illustrieren dies am Beispiel eines Beitrags fünfter Ordnung zur Vertexfunktion Γ_4 im skalaren φ_4-Modell, der in Abb. 28.1 dargestellt ist. Bei der Berechnung dieses Diagramms hat man das quadratisch divergente Selbstenergie-Subdiagramm (Abb. 28.1b)) und das logarithmisch divergente Subdiagramm der 2-Teilchen-Streuung (Abb. 28.1b)) zu berechnen. Deshalb hängt der zweite Term auf der rechten Seite von Formel (28.8a) sowohl von den willkürlichen Konstanten a und b, die mit (28.2) eingeführt wurden, als auch von der Konstanten d ab.

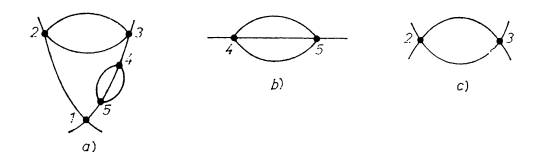


Abb. 28.1
Ein logarithmisch divergentes, skalares Diagramm fünfter Ordnung (a) und seine divergenten Subdiagramme (b) und (c)

Der beschränkte Umfang und das Ziel dieser Darlegung erlauben es nicht, auf die Details dieser wichtigen Fragen einzugehen. Wir verweisen den interessierten Leser bezüglich weiterer Einzelheiten auf die Spezialliteratur (z.B. [1], Kapitel V und [25], Kapitel II und III). Hier bemerken wir lediglich, daß der allgemeine Beweis der Renormierbarkeit der Störungstheorie Inhalt des *Theorems über die Renormierung* (Theorem von Bogoljubov und Parasjuk) ist, und daß die sogenannte *Bogoljubovsche R-Operation* Grundlage eines konstruktiven Verfahrens zur eindeutigen Beseitigung der Divergenzen ist.

Bei der Handhabung der R-Operation besteht der wichtigste Aspekt in der Beachtung einiger einfacher Regeln, die die innere Konsistenz dieser Prozedur

garantieren. Danach hat man in jedem divergenten Diagramm die Substraktionen auf ein und dieselbe Weise durchzuführen, unabhängig davon, ob es sich um ein selbständiges Diagramm handelt oder um ein Subdiagramm in einem komplizierteren. So müssen die beiden freien Konstanten, welche bei der Bestimmung des endlichen Teils des „Nuß“-Diagramms im skalaren φ^4-Modell (vgl. Abb. 25.3) auftreten, auf ein und dieselbe Weise fixiert werden. Das trifft ebenso für die Berechnung des Beitrags zweiter Ordnung zum Propagator, wie auch für die Berechnung eines beliebig komplizierten Diagramms, etwa des Diagramms der Abb. 28.1a) zu.

Bei Einhaltung dieser Regeln gehen die dabei auftretenden freien Konstanten in die renormierten Vertexfunktionen und Matrixelemente in Form einer begrenzten Anzahl von Kombinationen

$$\tilde{m}_i = f_i(m, g; a, b, \ldots), \qquad \tilde{g}_k = \psi_k(m, g; a, b, \ldots)$$

ein; sie können mit den physikalischen Massen und Kopplungskonstanten identifiziert werden.

Auf diese Weise ist es möglich, konsequent in allen Ordnungen der Störungstheorie von den ursprünglichen Parametern (Massen und Kopplungskonstanten), die in die Lagrange-Dichte und in die Feynman-Regeln eingehen, zu neuen renormierten Parametern überzugehen:

$$\{g, m\} \rightarrow \{\tilde{g}, \tilde{m}\} . \tag{28.11}$$

Die renormierten Vertexfunktionen und die beobachtbaren Matrixelemente hängen dann nur noch von den renormierten Massen und Kopplungskonstanten und nicht mehr von den ursprünglichen Massen, Kopplungskonstanten oder den freien Parametern $a, b, c, \ldots$ direkt ab.

28.3. Renormierung auf der Massenschale

Nun beschreiben wir die für praktische Rechnungen bequemste Methode zur Fixierung der freien Parameter, die bei der Subtraktion der Divergenzen auftreten. Zunächst bemerken wir, daß man unter Beachtung der Formeln (28.5a) und (28.5b) die Parameter a und b stets so wählen kann, daß die Massenkorrektur verschwindet, d. h. die renormierte Masse mit der ursprünglichen zusammenfällt. Im Fall skalarer Felder hat man lediglich

$$m^2 b = -m^2 a - \Gamma_2^{\text{endl}}(m^2) \tag{28.12}$$

zu fordern. Setzt man diese Beziehung in (28.2a) ein, so ergibt sich

$$\tilde{\Gamma}_2(p) = a(p^2 - m^2) + \Gamma_2^{\text{endl}}(p^2) - \Gamma_2^{\text{endl}}(m^2) .$$

Wählt man jetzt die Konstante a so, daß die renormierte Vertexfunktion $\tilde{\Gamma}$ bei $p^2 = m^2$ eine Nullstelle zweiter Ordnung hat,

$$a = -\tilde{\Gamma}_2'^{\text{endl}}(m^2) = -\left.\frac{\mathrm{d}\Gamma_2^{\text{endl}}(p^2)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2}, \tag{28.13}$$

so ist nach (28.7) die Renormierungskonstante Z_2 des Feldoperators gleich Eins.

Es sei noch bemerkt, daß dieses durch (28.12) und (28.13) gegebene Rezept der Definition von Γ_2^{ren},

$$\Gamma_2^{\text{ren}}(p^2) = \Gamma_2^{\text{endl}}(p^2) - \Gamma_2^{\text{endl}}(m^2) - (p^2 - m^2)\,\Gamma_2'^{\text{endl}}(m^2)\,, \tag{28.14}$$

mit der Subtraktion der ersten beiden Terme der Taylor-Entwicklung der Funktion Γ^{endl} im Punkt $p^2 = m^2$, d. h. auf der Masseschale, übereinstimmt.

Ein derartiges Vorgehen (Subtraktionen auf der Masseschale) führt also dazu, daß sich die Masse und die Norm der Feldfunktion bei der Renormierung nicht ändern,

$$\tilde{m}^2 = m^2\,, \qquad Z_2 = 1\,,$$

was für praktische Rechnungen natürlich sehr bequem ist.

Für den Fall der Spinorfelder hat die entsprechende Formel die Gestalt

$$\Gamma_2^{\text{ren}}(\hat{p}) = \Gamma_2^{\text{endl}}(\hat{p}) - \Gamma_2^{\text{endl}}(m) - (\hat{p} - m)\,\Gamma_2'^{\text{endl}}(m)\,. \tag{28.15}$$

Hierbei wird die Funktion Γ_2^{endl}, die von der Matrix $\hat{p}$ und dem Skalar p^2 abhängt, vermöge der Identifikation $p^2 = (\hat{p})^2$ als Funktion von $\hat{p}$ allein betrachtet. In diesem Sinne ist auch die Ableitung im letzten Term auf der rechten Seite zu verstehen:

$$\Gamma'^{\text{endl}} = \frac{\partial}{\partial \hat{p}}\,\Gamma^{\text{endl}}\,.$$

Wie wir weiter unten im Abschnitt 29.4. zeigen werden, wird die Ableitung Σ' des Masseoperators des Elektrons im Punkt $\hat{p} = m$ unendlich. Dies ist eine sogenannte *Infrarotdivergenz*, die wegen des Verschwindens der Ruhmasse der Photonen auftritt und durch die Renormierung der UV-Divergenzen nicht erfaßt wird. Es ist deshalb im allgemeinen angeraten, die Subtraktion der Ableitung nicht auf der Masseschale, sondern in einem anderen Punkt $\hat{p} = p_*$ (z.B. $\hat{p} = 0$) durchzuführen. In diesem Falle hat Formel (28.15) die Gestalt

$$\Gamma_2^{\text{ren}}(\hat{p}) = \Gamma_2^{\text{endl}}(\hat{p}) - \Gamma_2^{\text{endl}}(m) - (\hat{p} - m)\,\Gamma_2'^{\text{endl}}(p_*)\,. \tag{28.16}$$

Bei dieser Variante der Subtraktion erfolgt die Renormierung des Spinorfeldes durch

$$Z_2^{-1} = 1 + \Gamma_2'^{\text{endl}}(m) - \Gamma_2'^{\text{endl}}(p_*)\,. \tag{28.17}$$

28.4. Die Nichteindeutigkeit der Vertex-Renormierung

Wir gehen jetzt zur Behandlung der Renormierung von Vertexfunktionen im φ^4-Modell über. Wie im Anhang VII. gezeigt wird, hängt die skalare Vertexfunktion $\Gamma_4(p_1, \dots, p_4)$ von sechs (linear unabhängigen) skalaren Variablen ab. Wir wollen sie jedoch als Funktion von sieben Variablen

$$\Gamma_4^{\text{endl}} = F\big(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2;\, s = (p_1 + p_2)^2, t = (p_1 + p_3)^2, u = (p_1 + p_4)^2\big) \tag{28.18}$$

schreiben und die lineare Gleichung zwischen ihnen explizit berücksichtigen (vgl. (A II.7)). Beim Übergang auf die Masseschale werden die ersten vier Variablen

fixiert, während die verbleibenden Variablen durch die Relation

$$s + t + u = 4m^2 \tag{28.19}$$

verknüpft sind.

Der Subtraktionspunkt der Vertexfunktion Γ_4 wird somit beim Übergang auf die Masseschale noch nicht eindeutig festgelegt. Die Willkür in der Wahl der beiden restlichen Parameter ist lediglich durch die Forderung der Abwesenheit eines Imaginärteils beschränkt. Wie in Abschnitt 26.2. gezeigt wurde, entspricht die freie Konstante d auf der rechten Seite von (28.8) dem Konterterm $d\varphi^4$ der Lagrange-Dichte und muß deshalb reell sein. Somit kann die Konstante d aus den Werten der Vertexfunktion

$$\Gamma_4^{\text{endl}}(s, u, t) = F(m^2, m^2, m^2, m^2, s, u, t) \tag{28.20}$$

in demjenigen Bereich ihrer Argumente s, t und u bestimmt werden, der durch die Bedingungen

$$s \leqq 4m^2\,, \qquad t \leqq 4m^2\,, \qquad u \leqq 4m^2 \tag{28.21}$$

gegeben ist. Die Herkunft dieser Bedingungen ist in Anhang VII. erklärt.

Als Subtraktionspunkt läßt sich ein Punkt wählen, der der *Reaktionsschwelle* in einem der Kanäle entspricht, z. B. der Punkt $s = 4m^2$, $u = t = 0$. Die Werte der Vertexfunktion und der Streuamplitude in diesem Punkt sind der sogenannten s-Wellen-Streulänge proportional und können im Experiment direkt gemessen werden.

Setzt man

$$\Lambda_4^{\text{reg}}(\ldots p \ldots) = \Lambda_4^{\text{endl}}(s, u, t) - \Lambda_4^{\text{endl}}(4m^2, 0, 0)\,, \tag{28.22}$$

so genügt die Vertexfunktion gemäß (28.9) der Beziehung

$$\Gamma_4^{\text{reg}}(4m^2, 0, 0; h) = h\,, \tag{28.23}$$

die als Definition der *renormierten Kopplungskonstanten* aufgefaßt werden kann.

Häufig wird stattdessen ein anderer, der sogenannte „symmetrische Subtraktionspunkt" $s = u = t = 4m^2/3$ verwendet. In diesem Falle gilt

$$\Lambda_4^{\text{reg}}(\ldots p \ldots) = \Lambda_4^{\text{endl}}(s, u, t) - \Lambda_4^{\text{endl}}\left(\frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}\right), \tag{28.24}$$

und

$$h = \Gamma_4^{\text{reg}}\left(\frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}; h\right). \tag{28.25}$$

Die Kopplungskonstanten (28.23) und (28.25) können ineinander umgerechnet werden. Wir bezeichnen mit Γ_4^{sym} die im symmetrischen Subtraktionspunkt renormierte Vertex-Funktion, die der Beziehung (28.25) genügt; die entsprechende Kopplungskonstante bezeichnen wir mit h^{sym}, d. h.

$$\Gamma_4^{\text{sym}}\left(\frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}; h^{\text{sym}}\right) = h^{\text{sym}}\,. \tag{28.26}$$

Die an der Schwelle subtrahierten Größen bezeichnen wir dagegen mit Γ_4^{schw} und h^{schw}

$$\Gamma_4^{\text{schw}}(4m^2, 0, 0, ; h^{\text{schw}}) = h^{\text{schw}}\,. \tag{28.27}$$

Dann gilt

$$\Gamma_4^{\text{schw}}\left(\frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}, \frac{4m^2}{3}, h^{\text{schw}}\right) = h^{\text{sym}} \tag{28.28}$$

und umgekehrt

$$\Gamma_4^{\text{sym}}(4m^2, 0, 0; h^{\text{sym}}) = h^{\text{schw}}. \tag{28.29}$$

29. Die Renormierung in der Elektrodynamik

29.1. Die Bedingung der Eichinvarianz

In der Quantenelektrodynamik spielt die Eichinvarianz eine entscheidende Rolle Wie in Abschnitt 4. gezeigt wurde, ändert sich bei einer Eichtransformation

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \tag{29.1}$$

der Potentiale das elektromagnetische Feld nicht.

Die Forderung nach Invarianz aller Elemente der S-Matrix bezüglich der Transformation (29.1) wird als Eichinvarianz der Streumatrix bezeichnet. Um diese Bedingung explizit formulieren zu können, stellen wir zunächst fest, daß bei der Transformation (29.1) mit einer beliebigen, infinitesimal kleinen Funktion f der Term n-ter Ordnung der S-Matrix

$$\int S_n(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

bis auf Beiträge höherer Ordnung (in f) gerade um

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \int \frac{\partial S_n}{\partial A_\mu(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i^\mu}\, dx_1 \dots dx_n$$

abgeändert wird. Nach partieller Integration erkennen wir unmittelbar, daß dieser Ausdruck verschwindet, wenn die Bedingung

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial S_n}{\partial A}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} \frac{\partial S_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial A_\mu(x_i)} = 0 \tag{29.2}$$

identisch erfüllt ist. Es läßt sich leicht zeigen, daß (29.2) auch die Invarianz der S-Matrix bei endlichen Eichtransformationen sichert.

Die Bedingung (29.2) kann man auch im Zusammenhang mit der formalen Definition der S-Matrix als zeitgeordnete Exponentialfunktion der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte stellen. Man findet dann (siehe beispielweise [1], §§ 28.2, 33.2 und 33.3), daß sich die Eichinvarianz der S-Matrix, die im Rahmen der Störungstheorie durch Feynman-Diagramme dargestellt wird, auf die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung für den Fermionenstrom in der Wechselwirkungsdarstellung zurückführen läßt.

Im weiteren wenden wir die Bedingung der Eichinvarianz auf die von Divergenzen freie, renormierte Streumatrix an, d. h., wir verstehen unter der Koeffizientenfunktion S_n diejenigen Ausdrücke, die man nach Subtraktion der Divergenzen erhält.

29.2. Die Eichtransformation des Photonpropagators

Falls wir die Funktion $f(x)$ auf der rechten Seite der Eichtransformation (29.1) als Funktion der operatorwertigen Potentiale A_μ betrachten, dann ergeben sich für die zeitgeordneten Kontraktionen der elektromagnetischen Potentiale Ausdrücke, die allgemeiner als die von uns in den Feynman-Regeln bisher verwendeten diagonalen Ausdrücke

$$\overline{A_\mu(k)\, A_\nu(q)} \equiv \langle \mathrm{T} A_\mu(k)\, A_\nu(q)\rangle_0 = \frac{-\mathrm{i} g_{\mu\nu}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\, \delta(k+q) \tag{29.3}$$

sind. Dazu betrachten wir nämlich eine Eichtransformation, welche die Potentiale A_μ, die der Bedingung (29.3) genügen, in die Potentiale

$$A'_\nu = A_\nu + k_\nu\big(kA(k)\big)\, \mathcal{F}(k^2)/k^2$$

überführt, wobei $\mathcal{F}$ eine beliebige c-Zahl-Funktion ist. Dann liefert die zeitgeordnete Kontraktion der neuen Operatoren A' den Ausdruck

$$\overline{A'_\mu(k)\, A'_\nu(q)} = \frac{1}{\mathrm{i}k^2}\left\{\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\, d_l(k^2)\right\}\delta(k+q)$$

mit

$$d_l(k^2) = \big(1 + \mathcal{F}(k^2)\big)^2\,. \tag{29.4}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite von (29.4) ist zum transversalen Projektionsoperator P^{T} und das zweite zum longitudinalen Projektionsoperator $P^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}$ proportional, die durch

$$P^{\mathrm{T}}_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \qquad P^{\mathrm{L}}_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{29.5}$$

gegeben sind. Aus der Eichinvarianz der S-Matrix folgt daher, daß deren Matrixelemente nicht von $d_l(k^2)$ abhängen dürfen.

Setzen wir $d_l = 0$, so erhalten wir aus (29.4) einen Ausdruck, der der Transversalitätsbedingung

$$k^\nu \overline{A^{\mathrm{T}}_\nu(k)\, A^{\mathrm{T}}_\mu(q)} = 0$$

genügt. Für $d_l = 1$ kommen wir zur gewöhnlichen diagonalen Kontraktion (29.3).

29.3. Der Photonpropagator mit Strahlungskorrekturen

In Abschnitt 24. sind die einfachsten 1-Loop-Diagramme der Elektrodynamik berechnet worden. Dabei hat sich gezeigt, daß dem Diagramm der Vakuumpolarisation in Abb. 24.1b), welche die niedrigste Näherung des Polarisationsoperators darstellt, das quadratisch divergente Integral $\Pi_{\mu\nu}$ (vgl. (24.7) und (24.8)) entspricht. Der endliche Teil dieses Integrals kann in Übereinstimmung mit (24.11) und (24.12) in der Form

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = a g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\left[b + I\left(\frac{k^2}{4m^2}\right)\right]\frac{1}{\pi} \tag{29.6}$$

geschrieben werden, wobei a und b freie endliche Konstanten sind. Das in (29.6) auftretende Integral

$$I(z) = 2 \int_0^1 \mathrm{d}x\, x(1-x) \ln [1 - 4x(1-x)\, z - \mathrm{i}\varepsilon]$$

kann gemäß (24.13) in die Gestalt

$$I(z) = -\frac{z}{3} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\sigma(1 + 1/2\sigma)}{\sigma(\sigma - z + \mathrm{i}\varepsilon)} \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

gebracht werden. Für große $|z|$ gilt daher

$$I(z) \to \tfrac{1}{3} \ln(-z) .$$

Wir wollen jetzt die Bedingung (29.2) zur Bestimmung der in $\Pi_{\mu\nu}$ eingehenden freien Konstante ausnutzen. Dazu bemerken wir, daß der Polarisationsoperator in $S_2(x, y)$ gerade in der Kombination

$$-\mathrm{i} :A^\mu(x)\, \Pi_{\mu\nu}(x-y)\, A^\nu(y):$$

eingeht. Demzufolge verlangt die Bedingung der Eichinvarianz

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \Pi_{\nu\mu}(x) = 0\,, \qquad k^\nu \Pi_{\nu\mu}(k) = 0\,. \tag{29.7}$$

Wenden wir nun auf Gl. (29.6) die zweite der Bedingungen (29.7) an, so folgt $a = 0$. Daher führt die Forderung nach Eichinvarianz auf eine rein transversale Gestalt des Operators der Vakuumpolarisation

$$\Pi_{\mu\nu}^{\mathrm{reg}}(k) = (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \left[b + I\left(\frac{k^2}{4m^2}\right)\right] \frac{\alpha}{\pi}\,. \tag{29.8}$$

Betrachten wir nun die durch $\Pi_{\mu\nu}$ hervorgerufene Strahlungskorrektur des Photonpropagators, den wir gemäß (29.4) in beliebiger Eichung aufschreiben:

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) - \frac{d_l}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} = -\frac{P_{\mu\nu}^{\mathrm{tr}} + d_l P_{\mu\nu}^{\mathrm{long}}}{k^2}\,. \tag{29.9}$$

Hierbei sind P^{T} und P^{L} die in (29.5) definierten Projektionsoperatoren. Entsprechend seiner Definition im Abschnitt 29.2. kann der Koeffizient d_l nur von k^2 abhängen. Wir werden uns allerdings von nun an auf den Fall $d_l = \mathrm{const}$ beschränken.

Zur Bestimmung der Strahlungskorrekturen zu (29.9) hat man in niedrigster Ordnung den Ausdruck $\mathrm{i}D_{\mu\sigma}(k)\, \Pi^{\sigma\varrho}(k)\, D_{\varrho\nu}(k)$ hinzuzufügen. Durch Einsetzen von (29.8) und (29.9) in den so entstehenden Ausdruck ergibt sich

$$D_{\mu\nu}(k, \alpha) = -\frac{d(k^2, \alpha)}{k^2} P_{\mu\nu}^{\mathrm{T}}(k) - \frac{d_l}{k^2} P_{\mu\nu}^{\mathrm{L}}(k) \tag{29.10}$$

mit

$$d(k^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{\pi}\left[I\left(\frac{k^2}{4m^2}\right) + b\right].$$



Abb. 29.1
Der Beitrag der Iteration des einfachsten 1-Loop-Diagramms zum Photonpropagator

Die Berücksichtigung wiederholter 1-Loop-Einsetzungen in den Photonpropagator gemäß Abb. 29.1,

$$D - D\Pi D + D\Pi D\Pi D - D\Pi D\Pi D\Pi D + \cdots ,$$

führt uns wieder auf den Ausdruck (29.10), wobei aber nun $d(k^2, \alpha)$ durch die geometrische Reihe

$$d(k^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{\pi}(I + b) + \frac{\alpha^2}{\pi^2}(I + b)^2 + \cdots$$

gegeben ist; deren formale Aufsummation liefert

$$d(k^2, \alpha) = \frac{1}{1 - \pi(k^2, \alpha)} \qquad (29.11)$$

mit

$$\pi(k^2, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi}\left[I\left(\frac{k^2}{4m^2}\right) + b\right].$$

An dieser Stelle sind folgende Bemerkungen angebracht: Erstens machen wir darauf aufmerksam, daß die Bedingung der Eichinvarianz zum Ausbleiben einer Renormierung der Photonmasse führt ($a = 0$). Jedoch bleibt der „Parameter der zweiten Subtraktion" b, der dem Parameter a in (28.2) entspricht, unbestimmt und gibt einen Beitrag zur Renormierung des transversalen Teils des elektromagnetischen Potentials. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $I(0) = 0$ ist (vgl. (24.13)), haben wir

$$d(0, \alpha) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\pi} b} = Z_3 .$$

In Analogie zu den in Vorlesung 28. geführten Diskussionen ist es bequem, die Konstante b gleich Null zu setzen. In diesem Falle wird der Photonpropagator auf der Masseschale des Elektrons nicht renormiert und gibt auch keinen Beitrag zum effektiven Wert der Kopplungskonstanten.

Zweitens merken wir an, daß Formel (29.11) von viel allgemeinerer Natur ist. Versteht man nämlich unter $\Pi_{\mu\nu}$ nicht nur das betrachtete Diagramm niedrigster Ordnung, sondern die Summe aller stark zusammenhängenden Polarisationsdiagramme der Abb. 29.2, so folgt wieder die Formel (29.11), in der $\pi(k^2, \alpha)$ jetzt durch

$$\pi(k^2, \alpha) = \frac{\alpha}{\pi} I + \alpha^2 I_2 + \alpha^3 I_3 + \cdots \qquad (29.12)$$

Abb. 29.2
Beiträge zum Polarisationsoperator

gegeben ist. Hierbei ist $I_n(k^2)$ der Betrag aller stark zusammenhängenden n-Loop-Diagramme mit der Normierung $I_n(0) = 0$, die sich in gleicher Weise wie oben ergibt. Auf der Masseschale gilt somit wieder

$$d(0, \alpha) = 1 \, .$$

Abschließend bleibt zu sagen, daß die in diesem Abschnitt betrachtete Strahlungskorrektur zweiter Ordnung, die die niedrigste Näherung des Effektes der Vakuumpolarisation ist, im ultravioletten Bereich für $|k^2/m^2| \gg 1$ dominiert. In diesem Grenzfall erhalten wir

$$\pi(k^2, \alpha) \to \frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln \frac{k^2}{m^2} + \text{const}\right)$$

und folglich

$$d(k^2, \alpha) \to \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln k^2} \, . \tag{29.13}$$

29.4. Der Elektronenpropagator mit Strahlungskorrekturen

Der Selbstenergieoperator des Elektrons Σ ist in zweiter Ordnung der Störungstheorie formal durch die Ausdrücke

$$\Sigma(x) = -\mathrm{i}e^2 \gamma^\nu S^c(x)\, \gamma^\mu D^c_{\nu\mu}(x) \tag{29.14a}$$

bzw.

$$\Sigma(p) = \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{d}k}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \left[P^{\mathrm{T}}_{\mu\nu}(k) + d_l P^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(k)\right] \gamma^\nu \frac{m + \hat{p} - \hat{k}}{m^2 - (p - k)^2} \gamma^\mu \tag{29.14b}$$

gegeben.

Wir geben hier ohne Rechnung das Resultat der Behandlung des im ultravioletten Bereich linear divergenten Integrals gemäß Abschnitt 28. an:

$$\Sigma^{\mathrm{reg}}(p) = \frac{\alpha}{4\pi}\left\{\frac{p^2 - m^2}{m^2}\left[-3mA(p^2) + d_l\left(\frac{p^2 + m^2}{p^2}\hat{p} - m\right)A(p^2) + d_l \hat{p}\frac{m^2}{p^2}\right] + c_1(\hat{p} - m) + c_2 m\right\} \tag{29.15}$$

mit

$$A(p^2) = \int\limits_0^1 \frac{m^2\, \mathrm{d}x}{xp^2 - m^2} = \frac{m^2}{p^2} \ln\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right).$$

Führt man die Subtraktionen auf der Masseschale durch, d. h., setzt man $c_2 = 0$, so folgt

$$\Sigma(m) = 0 \, . \tag{29.16}$$

Bei der Berechnung der Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma(p)}{\mathrm{d}\hat{p}} = \frac{\partial \Sigma(\hat{p}, p^2)}{\partial \hat{p}} + 2\hat{p}\, \frac{\partial \Sigma(\hat{p}, p^2)}{\partial p^2}$$

im Punkt $\hat{p} = m, p^2 = m^2$ stoßen wir jedoch auf die logarithmische Divergenz der Funktion $A(p^2)$. Diese Divergenz ist mit dem Verhalten des Integranden für kleine Werte des Impulses k, d. h. in der Nähe des Punktes $k_\mu = 0$, verbunden und heißt aus diesem Grunde *Infrarotdivergenz*. Ihrer physikalischen Herkunft nach ist sie auf das Verschwinden der Photonmasse und die Tatsache zurückzuführen, daß geladene Teilchen (z.B. Elektronen oder Positronen) eine beliebige Anzahl sehr weicher Photonen aussenden können. Wir werden diese wichtige Frage hier nicht ausführlicher diskutieren und verweisen den Leser auf die entsprechende Spezialliteratur (siehe beispielsweise [1], § 35.4, [3], § 17.10 und [2], §§ 29, 39).

Zur Überwindung dieser Schwierigkeiten eröffnen sich hier zwei unterschiedliche Wege. Der erste besteht darin, daß man dem Photon formal eine kleine Masse λ_0 zuschreibt. Führt man den entsprechenden Term $k^2 + i\varepsilon \to k^2 - \lambda_0^2 + i\varepsilon$ im Nenner des Integranden aus (29.14b) ein, so erhält man anstelle von $A(p^2)$ in (29.15) die Funktion

$$A(p^2, \lambda_0^2) = \int_0^1 \frac{dx(x-1)\, m^2}{(1-x)\,(m^2 - xp^2) + x\lambda_0^2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{m^2}{p^2} \ln\left(\dfrac{m^2 - p^2}{m^2}\right), & |p^2 - m^2| \gg \lambda_0^2\,, \\ \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{\lambda_0^2}{m^2}, & p^2 = m^2\,. \end{cases} \tag{29.17}$$

Jetzt ist es möglich, die Konstante c_1 aus der Bedingung

$$\left.\frac{\partial \Sigma(\hat{p})}{\partial \hat{p}}\right|_{\hat{p}=m} = \Sigma'(m) = 0 \tag{29.18}$$

zu bestimmen. Man erhält

$$c_1 = 2(3 - d_l)\, A(m^2, \lambda_0^2) - 2d_l\,. \tag{29.19}$$

In den endgültigen Ausdrücken für die beobachtbaren Übergangswahrscheinlichkeiten elastischer Prozesse spielt die Größe $|\lambda_0|$ die Rolle eines Parameters, der die Unbestimmtheit des Impulses der geladenen Teilchen beschreibt. Diese Unbestimmtheit ist mit der Möglichkeit der Emission weicher Photonen verbunden, die in einem gegebenen Experiment nicht registriert werden können (vgl. die oben zitierte Literatur).

Der andere Weg besteht darin, die zweite Subtraktion im Massenoperator des Elektrons nicht auf der Masseschale durchzuführen.

Wir setzen $c_2 = 0$ und schreiben (29.15) in der Form

$$\alpha \Sigma_2(\hat{p}) = (\hat{p} - m) \frac{\alpha}{4\pi} s(\hat{p})$$

mit

$$s(\hat{p}) = c_1 - 3\left(\frac{\hat{p} + m}{m}\right) A(p^2) + d_l \left[\frac{p^2 + \hat{p}m}{p^2} + \left(\frac{p^2}{m^2} + \frac{m\hat{p}}{p^2}\right) A(p^2)\right]. \tag{29.20}$$

Jetzt ist zu sehen, daß die Wahl

$$c_1 = -3 - d_l\,, \qquad s(0) = 0 \tag{29.21}$$

zu einem Elektronpropagator führt, der, mit Hilfe von (27.4) in die Gestalt

$$G(p) = \frac{1}{\mathrm{i}(m-\hat{p})}\left[1-\frac{\alpha}{4\pi}s(\hat{p})\right]^{-1} \tag{29.22}$$

gebracht, in der Umgebung der Masseschale sich wie

$$G(p)|_{\hat{p}\approx m} \approx \frac{1}{\mathrm{i}(m-\hat{p})}Z_2\,, \tag{29.23}$$

mit

$$Z_2^{-1} \approx 1 + \frac{\alpha}{4\pi}[2(3-d_l)\,A(m^2,\lambda_0^2) - 3 - d_l]$$

verhält.

29.5. Die Vertexfunktion und die Ward-Identität

Der Beitrag niedrigster, d. h. dritter Ordnung zur Vertexfunktion ist durch

$$\Gamma^\nu(x,z;y) = \mathrm{i}e^2\gamma_\mu S^c(x-y)\,\gamma^\nu S^c(y-z)\,\gamma_\sigma D^{\mu\varrho}(x-z;d_l)$$

bzw.

$$\Gamma^\nu(p',p;k=p'-p;d_l) = \frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}q\,D^{\mu\varrho}(p-q;d_l)\,\gamma_\mu S^c(q+k)\,\gamma^\nu S^c(q)\,\gamma_\sigma \tag{29.24}$$

gegeben, wobei die Bezeichnung der Impulse gemäß Abb. 29.3 erfolgt ist. Der Photonpropagator $D^{\mu\nu}$ ist durch (29.9) bestimmt. Wie man sich leicht überzeugt, divergiert das Integral (29.24) im ultravioletten Bereich logarithmisch.

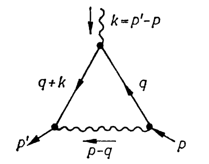


Abb. 29.3
Die Wahl der Impulsbezeichnungen im Integral (29.24)

Der Einfachheit halber geben wir hier den endlichen Teil der Vertexfunktion Γ^ν nicht in beliebiger Eichung des elektromagnetischen Potentials an. (Der entsprechende allgemeine Ausdruck ist z.B. in [1], § 35.3 zu finden.) Für unsere Zwecke ist der im Abschnitt 24.3. in diagonaler Eichung ($d_l = 1$) berechnete Ausdruck für Γ^ν völlig ausreichend.

Wir setzen

$$\Gamma_\nu^{\mathrm{reg}}(p',p;k;d_l=1) = c_3\gamma_\nu + \Gamma_\nu^{\mathrm{endl}}(p',p;k;\mu^2=m^2)\,, \tag{29.25}$$

wobei $\Gamma_\nu^{\mathrm{endl}}$ durch Formel (24.23) gegeben und c_3 eine freie Konstante ist. Diese Konstante ist jedoch nicht unabhängig wählbar, sondern kann mit Hilfe der Bedingung der Eichinvarianz (29.2) durch die Konstante c_1 in der Gleichung (29.15) für den Masseoperator ausgedrückt werden.

Zur Anwendung jener Bedingung auf die Terme dritter Ordnung der Streumatrix $S_3(x,y,z)$ ist es vorteilhaft, diese in zwei Gruppen einzuteilen. Zur ersten Gruppe zählen wir solche Terme, die das Produkt dreier Operatoren $A(x)$, $A(y)$ und

$A(z)$ enthalten und zur zweiten Gruppe alle diejenigen Terme, die linear in A sind. Auf Grund ihrer unterschiedlichen Operatorstruktur geben die Terme der ersten und der zweiten Gruppe Beiträge zu verschiedenen Matrixelementen, und die Bedingung der Eichinvarianz läßt sich für beide getrennt untersuchen. Betrachten wir diese Bedingung zunächst für die Diagramme der zweiten Gruppe. Der entsprechende Beitrag zu S_3 kann als Summe von drei Termen,

$$:A_\nu(x)\, J^\nu(x \mid y, z): + :A_\nu(y)\, J^\nu(y \mid z, x): + :A_\nu(z)\, J^\nu(z \mid x, y): ,$$

geschrieben werden, die sich nur durch eine Vertauschung der Integrationsvariablen unterscheiden. Die Eichinvarianzbedingung hat für sie die Form

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} J^\nu(x \mid y, z) = 0 . \tag{29.26}$$

Diese Funktion J^ν enthält diejenigen Beiträge, welche den vier in Abb. 25.4 dargestellten Diagrammen entsprechen, und weitere vier Beiträge, die sich von diesen lediglich durch Vertauschung der Argumente z und y unterscheiden.

Zunächst bemerken wir hier, daß die Divergenz des Terms, der dem Diagramm der Abb. 25.4d) entspricht,

$$\Pi^{\nu\varrho}(x - z)\, D_{\varrho\mu}(x - y)\; :\bar{\psi}(y)\, \gamma^\mu \psi(y):$$

nach Abtrennung der Divergenzen wegen der für den endlichen Teil des Polarisationsoperators zu fordernden Bedingung (29.7) Null wird. Deshalb hat man nur die Summe der ersten drei Diagramme der Abb. 25.4 zu betrachten. Sie läßt sich in der Form

$$:\bar{\psi}(z)\, \Gamma_\nu(z, y; x)\, \psi(y): + :\bar{\psi}(z)\, \Sigma(z - y)\, S^c(y - x)\, \gamma_\nu \psi(x):$$
$$+ :\bar{\psi}(x)\, \gamma_\nu S^c(x - z)\, \Sigma(z - y)\, \psi(y):$$

schreiben. Die Anwendung der Operation $\mathrm{i}\partial/\partial x_\nu$ führt nach einigen Zwischenschritten, bei denen die Dirac-Gleichung für $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ sowie die entsprechenden inhomogenen Gleichungen für S^c Anwendung finden, auf den Ausdruck

$$\bar{\psi}(z) \left\{ \mathrm{i} \frac{\partial \Gamma_\nu(z, y; x)}{\partial x_\nu} + \Sigma(z - y)\, \delta(y - x) - \delta(x - z)\, \Sigma(z - y) \right\} \psi(y) .$$

Damit stellt aber die Bedingung der Eichinvarianz eine Verbindung zwischen den Beiträgen niedrigster Ordnung zur Vertexfunktion Γ_ν und zum Selbstenergieoperator Σ des Elektrons her

$$\mathrm{i} \frac{\partial \Gamma_\nu^{\mathrm{reg}}(z, y; x)}{\partial x_\nu} = \Sigma^{\mathrm{reg}}(z - y)\, \{\delta(x - z) - \delta(y - x)\} . \tag{29.27}$$

Gehen wir mit Hilfe der Formeln

$$\Sigma(y) = (2\pi)^{-4} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}py}\, \Sigma(p)\, \mathrm{d}p ,$$

$$\Gamma_\nu(z, y; x) = (2\pi)^{-8} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx + \mathrm{i}py - \mathrm{i}p'z}\, \Gamma_\nu(p', p; k)\, \delta(p + k - p')\, \mathrm{d}p'\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}k$$

zur Impulsdarstellung über, dann erhalten wir

$$k^\nu \Gamma_\nu(p', p; k) = \Sigma(p') - \Sigma(p); \qquad p' = p + k . \tag{29.28}$$

Diese Formel haben wir zunächst nur in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie bewiesen. Es läßt sich jedoch zeigen, daß eine analoge Beziehung auch für

die höheren Ordnungen gilt, die gliedweise die Beiträge zur Vertexfunktion

$$\Gamma^\nu(p', p; k \mid \alpha) = \gamma^\nu + \sum_{n \geqq 1} \Gamma^\nu_{(n)}(p', p; k)$$

mit denen zum Masseoperator $\Sigma_{(n)}$ für denselben Index n korreliert; dabei werden die entsprechenden Beiträge durch die stark zusammenhängenden Vertexdiagramme der Ordnung $2n + 1$ und die stark zusammenhängenden Selbstenergiediagramme des Elektrons der Ordnung $2n$ beschrieben.

Summieren wir die Beziehung (29.28) über alle n, so resultiert unter Berücksichtigung der Gleichung (27.4)

$$k_\nu \Gamma^\nu(p', p; k \mid \alpha) = G^{-1}(p; \alpha) - G^{-1}(p'; \alpha) . \tag{29.29}$$

Diese Formel ist unter der Bezeichnung *verallgemeinerte Ward-Identität* (Ward-Takahashi-Identität) bekannt.

Die Ward-Identität in der Form (29.28) verbindet die endlichen Teile der niedrigsten Strahlungskorrekturen (29.20) und (29.25); sie führt damit auf eine Beziehung zwischen den Konstanten c_1 und c_3, nämlich

$$c_3 = c_1 + 2 .$$

Die entsprechenden Rechnungen überlassen wir dem Leser.

Durch Gl. (29.29) wird ein Zusammenhang zwischen den freien endlichen Konstanten in den Kontertermen

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} = {} & (z_2 - 1)\, \mathcal{L}_0(\bar{\psi}, \psi) + z_2(z_m - 1)\, m\bar{\psi}\psi \\ & + (z_3 - 1)\, \mathcal{L}_0(H_{\mu\nu}) + (z_1 - 1)\, e\bar{\psi}\hat{A}\psi \end{aligned} \tag{29.30}$$

der Elektrodynamik hergestellt (hierbei ist $\mathcal{L}_0(\bar{\psi}, \psi)$ die freie Lagrange-Dichte des Spinorfeldes (5.5) und $\mathcal{L}_0(H_{\mu\nu})$ die transversale freie Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes (4.12)). Er hat die Form

$$z_2 = z_1 \tag{29.31}$$

und trägt den Namen Ward-Identität.

Der Ausdruck (29.30) enthält keinen Beitrag mit der Operatorstruktur $(\partial A)^2$. Das ist eine Folge der Eichinvarianz, derentwegen ein solcher Beitrag auf natürliche Weise nicht auftreten kann. Führt man ihn trotzdem per Hand ein, so bewirkt er lediglich eine Umdefinition des Parameters d_l in der elektromagnetischen Kontraktion.

Wir weisen besonders darauf hin, daß nur die Green-Funktion des Elektrons $G(p; \alpha, d_l)$ und die Vertexfunktion $\Gamma_\nu(p; k; \alpha, d_l)$, nicht aber der Polarisationsoperator $\Pi_{\mu\nu}(k, \alpha)$ des Photons vom Parameter d_l abhängen, wie das schon für die 1-Loop-Näherung gezeigt wurde.

Den Kontertermen (29.30) entsprechen in der Elektrodynamik folgende endlichen Dyson-Transformationen:

$$\begin{aligned} G(m, \alpha, \alpha d_l) &\to G' = z_2^{-1} G(\tilde{m}, \tilde{\alpha}, \alpha d_l) , \\ \Gamma_\nu(m, \alpha, \alpha d_l) &\to \Gamma'_\nu = z_1 \Gamma_\nu(\tilde{m}, \tilde{\alpha}, \alpha d_l) , \end{aligned} \tag{29.32}$$

$$\Pi(m^2, \alpha) \to \Pi' = z_3^{-1} \Pi(\tilde{m}^2, \alpha) , \tag{29.33}$$

$$\alpha \to \tilde{\alpha} = z_1^2 z_2^{-2} z_3^{-1} \alpha = z_3^{-1} \alpha$$

$$m \to \tilde{m} = z_m m .$$

Die Beschreibung realer Wechselwirkungen

30. Die elektromagnetischen Wechselwirkungen

Die bisher dargelegte störungstheoretische Beschreibung der Wechselwirkung von Quantenfeldern hat dann Erfolgschancen, wenn die Kopplung der Felder als schwach angesehen werden kann. Diese Eigenschaft kommt zweifellos der elektromagnetischen Wechselwirkung mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha = e^2/4\pi\hbar c \sim 10^{-2}$ als dimensionslosem kleinen Parameter zu.

Als einfachstes quantenfeldtheoretisches Modell kann daher die Theorie der Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit Spinorfeldern angesehen werden. Sie ist vor allem der Wechselwirkung von Elektronen und Positronen mit Photonen adäquat, da sich die Effekte der starken und schwachen Wechselwirkung dieser Teilchen in einem sehr breiten Energieintervall sogar in virtuellen Prozessen vernachlässigen lassen. Dieses Modell — die spinorielle Elektrodynamik —, im folgenden kurz als Elektrodynamik bezeichnet, betrachten wir nun in erster Linie.

30.1. Die Elektrodynamik

Im eigentlichen Sinne des Wortes beschreibt die Elektrodynamik solche Prozesse und Effekte, bei denen in den Anfangs-, End- und Zwischenzuständen Elektronen, Positronen und γ-Quanten auftreten. Zu diesen Prozessen gehören die Streuung von Photonen an Elektronen (Compton-Streuung), die Streuung von Elektronen an Elektronen (Møller-Streuung) sowie analoge Prozesse unter Beteiligung von Positronen, weiterhin die Erzeugung und Vernichtung von Elektron-Positron-Paaren, die Wechselwirkung von Elektronen mit einem äußeren Magnetfeld (anomales magnetisches Moment), die Bremsstrahlung von Elektronen im äußeren elektrostatischen Feld (z.B. im Feld des Atomkerns) und eine Reihe weiterer Prozesse, zu denen auch die rein elektromagnetischen Wechselwirkungen der Müonen und der Hadronen untereinander sowie mit Elektronen gehören. Wir werden diese Prozesse und Effekte nicht in aller Ausführlichkeit betrachten, sondern beschränken uns auf die Beschreibung ihrer allgemeinen Gesetzmäßigkeiten und auf einige wichtige Beispiele.

Die betrachteten Erscheinungen lassen sich bedingt in zwei Klassen einteilen. Zur ersten Klasse zählen wir die Prozesse, die sich in niedrigster störungstheoretischer Näherung auf die elektromagnetischen Effekte der nichtrelativistischen Quantenmechanik reduzieren und in diesem Rahmen als Wechselwirkung von Materie und Strahlung verstehen und berechnen lassen. Wir meinen hiermit solche Prozesse wie die Bewegung des Elektrons im Coulomb-Feld des Atomkerns, die Streuung von Licht an freien Elektronen, die Annihilation eines Elektron-Positron-Paares in zwei Photonen, die Bremsstrahlung des Elektrons im Feld des Atomkerns und einige andere. Allen diesen Prozessen ist gemeinsam, daß der wesentliche Beitrag zu den Matrixelementen von solchen Feynman-Diagrammen kommt, die

keine geschlossenen Linienzüge und damit keine Integrationen über virtuelle Impulse enthalten (sogenannte *Baum-* oder *tree-Diagramme*). Die entsprechenden Rechnungen wurden bereits Ende der zwanziger Jahre, unmittelbar im Anschluß an die Formulierung der Quantenmechanik, ausgeführt. Es ergab sich eine gute Übereinstimmung der theoretischen Rechnungen mit dem Experiment.

Ein Beispiel hierfür ist die in den Jahren 1929—30 von Klein, Nishina und Tamm abgeleitete Formel für den differentiellen Streuquerschnitt der Streuung eines Photons mit dem Impuls $\boldsymbol{k}_1$ und der Energie $k_1 = |\boldsymbol{k}_1|$ an einem ruhenden Elektron:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \cdot \frac{k_2^2}{k_1^2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \sin^2 \Theta \right). \tag{30.1}$$

Hierbei ist $r_0 = \alpha/m$ der sogenannte klassische Elektronenradius, Θ der Streuwinkel des Elektrons und k_2 die Energie des gestreuten Photons, die mit k_1 und Θ durch die Compton-Formel

$$k_2 = \frac{mk_1}{m + k_1(1 - \cos \Theta)}$$

verknüpft ist. Die Klein-Nishina-Tamm-Formel (30.1) entspricht dem Quadrat der Summe von Matrixelementen, die zu den beiden in Abb. 24.3 dargestellten Diagrammen zweiter Ordnung gehören.

Die Berechnung der Diagramme vierter Ordnung (siehe Abb. 24.4) stieß auf die bekannten Schwierigkeiten, die mit den UV-Divergenzen in Zusammenhang stehen. Zu ihrer Überwindung benötigte man zwei Jahrzehnte. Erst in der zweiten Hälfte der vierziger Jahre gelang es, die sogenannte kovariante Störungstheorie zu entwickeln, in deren Rahmen dann die Renormierungsprozedur formuliert wurde. Mit der Methode der Renormierung der Störungstheorie öffnete sich der Weg zur Berechnung von Korrekturen zur tree-Näherung. Die den Diagrammen vierter Ordnung entsprechende Strahlungskorrektur zur Formel (30.1) wurde 1952 von Brown und Feynman berechnet.

Zur zweiten Klasse zählen wir die Erscheinungen, die ihre Existenz ganz den Strahlungskorrekturen verdanken. Zu ihnen gehören die Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms, der Lamb-Shift, die Photon-Photon-Streuung und das anomale magnetische Moment des Elektrons.

Beispielsweise sind für die Photon-Photon-Streuung in niedrigster störungstheoretischer Ordnung sechs verschiedene Diagramme mit einem inneren Elektron-Loop zu berechnen (siehe Abb. 30.1).

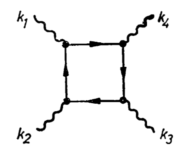


Abb. 30.1
Feynman-Diagramme der Photon-Photon-Streuung in niedrigster störungstheoretischer Ordnung. Die anderen 5 Diagramme entstehen durch die folgenden (zyklischen) Vertauschungen der Impulse k_i: (12), (13), (23), (123), (132)

30.2. Das anomale magnetische Moment des Elektrons

Bekanntlich enthält die Dirac-Gleichung für ein Elektron in einem äußeren elektromagnetischen Feld einen Term, der der magnetischen Wechselwirkung entspricht (vgl. A II.30). Dieser Term läßt sich aus einem Matrixelement ableiten, das

der Bornschen Wechselwirkung des Elektrons mit einem elektromagnetischen Feld $\boldsymbol{A}^{\text{ext}}$ von rein magnetischem Typ ($A_0^{\text{ext}} = 0$, $\boldsymbol{A}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{k} = 0$) entspricht.

Um dies zu erkennen, führen wir in dem Ausdruck

$$-e\bar{u}^{+,s}(\boldsymbol{p}')\,\gamma^\nu u^{-,s}(\boldsymbol{p})\,A_\nu^{\text{ext}}(\boldsymbol{k}) = e\bar{u}^{+,s}(\boldsymbol{p}')\,\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{A}^{\text{ext}}(\boldsymbol{k})\,u^{-,s}(\boldsymbol{p})\,, \qquad (30.2)$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}\,,$$

der in der Wechselwirkungsdarstellung gegeben ist, die zweikomponentige Darstellung der Spinoren und Matrizen gemäß (A II.22) und (A II.23) ein

$$u(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{p})\\ \chi(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}$$

und verwenden die freien Bewegungsgleichungen für die zweikomponentigen Spinoren φ und χ. Eliminieren wir die kleinen, „positronischen" Komponenten χ mit Hilfe der aus diesen Gleichungen folgenden Beziehungen

$$\chi(\boldsymbol{p}') = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}')}{2m}\varphi(\boldsymbol{p}')\,, \qquad \overset{*}{\chi}(\boldsymbol{p}') = \overset{*}{\varphi}(\boldsymbol{p}')\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}')}{2m},$$

so erhalten wir den Ausdruck (30.2) in der Form

$$e\big(\overset{*}{\varphi}(\boldsymbol{p}')\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{A}^{\text{ext}}\chi(\boldsymbol{p}) + \overset{*}{\chi}(\boldsymbol{p}')\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{A}^{\text{ext}}\varphi(\boldsymbol{p})\big)$$

$$= \frac{e}{2m}\overset{*}{\varphi}(\boldsymbol{p}')\,\big((\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{A}^{\text{ext}}(\boldsymbol{k}))\,(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}')\,(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{A}^{\text{ext}}(\boldsymbol{k}))\big)\,\varphi(\boldsymbol{p})\,.$$

Benutzen wir noch die Multiplikationsformeln (A II.28) für die Pauli-Matrizen, so ergibt sich schließlich

$$\frac{e}{2m}\overset{*}{\varphi}(\boldsymbol{p}')\,\big(\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}^{\text{ext}}(\boldsymbol{k})] + (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')\,\boldsymbol{A}^{\text{ext}}(\boldsymbol{k})\big)\,\varphi(\boldsymbol{p})\,.$$

Hier hat der erste Term die Form einer rein magnetischen Wechselwirkung

$$\frac{e}{2m}\overset{*}{\varphi}(\boldsymbol{p}')\,\boldsymbol{\sigma}\varphi(\boldsymbol{p})\cdot\mathrm{i}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}^{\text{ext}}(\boldsymbol{k})] = \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})\,,$$

wobei

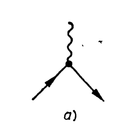
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}) = \mathrm{i}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}^{\text{ext}}(\boldsymbol{k})]\,, \qquad \boldsymbol{M}_0 = \mu_0\overset{*}{\varphi}\boldsymbol{\sigma}\varphi$$

gesetzt wurde und

$$\mu_0 = \frac{e}{2m} \qquad (30.3)$$

das Bohrsche Magneton ist.

Dem Ausdruck (30.2) entspricht das in Abb. 30.2a) dargestellte Diagramm der fundamentalen elektromagnetischen Wechselwirkung. Als Resultat der Strah-



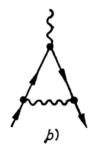


Abb. 30.2
Diagramme zum magnetischen Moment, die dem Bohrschen Magneton und der Schwinger-Korrektur entsprechen

lungskorrekturen ist der Ausdruck (30.2) jedoch durch

$$-e\bar{u}^{+,s}(\boldsymbol{p}')\,\Gamma^{\nu}_{\text{ren}}(p',p;k\,|\,\alpha)\,u^{-,s}(\boldsymbol{p})\,A^{\text{ext}}_{\nu}(k) \tag{30.2'}$$

zu ersetzen; das Matrixelement $\bar{u}\Gamma u$ kann in Analogie zu (24.24) in der Form

$$\begin{aligned}\bar{u}(\boldsymbol{p}')\,\Gamma^{\nu}u(\boldsymbol{p}) &= f_1(k^2,\alpha)\,\bar{u}(\boldsymbol{p}')\,\gamma^{\nu}u(\boldsymbol{p}) \\ &\quad + f_2(k^2,\alpha)\,\bar{u}(\boldsymbol{p}')\left[\frac{p^{\nu}+p'^{\nu}}{2m}-\gamma^{\nu}\right]u(\boldsymbol{p})\end{aligned} \tag{30.4}$$

dargestellt werden.

Jetzt brauchen wir nur noch zu berücksichtigen, daß nach (24.30) der zweite Term auf der rechten Seite dieser Gleichung für $k = 0$ verschwindet, um zu erkennen, daß sich die elektrische Ladung des Elektrons aus dem ersten Term bestimmt. Aus diesem Grund wird der Formfaktor f_1 gewöhnlich im Punkt $k = 0$ auf Eins normiert:

$$f_1(0,\alpha) = 1\,. \tag{30.5}$$

Diese Normierung läßt sich durch eine entsprechende Wahl jener unbestimmten endlichen Parameter erreichen, die bei der Subtraktion der UV-Divergenzen auftreten (z.B. durch die Wahl des Parameters μ in (24.23)). Die Normierung (30.5) entspricht der Definition der renormierten elektrischen Ladung e als jener Größe, welche die Kopplung des Elektrons an ein elektromagnetisches Feld verschwindend kleiner Frequenz beschreibt.

Aus der Normierung (30.5) folgt nun, daß das anomale magnetische Moment vollständig durch den zweiten Term auf der rechten Seite von Formel (30.4) bestimmt wird. Der Beitrag dieses Terms zu (30.2′) kann vermöge (24.30) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}&-\frac{e}{4m}f_2(k^2,\alpha)\,\bar{u}(\boldsymbol{p}')\left(\hat{A}^{\text{ext}}(k)\,\hat{k}-\hat{k}\hat{A}^{\text{ext}}(k)\right)u(\boldsymbol{p}) \\ &= -\frac{e}{2m}f_2(k^2,\alpha)\,\overset{*}{\varphi}(\boldsymbol{p}')\,\sigma\varphi(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{H}(k)\,.\end{aligned}$$

Nunmehr ist ersichtlich, daß die Größe $ef_2(0,\alpha)/2m$ die Strahlungskorrektur zum magnetischen Moment des Elektrons ist; letzteres läßt sich also in der Form

$$\mu = \mu_0\left(1+f_2(0,\alpha)\right) = \mu_0\left[1+\frac{\alpha}{\pi}a_2+\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 a_4+\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 a_6+\cdots\right]$$

schreiben.

Die erste Strahlungskorrektur zum Bohrschen Magneton

$$a_2 = \tfrac{1}{2}$$

entspricht dem Diagramm (Abb. 30.2b)) und den Rechnungen im Abschnitt 24.3., die erstmals 1948 von J. Schwinger ausgeführt wurden (siehe Übung M 5).

Zur Berechnung des nächsten Beitrages hatte man die fünf in Abb. 30.3 abgebildeten 2-Loop-Diagramme zu berücksichtigen. Die entsprechenden Rechnungen wurden von Petermann und Sommerfield Ende der fünfziger Jahre durchgeführt und ergaben

$$a_4 = \frac{197}{144}+\frac{\pi^2}{12}-\pi^2\ln 2+\frac{3}{4}\zeta(3) \approx 0{,}328479\,\dots\,. \tag{30.6}$$

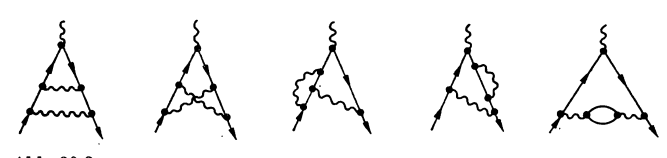


Abb. 30.3
2-Loop-Diagramme, die zum anomalen magnetischen Moment des Elektrons beitragen

Zur Bestimmung des Beitrages a_6 hat man vierzig verschiedene 3-Loop-Diagramme zu berücksichtigen. Ihre manuelle Berechnung ist auf Grund der ungewöhnlichen Länge der Ausdrücke faktisch unmöglich. Die erste Berechnung von a_6 im Jahre 1971 enthielt eine große Ungenauigkeit: $a_6 = 1{,}49 \pm 0{,}25$, die mit der genäherten numerischen Rechnung eines erheblichen Teils der Integrale verbunden ist. Im Laufe der folgenden Jahre gelang es, unter Verwendung von Datenverarbeitungsmaschinen für analytische Rechnungen, dreißig der vierzig 3-Loop-Diagramme vollständig zu berechnen. Das führte zu einer wesentlichen Erhöhung der Genauigkeit. Der gegenwärtige Wert von a_6 ist[1])

$$a_6 = 1{,}183 \pm 0{,}011 = 1{,}183(11)\,. \tag{30.7}$$

Bei der in (30.7) erreichten Genauigkeit der theoretischen Rechnungen erhält die exakte experimentelle Bestimmung der Feinstrukturkonstante größere Bedeutung. Der aktuelle Wert $\alpha^{-1} = 137{,}035987(29)$ ist für diesen Zweck hinreichend genau und ergibt, zusammen mit den Formeln (30.6) und (30.7), folgenden Wert für das anomale magnetische Moment:

$$(\mu/\mu_0)_{\text{theor}} = 1{,}00115965236(28)\,. \tag{30.8}$$

Dabei ist mehr als die Hälfte des Fehlers auf die experimentellen Ungenauigkeiten der Konstanten α zurückzuführen.

Der in den Jahren 1977–1981 von VAN DYCK, SCHWINBERG und DEHMELT bestimmte experimentelle Wert

$$(\mu/\mu_0)_{\text{exp}} = 1{,}001159652209(31) \tag{30.9}$$

stimmt mit dem theoretischen Wert (30.8) im Rahmen der erreichten Genauigkeit überein. Das hiermit erreichte Niveau der Übereinstimmung zwischen theoretischem und experimentellem Wert ($< 1 \cdot 10^{-10}$ in relativen Einheiten) ist bisher einmalig in der Physik.

30.3. Die Grenzen der Elektrodynamik

Das soeben demonstrierte Beispiel ist sehr eindrucksvoll. Bei anderen Effekten der Quantenelektrodynamik hingegen erreicht entweder das Experiment diese Genauigkeit nicht oder die theoretischen Betrachtungen weisen darauf hin, daß man über den Rahmen der reinen Elektrodynamik hinausgehende Effekte zu berücksichtigen hat.

---

[1]) Hier wurde die in Abschnitt 1. (siehe S. 18) eingeführte Darstellung der Fehler eines Zahlenwertes verwendet.

So ist beispielsweise der experimentelle Wert für die Hyperfeinstrukturaufspaltung des Wasserstoffniveaus $1S_{1/2}$, die durch die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Magnetfeld des Protons hervorgerufen wird, mit höchster Genauigkeit (bis dreizehn Stellen)

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{\mathrm{Hfs}}^{\mathrm{exp}} &= 1420{,}4057517864(17)\ \mathrm{MHz}\,, \\ \Delta\nu_{\mathrm{Hfs}}^{\mathrm{theor}} &= 1420{,}406(4)\ \mathrm{MHz} \end{aligned} \tag{30.10}$$

bekannt, die theoretischen Rechnungen liefern aber nur die ersten sieben Stellen, obwohl bereits der endliche Radius des Protons berücksichtigt ist.

Der Lamb-Shift, d. h. die Feinstrukturaufspaltung der Wasserstoffniveaus $2S_{1/2}$ und $1P_{1/2}$, ist mit einer Genauigkeit von der Größenordnung 10^{-6} bekannt,

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{\mathrm{Fs}}^{\mathrm{theor}} &= 1057{,}89(2)\ \mathrm{MHz}\,, \\ \Delta\nu_{\mathrm{Fs}}^{\mathrm{exp}} &= 1057{,}89(2)\ \mathrm{MHz}\,, \end{aligned} \tag{30.11}$$

wobei Effekte, die über den Rahmen der Elektrodynamik hinausgehen, die Größenordnung 10^{-5} haben und im theoretischen Wert berücksichtigt sind.

Insgesamt kann man sagen, daß sich die Gesamtheit der experimentellen Angaben für viele Effekte in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Störungstheorie der Elektrodynamik befindet, solange dabei entweder der Beitrag der starken Wechselwirkung gering ist oder sich anderweitig berechnen läßt.

Es gibt jedoch einen Bereich, in dem die Elektrodynamik prinzipiell nicht abgeschlossen ist. Hierfür gibt es zwei Gründe. Erstens beeinflußt die elektromagnetische Wechselwirkung der Hadronen die Elektrodynamik der Leptonen (der Elektronen-Positronen und der Müonen) über virtuelle Zwischenzustände. So geben in Prozessen, die über die 1-Photon-Annihilation ablaufen und die an den großen Beschleunigern mit Speicherringen untersucht werden, z. B.

$$\begin{aligned} &e^- + e^+ \to e^- + e^+\,, \\ &e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+\,, \end{aligned} \tag{30.12}$$

solche Feynman-Diagramme einen wesentlichen Beitrag, die in den virtuellen Photon-Linien Einsetzungen der hadronischen Polarisation des Photons (Abb. 30.4 und 30.5) enthalten. Auf Grund der Resonanzwechselwirkung zweier Pionen (ϱ-Resonanz) ist der Streuquerschnitt der Prozesse (30.12) bei Energien der

Abb. 30.4
Beitrag der „hadronischen Polarisation des Vakuums" zu Prozessen der Annihilation und Erzeugung von Leptonenpaaren

Abb. 30.5
Der Beitrag der Pionen- und Nukleonen-Loops zur „hadronischen Polarisation des Vakuums"

Größenordnung 700 bis 800 MeV im Schwerpunktsystem der Stoßpartner um mehr als eine Ordnung größer als der in der elektrodynamischen Störungstheorie berechnete Wert.

Zweitens enthalten die Strahlungskorrekturen, wie wir in den Vorlesungen 24. und 29. bereits für die niedrigsten Ordnungen sahen, logarithmisch wachsende Beiträge, die dem UV-Logarithmus $L = \ln (p^2/m^2)$ proportional sind. Die Analyse der höheren Strahlungskorrekturen zeigt, daß folglich das Produkt αL oder αL^2 zum tatsächlichen Entwicklungsparameter der Störungstheorie wird. In einigen Fällen (im Bereich hoher Energien) können die Terme der Form αL^2 oder αL einen wesentlichen Beitrag zum Streuquerschnitt der Prozesse sowie zu anderen beobachtbaren Größen liefern. Diese Beiträge sind zu berechnen, und die von ihnen herrührenden Korrekturen sind bei der Analyse von Prozessen zu berücksichtigen, die mit hinreichender Genauigkeit gemessen werden können. Insgesamt gesehen hat jedoch das Problem der Einbeziehung höherer Strahlungskorrekturen nach wie vor zumeist nur theoretische Bedeutung.

31. Die schwachen Wechselwirkungen

31.1. Die Fermi-Wechselwirkung

Die lokale (Kontakt-)Wechselwirkung von vier Fermionen ist spürbar schwächer als die elektromagnetische Wechselwirkung. Wie wir bereits in Abschnitt 10. feststellten, ist der aus der Fermischen Kopplungskonstanten G und der Protonmasse M_p gebildete dimensionslose Parameter um drei Größenordnungen kleiner als die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α.

Die einfachsten Beispiele der schwachen Wechselwirkung waren bereits im Abschnitt 10.1. genannt worden. Dort wurde gezeigt, daß die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte der Fermi-Wechselwirkung die Form eines Produkts „Strom × Strom“ hat

$$\mathscr{L}_I = \frac{G}{\sqrt{2}} j_\mu(x) \overset{+}{j}{}^\mu(x) , \tag{31.1}$$

wobei j_μ der in den Fermi-Feldern bilineare schwache Strom ist. Ausdrücke dieses Typs schlug Fermi 1934 zur Beschreibung des β-Zerfalls des Neutrons vor. Es dauerte jedoch über 30 Jahre, bevor die Struktur des schwachen Stroms (genauer, seines leptonischen Anteils) in allen Details aufgeklärt werden konnte.

Der schwache Strom j_ν ist eine Summe von quadratischen Termen folgender Struktur:

$$\overline{u}_i(x)\, O_\nu^{(i)} v_i(x) \tag{31.2}$$

(hier erfolgt keine Summation über i!), wobei die Feldoperatoren u_i und v_i im allgemeinen verschiedenen Teilchen entsprechen. Ein Teil dieser Terme enthält nur leptonische Felder und bildet den leptonischen Anteil des schwachen Stroms (kürzer: *leptonischer Strom*) l_ν. Die übrigen Terme enthalten hadronische Felder und bilden den (schwachen) *hadronischen Strom* h_ν, d. h., es gilt

$$j_\nu = l_\nu + h_\nu , \tag{31.3}$$

wobei jeder der beiden Terme eine Summe von Strukturen der Gestalt (31.2) ist. Beispiele solcher Konstruktionen wurden bereits in Gl. (10.12) angegeben.

Das Produkt zweier leptonischer Ströme bildet den leptonischen Anteil der Fermi-Lagrange-Dichte. Damit werden rein leptonische schwache Prozesse des Typs

$$\begin{aligned} &\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \,, \\ &\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^- \,, \\ &\bar{\nu}_e + e^- \to \bar{\nu}_e + e^- \end{aligned} \tag{31.4}$$

usw. beschrieben.

Die Produkte $h_\nu \overset{+}{l^\nu}$ leptonischer Ströme mit hadronischen entsprechen den sogenannten *semileptonischen Prozessen,* an denen sowohl Leptonen als auch Hadronen teilnehmen. Beispiele solcher semileptonischer Wechselwirkungen sind

$$\begin{aligned} &n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \,, \\ &\nu_\mu + n \to p + \mu^- \,, \\ &\Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}_e \,, \end{aligned} \tag{31.5}$$

und viele andere.

An den nichtleptonischen schwachen Wechselwirkungen schließlich, die den Produkten $h_\nu \overset{+}{h^\nu}$ entsprechen, nehmen nur Hadronen teil. Die entsprechenden realen Prozesse enthalten eine Kombination sowohl der starken, als auch der schwachen Wechselwirkung. Wichtige Beispiele hierfür sind die Zerfälle der Strangeness ($S \neq 0$) tragenden Hadronen

$$\begin{aligned} &K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \,, \\ &\Lambda^0 \to p + \pi^- \end{aligned} \tag{31.6}$$

und andere.

31.2. Die Struktur des schwachen Stromes

Die Struktur der Matrizen O, die in den schwachen Strom eingehen, wurde Mitte der fünfziger Jahre im Anschluß an die Entdeckung der Paritätsverletzung bei schwachen Wechselwirkungen geklärt. Es wurde festgestellt, daß sich der schwache Strom aus einem Vektorstrom V und einem Axial-Vektorstrom A zusammensetzt. Die Produkte von V mit A in der Lagrange-Dichte (31.1) führen zu Übergängen, in denen die Parität verletzt wird. Einer solchen Struktur des schwachen Stroms entsprechen im allgemeinen Fall Matrizen der Form

$$O_\alpha^{(i)} = \tfrac{1}{2}\gamma_\alpha(1 - g_i\gamma_5) \,, \tag{31.7}$$

wobei die g_i Konstanten sind. Unter Berücksichtigung der Hermitezität von γ_5 hat man diese Konstanten g_i reell zu wählen.

Das Experiment zeigt, daß für alle leptonischen Komponenten die Konstanten g_i gleich Eins sind. Dieser wichtigen Eigenschaft des leptonischen Stroms

$$l_\alpha = \tfrac{1}{2}\,\bar{e}(x)\,\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)\,\nu_e(x) + \tfrac{1}{2}\,\bar{\mu}(x)\,\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)\,\nu_\mu(x) + \cdots \tag{31.8}$$

entspricht die Eigenschaft der Neutrinos, lediglich zwei unabhängige Komponenten zu haben (vgl. Abschnitt 9.2.). Damit enthält der leptonische Anteil der Fermi-

Wechselwirkung nur einen Parameter G. Er kann aus der Lebensdauer des Müons bestimmt werden (siehe Übung E 4) und ist gleich

$$GM_p^2 \triangleq \frac{G}{\hbar c} \frac{M_p^2 c^2}{\hbar^2} = 1{,}0262(1) \cdot 10^{-5} \,. \tag{31.9}$$

Die hadronische Komponente hingegen hat eine etwas kompliziertere Struktur. So ist z.B. in der nukleonischen Komponente $\bar{p}O_\alpha n$ des hadronischen Stroms, die für den β-Zerfall des Neutrons verantwortlich ist, die Konstante $g_A = 1{,}25$. Sie wird aus der mittleren Lebensdauer des Neutrons mit Hilfe von (31.9) bestimmt.

Die Nichtdiagonalität des schwachen Stroms (vgl. Formel (31.2)) führt dazu, daß er die Quantenzahlen der Fermionen ändert: Er wandelt ein Neutrino in ein Elektron um, ein Neutron in eine Proton usw. Diese Ströme ändern auch die elektrische Ladung Q, weshalb sie *geladene Ströme* genannt werden. (In dieser Terminologie ist der gewöhnliche elektromagnetische Strom $j_\mu \sim \bar{e}(x)\,\gamma_\mu e(x)$ des Elektron-Positron-Feldes ungeladen, d. h. neutral.) Im hadronischen Anteil des schwachen Stroms gibt es auch Komponenten, die die Strangeness der Hadronen um Eins ändern; sie werden gewöhnlich mit h_α $(\Delta S = 1)$ bezeichnet. Damit kann der vollständige hadronische Strom als Summe

$$h_\alpha(\Delta S = 0) + h_\alpha(\Delta S = 1) \tag{31.10}$$

dargestellt werden. Dabei gilt für den zweiten Term

$$\Delta S = \Delta Q \,.$$

Im Jahre 1973 wurde auch die Existenz von *neutralen schwachen Strömen* j_α^0, die die elektrische Ladung nicht ändern, nachgewiesen. Das Produkt der neutralen Ströme geht additiv in die Lagrange-Dichte ein, d. h., der Ausdruck (31.1) ist durch

$$\mathscr{L}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} \, [j_\alpha(x) \, \overset{+}{j}{}^\alpha(x) + j_\alpha^0(x) \, \overset{+}{j}{}^{0\alpha}(x)] \tag{31.11}$$

zu ersetzen. Die neutralen Ströme lassen sich auch in Form einer Summe $j^0 = l^0 + h^0$ darstellen, wobei der leptonische Term eine verhältnismäßig einfache Struktur hat:

$$\begin{aligned} l_\alpha^0(x) &= \tfrac{1}{2}\, \bar{\nu}_e(x)\, \gamma_\alpha(1 - \gamma_5)\, \nu_e(x) + \tfrac{1}{2}\, \bar{\nu}_\mu(x)\, \gamma_\alpha(1 - \gamma_5)\, \nu_\mu(x) \\ &\quad + \bar{e}(x)\, \gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma_5)\, e(x) + (e \leftrightarrow \mu)\,; \end{aligned} \tag{31.12}$$

hierbei sind g_V und g_A Konstanten, die kleiner als Eins sind.

31.3. Die Nichtrenormierbarkeit und das Ultraviolett-Verhalten

Insgesamt gesehen befindet sich die Theorie der schwachen Wechselwirkungen in einer Lage, die sich mit der der Quantenelektrodynamik vor der endgültigen Formulierung des Renormierungsverfahrens vergleichen läßt.

Die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte ist bekannt und enthält eine nicht allzugroße Anzahl von Kopplungskonstanten, und die in der tree-Näherung berechneten Matrixelemente befinden sich in guter Übereinstimmung mit zahlreichen experimentellen Werten. In Prozessen, in denen die Effekte der starken Wechselwirkung keine Rolle spielen, sollte man daher hoffen, daß die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment durch Strahlungskorrekturen bestimmt wird, die elektromagnetischer Herkunft (von der Ordnung $\alpha/\pi \approx 1/1400$)

oder schwacher Herkunft (von der Ordnung $GM^2 \approx 10^{-5}$) sind. Jedoch sind wir nicht in der Lage, die von der schwachen Wechselwirkung herrührenden Strahlungskorrekturen zu berechnen.

Die Lagrange-Dichten (31.1) und (31.11) haben den Index $\Omega = +2$ und gehören somit nach der Klassifikation von Abschnitt 26.3. zum nichtrenormierbaren Typ. Diese Eigenschaft spiegelt sich in der dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten $[G] = [m]^{-2}$ und im potenzartigen Anwachsen der Matrixelemente im ultravioletten Bereich wider. So verhält sich beispielsweise der totale Streuquerschnitt der elastischen Streuung zweier Fermionen, der durch die schwache Wechselwirkung in erster Ordnung beschrieben wird, wie

$$\sigma(s) \sim G^2 s \ (s \gg m_i^2); \tag{31.13}$$

er wächst also mit der Gesamtenergie $W = \sqrt{s}$ im Schwerpunktsystem unbeschränkt an. Es ist auch zu erwarten, daß sich die von der schwachen Wechselwirkung herrührenden Strahlungskorrekturen zu beliebigen Prozessen ähnlich verhalten. Damit hängt die effektive, dimensionslose Kombination, welche die Konstante G enthält und die die Rolle des Entwicklungsparameters in der Störungstheorie zu spielen hat, von der Energie ab; sie ist durch

$$GW^2 = G \cdot s \tag{31.14}$$

gegeben. Aus dem Vergleich der Formeln (31.14) und (31.9) ist ersichtlich, daß bei Energien der Größe

$$W^* \simeq 10^{2,5} M_p \simeq 300 \text{ GeV} \tag{31.15}$$

die Fermi-Wechselwirkung aufhört, schwach zu sein. Diese Energie W^* wird manchmal Energie der *Unitaritätsschranke* genannt, weil bei diesen Energien auch die Unitarität der S-Matrix verletzt wird.

31.4. Die Hypothese der intermediären Bosonen

Die Strom $\times$ Strom-Kopplung der Fermi-Wechselwirkung läßt den Gedanken aufkommen, daß Ausdrücke der Gestalt (31.1) nicht fundamentale, sondern abgeleitete Strukturen seien, die auftreten, wenn die schwachen Ströme j über ein zwischengeschaltetes Feld miteinander wechselwirken.

Um diese Idee zu erklären, kehren wir zur Elektrodynamik mit

$$\mathscr{L}_{\text{QED}}(x) = eJ_\nu(x)\, A^\nu(x)$$

zurück und beschränken uns zeitweilig auf die Betrachtung von Anfangs- und Endzuständen, in denen keine Photonen auftreten. Damit kommen die Photonen nur in virtuellen Zuständen bzw. in den Feynman-Diagrammen als virtuelle Linien vor. Weiterhin beachten wir, daß virtuelle Photonen eine effektive Masse M haben, da für virtuelle Zustände $k^2 \neq 0$ gilt. Unter diesen Voraussetzungen kann man das elektromagnetische Feld formal aus der Behandlung der genannten Prozesse eli-

Abb. 31.1
Formale Beschreibung innerer Linien durch einen nichtlokalen effektiven Lagrangean

minieren, indem an seiner Stelle (siehe Abb. 31.1) eine nichtlokale effektive Lagrange-Dichte

$$e^2 J_\nu(x)\, D_M^{\nu\mu}(x-y)\, J_\mu(y) \to \mathscr{L}_{\text{eff}} = e^2 J_\nu(x) \int D_M^{\nu\mu}(x-y)\, J_\mu(y)\, \mathrm{d}y$$

eingeführt wird. Dabei haben wir in der Impulsdarstellung

$$D_M^{\nu\mu}(k) \sim \frac{g^{\nu\mu}}{M^2 - k^2}.$$

Sind nun alle uns interessierenden Impulse und Massen viel kleiner als die Masse M des „schweren intermediären Photons", so läßt sich k^2 auf der rechten Seite der letzten Beziehung im Vergleich zu M^2 vernachlässigen, und wir erhalten

$$D_M^{\mu\nu}(x-y) \to \frac{g^{\mu\nu}}{M^2}\delta(x-y)\,, \qquad \mathscr{L}_{\text{eff}}(x) \to \frac{e^2}{M^2} J_\nu(x)\, J^\nu(x)\,. \tag{31.16}$$

Damit führt das Bild eines intermediären Vektorfeldes mit großer Masse M zu einer „natürlichen" Erklärung der Dimension der Fermi-Konstante G und weckt die Hoffnung, daß eine renormierbare Theorie der schwachen Wechselwirkungen möglich ist. Es ist klar, daß man dabei von Anfang an anzunehmen hat, daß die Masse des intermediären Vektorbosons M wesentlich größer als die gegenwärtig erreichbaren Energien (gemeint sind die Energien im Schwerpunktsystem) der Leptonen zu sein hat. Damit müßte M in der Größenordnung einiger zehn, wenn nicht sogar einiger hundert GeV liegen.

Große Popularität genießt gegenwärtig eine Theorie der schwachen Wechselwirkung, die auf der Idee der intermediären Bosonen, als Quanten eines nichtabelschen Eichfeldes beruht. Es handelt sich um das Salam-Weinberg-Modell. Es hat eine recht komplizierte Struktur. Diese Kompliziertheit wird jedoch vollständig dadurch aufgewogen, daß das Modell außer einer renormierbaren Formulierung der schwachen Wechselwirkung auch noch organisch die elektromagnetische Wechselwirkung enthält. Damit wird es zu einer einheitlichen Theorie der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung.

32. Die Salam-Weinberg-Theorie

32.1. Die wichtigsten Eigenschaften

Wir wollen hier in allgemeinen Zügen das einheitliche Modell der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen vorstellen, das Ende der sechziger Jahre von Salam, Weinberg und Glashow vorgeschlagen wurde. Dieses Modell ist in vieler Hinsicht bemerkenswert:

Erstens enthält es ein auf der Yang-Mills-Theorie beruhendes Modell der schwachen Wechselwirkung der Leptonen, das im Bereich „hinreichend niedriger" Energien ($\lesssim 50$ GeV im Schwerpunktsystem) der Fermi-Wechselwirkung äquivalent ist. Die Universalität der Fermi-Konstante wird so auf natürliche Weise durch die Universalität der Kopplungskonstanten des Eichfeldes erklärt.

Zweitens vereinigt dieses Modell auf recht einfache Weise die schwache und elektromagnetische Wechselwirkung der Leptonen, und es gestattet vermöge der

Einführung nur eines Higgs-Bosons das Auftreten *massiver* intermediärer Bosonen infolge Symmetriebrechung.

Drittens hat dieses Modell die Existenz neutraler schwacher Ströme vorausgesagt, die dann auch experimentell gefunden wurden. Ferner verlangte die Renormierbarkeit der „Quark-Erweiterung" des Modells, d. h. jener Variante, die die schwache Wechselwirkung der Hadronen vermöge der Eichwechselwirkung der sie aufbauenden Quarks beschreibt, die Existenz eines vierten Quarks, das die neue Quantenzahl Charm trägt. Auch diese Vorhersage konnte im Experiment bestätigt werden.

Und schließlich hängen alle wesentlichen quantitativen Vorhersagen des Modells nur von drei Parametern ab: zwei universellen Kopplungskonstanten g und g_1 der Eichfelder und der Masse M_W der geladenen intermediären Bosonen $W^{\pm}$. Die Konstante e der elektromagnetischen Wechselwirkung und die Fermi-Konstante G_F drücken sich durch diese Parameter wie folgt aus:

$$e = \frac{gg_1}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}}, \qquad \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \tag{32.1}$$

Verwendet man für e und G_F die bekannten experimentellen Werte, so bleibt lediglich eine multiplikative Konstante unbestimmt. Gewöhnlich wird hierfür der sogenannte *Weinberg-Winkel*

$$\sin \Theta_W = \frac{e}{g} = \frac{g_1}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}} \tag{32.2}$$

gewählt.

Die Vorhersagen des Modells werden in der Regel durch die drei Größen $\alpha = e^2/4\pi$, G_F und Θ_W ausgedrückt. So läßt sich mit (32.1) und (32.2) die Masse des geladenen intermediären Mesons in folgender Weise nach unten abschätzen:

$$M_W = \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}\, G_F}\right)^{1/2} \frac{1}{\sin \Theta_W} = \frac{37{,}7\,\text{GeV}}{\sin \Theta_W} \geqq 37{,}7\ \text{GeV}\,. \tag{32.3}$$

32.2. Die Struktur des Boson-Sektors

Die Grundlage des Modells bildet die Hypothese von der Existenz zweier Eichfelder. Das eine von ihnen (A_a, $a = 1, 2, 3$) hat drei Komponenten und gehört zur adjungierten Darstellung der Gruppe SU(2) und das andere (B), dessen Eichgruppe die U(1) ist, hat nur eine Komponente. Damit ist die Eichgruppe des Salam-Weinberg-Modells die kompakte Gruppe SU(2) × U(1); die beiden zugehörigen Kopplungskonstanten werden mit g und g_1 bezeichnet. Die vier Vektor-Bosonen sind zur Beschreibung der drei intermediären Bosonen und des Photons notwendig. Von diesen vier Teilchen sind zwei geladen (die Komponenten A_1 und A_2) und zwei neutral (A_3 und B). Da die Felder A_3 und B die gleichen Quantenzahlen tragen, ist zwischen ihnen eine Mischung möglich. Tatsächlich zeigt sich, daß die physikalischen neutralen Vektorteilchen, d. h. das Photon und das massive Z-Meson, eine Superposition der Felder A_3 und B sind.

Um zu massiven Vektorbosonen zu kommen, wird der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung herangezogen (siehe Abschnitt 11.3.). Zu diesem Zweck hat man ein komplexes zweikomponentiges skalares Higgs-Feld $\tilde{\varphi}$ einzuführen; drei seiner vier Freiheitsgrade werden dafür verwendet, jedem der drei Vektor-Bosonen über den Higgs-Mechanismus einen zusätzlichen Polarisations-

zustand zu geben. Der verbleibende vierte Freiheitsgrad entspricht dem physikalischen massiven Higgs-Boson.

Der bosonische Sektor des Salam-Weinberg-Modells hat daher folgende Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + |D_\mu \tilde{\varphi}|^2 - \frac{\lambda^2}{4} (|\tilde{\varphi}|^2 - \eta^2)^2 . \tag{32.4}$$

Hierbei ist $F_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor des abelschen Eichfeldes

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu ,$$

$G_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor des nichtabelschen Eichfeldes

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g \varepsilon^{abc} A^b_\nu A^c_\mu .$$

Das Feld $\tilde{\varphi}$ ist bezüglich der Eichgruppe SU(2) ein komplexes Isodublett

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

und $D_\mu \tilde{\varphi}$ sind die kovarianten Ableitungen

$$D_\mu \tilde{\varphi}(x) = \left(\partial_\mu - \frac{ig}{2} \tau^a A^a_\mu - \frac{ig_1}{2} B_\mu \right) \tilde{\varphi}(x) . \tag{32.5}$$

Die spontane Symmetriebrechung wird durch eine „Verschiebung" der zweiten Komponente des Feldes $\tilde{\varphi}$ um eine reelle Konstante η realisiert.

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 + \eta \end{pmatrix} = \varphi + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im} \eta = 0 . \tag{32.6}$$

Durch diese Verschiebung gibt der Term $|D_\mu \tilde{\varphi}|^2$ folgenden Beitrag zur „Massematrix", d. h. zu denjenigen Termen der Lagrange-Dichte, die in den Komponenten A^a und B bilinear sind:

$$\frac{g^2 \eta^2}{4} [(A^1_\nu)^2 + (A^2_\nu)^2] + \frac{\eta^2}{4} [g A^3_\nu - g_1 B_\nu]^2 . \tag{32.7}$$

Dieser Term wird nun mittels einer linearen Transformation

$$(A^3_\nu, B_\nu) \to (Z_\nu, A_\nu)$$

diagonalisiert; dabei sind

$$Z_\nu = \frac{-g A^3_\nu + g_1 B_\nu}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}}, \qquad A_\nu = \frac{g_1 A^3_\nu + g B_\nu}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}} . \tag{32.8}$$

Mit den neuen Bezeichnungen

$$M_W = \frac{g\eta}{\sqrt{2}}, \qquad M_Z = \frac{\eta (g^2 + g_1^2)^{1/2}}{\sqrt{2}} = \frac{M_W}{\cos \Theta_W} \tag{32.9}$$

schreibt sich (32.7) in der Gestalt

$$M_W^2 \overset{*}{W^\nu} W_\nu + \tfrac{1}{2} M_Z^2 Z_\nu Z^\nu . \tag{32.10}$$

Hier sind zur Vereinfachung der Schreibweise neue komplex konjugierte Felder für die intermediären geladenen Mesonen eingeführt worden:

$$W_\nu^\pm = \frac{A_\nu^1 \mp iA_\nu^2}{\sqrt{2}}, \qquad W_\nu \equiv W_\nu^- , \qquad \overset{*}{W}_\nu = W_\nu^+ . \tag{32.11}$$

Mit Hilfe der Darstellung

$$\varphi_1(x) = \frac{\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_2(x) = \frac{\sigma(x) + i\Phi_3(x)}{\sqrt{2}}$$

für die Komponenten des Dubletts φ formen wir den letzten Term in der Lagrange-Dichte (32.4) in

$$-\frac{\lambda^2}{16}(\Phi^2 + \sigma^2)^2 - \frac{\lambda^2\eta}{2\sqrt{2}}\sigma(x)\,(\Phi^2 + \sigma^2) - \frac{\lambda^2\eta^2}{2}\sigma^2(x)$$

mit $\Phi^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2$ um. Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich, daß das Feld σ die Masse

$$m_\sigma = \lambda_\eta \tag{32.12}$$

hat, und daß die Φ_a Goldstone-Felder sind. Durch eine Eichtransformation lassen sie sich beseitigen, wobei die drei Komponenten des nichtabelschen Eichfeldes eine zusätzliche Polarisationskomponente erhalten (Higgs-Effekt), und der letzte Term von (32.4) wird in

$$-\frac{g^2}{32}\frac{m_\sigma^2}{M_W^2}\sigma^4(x) - \frac{gm_\sigma^2}{4M_W}\sigma^3(x) - \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma^2(x) \tag{32.13}$$

übergeführt.

32.3. Der Fermion-Sektor

Es ist bekannt, daß die Parität bei schwachen Wechselwirkungen verletzt wird und daß rechtspolarisierte Neutrinos bisher in keinem Experiment beobachtet wurden; somit hat die Struktur des Fermion-Sektors in erster Linie diesen Eigenschaften der schwachen Wechselwirkung Rechnung zu tragen. Aus diesem Grunde wird die linkspolarisierte Komponente des Elektrons $e(x)$ mit dem Elektron-Neutrino $\nu_e(x)$ zu einem „linken" Dublett $L_{(e)}$ vereinigt; die rechtspolarisierte Komponente von $e(x)$ hingegen bildet ein „rechtes" Singlett $R_{(e)}$ bezüglich der Gruppe SU(2)

$$L_{(e)}(x) = \frac{1-\gamma_5}{2}\begin{pmatrix}\nu_e(x)\\ e(x)\end{pmatrix}, \qquad R_{(e)}(x) = \frac{1+\gamma_5}{2}e(x)\,. \tag{32.14}$$

Analoge Multipletts werden für das Müon und das Müon-Neutrino

$$L_{(\mu)}(x) = \frac{1-\gamma_5}{2}\begin{pmatrix}\nu_\mu(x)\\ \mu(x)\end{pmatrix}, \qquad R_{(\mu)}(x) = \frac{1+\gamma_5}{2}\mu(x)$$

sowie das Tauon und das Tauon-Neutrino eingeführt. Diese Struktur hat den Vorteil, daß man bezüglich der geladenen Komponenten der schwachen Ströme mit den zu Dubletts L vereinigten linken Komponenten der Leptonen auskommt.

Die Annahme, daß die linken Dubletts an der Wechselwirkung der Gruppe SU(2) × U(1) teilnehmen, die rechten hingegen nur mit der abelschen Untergruppe U(1) verknüpft sind, führt zu folgenden Termen in der Lagrange-Dichte:

$$\mathscr{L}_{\text{lep}}(x) = \mathrm{i}\bar{L}(x)\,\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{\mathrm{i}g}{2}\tau^a A^a_\mu - \frac{\mathrm{i}g_1}{2}B_\mu\right)L(x) + \mathrm{i}\bar{R}(x)\,\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}g_1 B_\mu)\,R(x)\,. \tag{32.15}$$

Hierbei haben wir die unteren Indizes (e), (μ) und (τ) an L und R nicht mitgeschrieben; über sie ist unabhängig zu summieren.

Eine direkte Einführung von Massetermen für die Leptonen

$$m(\bar{L}R + \bar{R}L)$$

würde die Eichinvarianz verletzen. Nimmt man jedoch an, daß die Multipletts L und R wie die Eichfelder A_μ und B_μ mit dem in (32.4) eingeführten skalaren Feld $\tilde{\varphi}$ wechselwirken, so erhalten sie durch die spontane Symmetriebrechung ebenfalls eine Masse.

Unter der Voraussetzung, daß der entsprechende Term der Wechselwirkung vom Yukawa-Typ ist,

$$-G[(\bar{L}(x)\,\tilde{\varphi}(x))\,R(x) + \bar{R}(x)\,(\overset{*}{\tilde{\varphi}}(x)\,L(x))]\,, \tag{32.16}$$

erhalten wir als Ergebnis der Verschiebung (32.6) des Feldes φ um die Konstante η folgende massiven leptonischen Terme in der Lagrange-Dichte

$$-m_e\bar{e}(x)\,e(x) - m_\mu\bar{\mu}(x)\,\mu(x)\,, \quad -m_\tau(\bar{\tau})(x)\,\tau(x)\,,$$

wobei

$$m_e = \eta G_e/2\,, \qquad m_\mu = \eta G_\mu/2\,, \qquad m_\tau = \eta G_\tau/2 \tag{32.17}$$

ist. Damit hat der vollständige, auf den Beiträgen (32.15) und (32.16) beruhende und in den Variablen W, A und φ geschriebene Ausdruck für den leptonischen Teil der Lagrange-Dichte die Form

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_{(e)}(x) + \mathscr{L}_{(\mu)}(x) + L_{(\tau)}(x) + \mathscr{L}^0_{\text{lep}}(x)\,. \tag{32.18}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{(e)}(x) = &-\frac{g}{2\sqrt{2}}[\bar{\nu}_e(x)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,e(x)\,W_\mu(x) + \bar{e}(x)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,\nu_e(x)\,\overset{*}{W}_\mu(x)]\\ &+\frac{gg_1}{(g^2+g_1^2)^{1/2}}\,\bar{e}(x)\,\gamma^\mu e(x)\,A_\mu(x) - \frac{G_e}{2}\bar{e}(x)\,e(x)\,\sigma(x)\\ &+\frac{(g^2+g_1^2)^{1/2}}{4}\Bigg[\bar{\nu}_e(x)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,\nu_e(x)\\ &-2\bar{e}(x)\,\gamma^\mu\left(\gamma^5 + \frac{g^2-3g_1^2}{g^2+g_1^2}\right)e(x)\Bigg]Z_\mu(x)\,,\end{aligned} \tag{32.19}$$

und $\mathscr{L}_{(\mu)}$ bzw. $L_{(\tau)}$ ergeben sich aus $\mathscr{L}_{(e)}$ durch die Substitution $e(x) \to \mu(x)$, $\nu_e \to \nu_\mu$ bzw. $e(x) \to \tau(x)$, $\nu_e \to \nu_\tau$. $\mathscr{L}^0_{\text{lep}}$ ist die freie Lagrange-Dichte der Felder $e(x)$, $\mu(x)$, $\tau(x)$, $\nu_e(x)$, $\nu_\mu(x)$: und $\nu_\tau(x)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^0_{\text{lep}}(x) = &\,\mathrm{i}\bar{\nu}_e(x)\,\hat{\partial}\nu_e(x) + \mathrm{i}\bar{\nu}_\mu(x)\,\hat{\partial}\nu_\mu(x) + \mathrm{i}\bar{\nu}_\tau(x)\,\hat{\partial}\nu_\tau(x) +\\ &+\bar{e}(x)\,(\mathrm{i}\hat{\partial} - m_e)\,e(x) + \bar{\mu}(x)\,(\mathrm{i}\hat{\partial} - m_\mu)\,\mu(x) + \bar{\tau}(x)\,(\mathrm{i}\hat{\partial} - m_\tau)\tau(x).\end{aligned} \tag{32.20}$$

Aus den Formeln (32.19) folgt, daß die Kopplungskonstanten der elektromagnetischen Wechselwirkung e und der schwachen Wechselwirkung G_{F} mit den Konstanten g, g_1 und M_{W} durch die Formeln (32.1) verbunden sind.

Wir weisen darauf hin, daß die Masse des Higgs-Bosons m_σ über (32.12) mittels der Parameter der Lagrange-Dichte ausgedrückt werden kann.

32.4. Die vollständige Lagrange-Dichte und die Quantisierung

Die Ergebnisse der vorangegangenen Betrachtungen führen zu dem Schluß, daß die vollständige klassische Lagrange-Dichte des Salam-Weinberg-Modells die Gestalt

$$\mathscr{L}_{\mathrm{SW}} = \mathscr{L}_{\mathrm{B}} + \mathscr{L}^0_{\mathrm{lep}} + \sum_{(i)} \mathscr{L}_{(i)} \tag{32.21}$$

hat; hierbei ist $\mathscr{L}_{\mathrm{B}}$ der durch (32.4) definierte bosonische Anteil, $\mathscr{L}_{(i)}$ sind die leptonischen Beiträge (32.19), und $\mathscr{L}^0_{\mathrm{exp}}$ ist die Summe der freien leptonischen Terme (32.20). Der erste Term $\mathscr{L}_{\mathrm{B}}$ hat die folgenden in W_ν, A_ν und σ quadratischen Terme:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^0_{\mathrm{B}}(x) = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 \\ &-\frac{m_\sigma^2}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \overset{*}{W}_\nu - \partial_\nu \overset{*}{W}_\mu)(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) \\ &+ M_{\mathrm{W}}^2 \overset{*}{W}_\nu W_\nu - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 + \frac{M_{\mathrm{Z}}^2}{2} Z_\nu Z_\nu\,.\end{aligned} \tag{32.22}$$

Dieser Ausdruck ist, zusammen mit der freien leptonischen Lagrange-Dichte $\mathscr{L}^0_{\mathrm{lep}}$ (32.20), der vollständige freie (genauer: bilineare) Teil der Salam-Weinberg-Lagrange-Dichte, die für die Konstruktion einer Störungstheorie in den Kopplungskonstanten g, g_1 und $G_{(i)}$ (oder in ihren Kombinationen) zu quantisieren ist.

Die Quantisierung einer abelschen singulären Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld ist in Abschnitt 8.5. und für ein nichtabelsches Feld in Abschnitt 19.4. beschrieben worden. Dort wurde gezeigt, daß die Feynman-Regeln für ein Yang-Mills-Feld zusätzliche Elemente enthalten, die durch das fiktive Hilfsfeld der Faddeev-Popov-Geister ausgedrückt werden können. Wir wollen die Quantisierungsprozedur hier nicht darlegen und verweisen den an Feynman-Regeln für das massive Yang-Mills-Feld interessierten Leser auf den Anhang VIII.

Es ist jedoch noch eine Bemerkung bezüglich der UV-Divergenzen angebracht. Das Salam-Weinberg-Modell hat eine recht komplizierte Struktur und enthält massive Vektorfelder. Die Propagatoren solcher Felder (siehe Gl. (18.14)) enthalten im Zähler ein Polynom zweiten Grades in den Impulsen und führen deshalb nach der Analyse von Abschnitt 26. zunächst zu nichtrenormierbaren UV-Divergenzen. Gleichzeitig enthält die ursprüngliche Lagrange-Dichte (32.4) vor der Verschiebung der skalaren Felder um eine Konstante masselose Vektorteilchen und ist, wie sich zeigen läßt, renormierbar. Da die ursprüngliche und die aus ihr durch Symmetriebrechung hervorgehende Lagrange-Dichte physikalisch äquivalent sind (sie unterscheiden sich nur durch die Wahl der Variablen), ist der Boson-Sektor des Modells renormierbar. Eine genauere Untersuchung zeigt (siehe z.B. die Kapitel IV. und V. in [22]), daß die eigentlichen Probleme für die Renormierbarkeit im Fermion-Sektor liegen. Sie hängen mit der Paritätsverletzung zusammen und offenbaren

sich in den sogenannten Dreiecks-Anomalien; die ihnen korrespondierenden anomalen Dreiecks-Diagramme enthalten drei innere Fermion-Linien, in den äußeren Linien Vektorbosonen und in den Vertizes den Faktor γ^5 (siehe die erste Zeile auf der rechten Seite von Gl. (32.19)). Die Divergenzen dieses Diagramms könnten nur unter Verletzung der Eichinvarianz renormiert werden. Sie lassen sich jedoch kompensieren.

Eine der möglichen Kompensationen steht mit der Quark-Erweiterung des Modells in Zusammenhang. Koppelt man nämlich an das beschriebene leptonische Salam-Weinberg-Modell die schwache Wechselwirkung der Hadronen vermöge Eichwechselwirkung der Quarkfelder an, so läßt sich die Renormierbarkeit des erweiterten Modells durch Erfüllung einer Balance-Bedingung zwischen den Leptonen und den Hadronen erreichen. Den vier Leptonen (e, μ, ν_e, ν_μ) müssen genau vier Quarks entsprechen. Eben diese Überlegungen, ergänzt durch einige qualitative physikalische Betrachtungen, führten zur Hypothese der Existenz eines vierten Quarks mit einer neuen Quantenzahl (Charm), die sehr schön durch die Entdeckung der Familie der ψ-Teilchen 1975 und der darauffolgenden Entdeckung von Mesonen mit von Null verschiedenem Charm bestätigt wurde.

32.5. Der physikalische Inhalt und der experimentelle Stand

Hier wollen wir eine kurze Zusammenfassung des physikalischen Inhalts und des experimentellen Standes des Salam-Weinberg-Modells geben.

Eine wesentliche Eigenschaft des Modells ist die Existenz neutraler Ströme (in Zusammenhang mit dem Auftreten des neutralen intermediären Bosons Z). Diese Ströme wurden 1973 in Experimenten zur Wechselwirkung von Neutrinos mit Nukleonen entdeckt. Die gemessenen quantitativen Charakteristika lassen sich gut mit den Vorhersagen des Modells für $\Theta_W \approx 30°$, $\sin^2 \Theta_W = 0{,}233 \pm 0{,}009$ vereinbaren. Dieser in erster störungstheoretischer Näherung bestimmte Wert ist noch durch die $0(\alpha)$-Strahlungskorrekturen zu ergänzen; für den renormierten Weinbergwinkel Θ_W^R ergibt sich

$$\sin^2 \Theta_W^R = 0{,}215 \pm 0{,}014\,. \tag{32.23}$$

Mit der effektiven Feinstrukturkonstante (siehe Anhang IX), die für Energien $m_W c^2$ den Wert $\alpha^{-1}(m_W) \pm 127{,}7$ annimmt, ergeben sich die Massen der intermediären Vektorbosonen aus (32.3) und (32.9) zu

$$m_W = (83{,}0 \pm 3{,}0)\ \mathrm{GeV/c^2}, \qquad m_Z = (93{,}8 \pm 2{,}5)\ \mathrm{GeV/c^2}\,. \tag{32.24}$$

Diesen Werten entspricht eine mittlere Reichweite der schwachen Wechselwirkung von $r_{\mathrm{schw}} = 3 \cdot 10^{-16}$ cm.

Um die mit der Existenz so schwerer Teilchen verbundenen Effekte direkt beobachten zu können, sind hinreichend hohe Energien der Beschleuniger erforderlich. So kann z. B. das neutrale Z-Boson durch e^+e^-- oder $p\bar{p}$-Streuung in einer Anlage mit gegenläufigen Strahlen erzeugt werden, wenn die Energie jedes der Strahlen 50 GeV erreicht. Tatsächlich konnten die intermediären Bosonen 1983 am $p\bar{p}$-Collider der CERN (Genf) über die Zerfälle $W \to l\nu$ bzw. $Z \to l^+l^-$ ($l =$ e, μ) nachgewiesen werden. Die (mittleren) beobachteten Massen

$$m_W = (82{,}1 \pm 1{,}7)\ \mathrm{GeV/c^2} \quad \text{und} \quad m_Z = (93{,}0 \pm 1{,}7)\ \mathrm{GeV/c^2}$$

und der zugehörige Wert $\sin^2 \Theta_W = 0{,}220 \pm 0{,}009$ stehen in ausgezeichneter Übereinstimmung mit den störungstheoretisch bestimmten Werten (32.23) und (32.24).

Das Salam-Weinberg-Modell darf somit in seinen Grundzügen als experimentell gut gestützt angesehen werden. Die experimentellen Daten liefern ferner für den Ausdruck $\varrho = m^2_W/m_Z^2 \cos^2 \Theta_W$ den Wert $\varrho = 1{,}000 \pm 0{,}036$, der unmittelbar mit dem Auftreten eines *Dubletts* skalarer Higgs-Felder ($\varrho = 1$) verknüpft ist. Die Masse m_σ des skalaren Higgs-Bosons bestimmt sich aus der Gleichung (32.12), die den freien Parameter λ enthält. Aus diesem Grunde kann die Masse m_σ hinreichend groß „gewählt" werden, so daß das Ausbleiben schwerer neutraler skalarer Bosonen in den Experimenten auch auf lange Sicht keinen Grund zur Beunruhigung geben muß.

33. Die starke Wechselwirkung

33.1. Einführung

Zur Beschreibung der Wechselwirkungen von Feldern waren in Abschnitt 10. die Lagrange-Dichten vom Yukawa-Typ in der pseudoskalaren (10.17) und in der pseudovektoriellen Variante (10.19) diskutiert worden. Bereits bei der Einführung der Pion-Pion-Wechselwirkung (10.22) wurde festgestellt, daß es keine ernstzunehmende Begründung dafür gibt, solche Ausdrücke als fundamental anzusehen. Sie sind als rein phänomenologische Konstruktionen zu betrachten, deren konkrete Form, einschließlich der Werte ihrer Kopplungskonstanten, aus dem Vergleich mit dem Experiment zu bestimmen ist. Versuche dieser Art wurden wiederholt, im wesentlichen in den fünfziger Jahren, unternommen. Dabei zeigte es sich, daß einige dieser Ansätze zu einer renormierbaren Störungstheorie führen. Das sind beispielsweise die Lagrange-Dichten (10.17) und (10.22) (wogegen die pseudovektorielle Yukawa-Wechselwirkung (10.19) nichtrenormierbar ist). Es gelang mit diesen Methoden jedoch nicht, zu irgendeiner befriedigenden quantitativen Beschreibung der starken Wechselwirkung zu kommen.

Ein recht einsichtiger, wenn auch nicht der einzige Grund für diese Mißerfolge besteht darin, daß die Kopplungskonstanten g und h, und somit auch die Entwicklungsparameter der Störungstheorie in den starken Wechselwirkungen, nicht klein gegen Eins sind. So ist z.B. die Kopplungskonstante g der pseudoskalaren Pion-Nukleon-Wechselwirkung des Yukawa-Typs, wenn man sie mit der Methode der Dispersionsrelationen (siehe unten Abschnitt 33.5.) abschätzt, gleich

$$\frac{g^2}{4\pi} \approx 15\,. \tag{33.1}$$

In den siebziger Jahren wurden solche Lagrange-Dichten (10.17) und (10.22) im Zusammenhang mit der Untersuchung des Quark-Modells der Hadronen zunehmend „unmodern". Die Anstrengungen der Theoretiker konzentrierten sich in letzter Zeit weitgehend auf das sogenannte Quark-Gluon-Modell, in dem die hypothetischen Quarks als „wirkliche fundamentale" Bestandteile der Hadronen eine grundlegende Rolle spielen. Die Quarkfelder sind dabei untereinander durch ein Eichfeld gekoppelt, dessen Quanten Gluonen genannt werden und die als Eichbosonen natürlich Vektorteilchen sind.

Die Eigenschaft, daß die Quark-Gluon-Wechselwirkung mit wachsender Energie schwächer wird und daß sich demzufolge die Quarks und Gluonen im ultravioletten

Limes wie quasifreie punktförmige Objekte verhalten, wird als asymptotische Freiheit bezeichnet (siehe unten Abschnitt 33.2.). In hochenergetischen, sogenannten tiefinelastischen Experimenten zeigen die Hadronen eine komplizierte Struktur und scheinen aus punktförmigen Teilchen, den Partonen, zu bestehen. Diese im Experiment beobachtete Erscheinung findet ihre natürliche Erklärung durch die asymptotische Freiheit. Die Rolle der Partonen übernehmen dabei die Quarks, die zu Beginn der sechziger Jahre im Rahmen der phänomenologischen Klassifizierung der Hadronen und ihrer Resonanzen auf der Grundlage einer unitären Symmetrie eingeführt wurden.

33.2. Das Quark-Modell

Dem von Gell-Mann und Zweig zu Beginn der sechziger Jahre vorgeschlagenen naiven Quark-Modell lag die (unitäre) Gruppe SU(3) als innere Symmetriegruppe zugrunde. Sie entstand aus der Isospingruppe SU(2) durch Hinzunahme einer neuen Quantenzahl, der Strangeness, und der zugehörigen Erzeugenden zur Lie-Algebra. Dieses Modell enthält drei Quarks (u, d, s) mit nicht ganzzahliger elektrischer und Baryonen-Ladungen. Die Quantenzahlen der Quarks sind in Tab. 33.1 dargestellt.

Tabelle 33.1
Die Quantenzahlen der Quarks

Quark	Q	I	I_3	S	C	B
u	$+2/3$	$1/2$	$+1/2$	0	0	0
d	$-1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	0	0
s	$-1/3$	0	0	-1	0	0
c	$+2/3$	0	0	0	1	0
b	$-1/3$	0	0	0	0	1

Q — elektrische Ladung, I — Isospin, I_3 — Projektion des Isospins, S — Strangeness, C — Charm, B — Beauty. Alle Quarks tragen Baryonenladung $A = 1/3$ und haben Spin $J = 1/2$.

In dieser Tabelle sind ferner die Quantenzahlen des in der Mitte der siebziger Jahre entdeckten vierten und fünften (c- und b-Quark) zu finden. Durch die Erhöhung der Anzahl der Quarks wurde die Gruppe SU(3) zur Gruppe SU(4) bzw. SU(5) erweitert. Die diesen Gruppen entsprechenden Symmetrien sind allerdings stark gebrochen, so daß nur wenige Schlußfolgerungen gezogen werden können. Die Quantenzahlen Isospin I, Strangeness S, Charm C, Beauty B (Truth T, die dem bisher noch nicht entdeckten sechsten Quark (t-Quark) entspricht), die die Quarks unterscheiden, tragen den Namen Flavour; die zugehörige unitäre Gruppe heißt Flavourgruppe.

Dieses naive Quark-Modell führte auf Schwierigkeiten, da die Quarks als Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ der Fermi-Statistik genügen. Dies steht im Widerspruch zu der Symmetrie des Grundzustandes eines aus drei Quarks bestehenden Systems. So sollte z.B. das Ω^--Hyperon mit Spin $\frac{3}{2}$, dessen Entdeckung einer der großen Erfolge des Quark-Modells war, aus drei s-Quarks mit parallel ausgerichteten Spins bestehen. Diese drei Teilchen würden sich somit im gleichen quantenmechanischen Zustand befinden, was dem Pauli-Prinzip widerspricht.

Dieses Problem konnte jedoch recht bald durch die Einführung einer weiteren Quantenzahl, der Farbe (Colour) der Quarks, gelöst werden. Damit kann sich jedes Quark in einem von drei Farbzuständen befinden. Als Farben wurden rot, gelb und blau gewählt, und zwar deshalb, weil es sich hierbei nach der Farbenlehre um drei Grundfarben handelt, deren Kombinationen alle anderen Farben liefern. Insbesondere ergibt die Mischung dieser Grundfarben zu gleichen Teilen weiß. In diesem Sinne besteht jedes Hadron aus drei verschiedenen Farben und erscheint farblos (weiß). Die entsprechenden Antiteilchen (Antiquarks) tragen die Komplementärfarben, so daß die Mesonen, die aus einem Quark und einem Antiquark bestehen, ebenfalls farblos (weiß) sind. Deshalb ist die Quantenzahl „Farbe" nicht direkt beobachtbar.

Jedes Quark u, d und s kann sich also in drei Farbzuständen (A = r, g, b) befinden, wobei sich das Triplett der entsprechenden Wellenfunktionen gemäß der fundamentalen Darstellung der Gruppe $SU_c(3)$ transformiert. Diese heißt im Unterschied zur ursprünglichen unitären Colour-Gruppe und trägt den unteren Index „c".

Es zeigt sich, daß die logarithmischen Beiträge der 1-Loop-Korrekturen zur ultravioletten Asymptotik der Propagatoren und Vertexfunktionen, die zu einer Renormierung der Kopplungskonstante führen (siehe Anhang IX.), ein dem „normalen" Fall entgegengesetztes Vorzeichen haben. Wir erinnern daran, daß in der Elektrodynamik nach (29.13) der Photon-Propagator und, wie sich zeigen läßt, auch die effektive Ladung des Elektrons (siehe (A IX.19)) im ultravioletten Bereich, d. h. bei kleiner werdendem Abstand, wachsen (siehe Abb. 33.1). Dies entspricht der normalen klassischen Abschirmung der elektrischen Ladung in einem Dielektrikum.

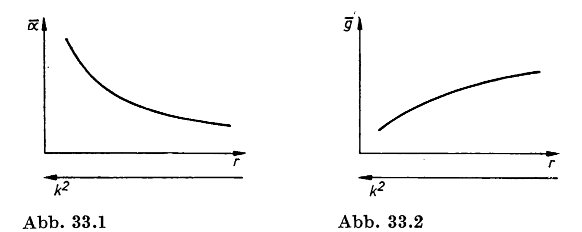


Abb. 33.1 Abb. 33.2

Abb. 33.1
Vakuumpolarisation in der Elektrodynamik, die zum Bild der „normalen Abschirmung" führt

Abb. 33.2
Verringerung der effektiven Wechselwirkung bei wachsendem Impuls in der nichtabelschen Eichfeldtheorie

Wird hingegen die Wechselwirkung nicht von einem Photon, sondern von einem Quant des nichtabelschen Eichfeldes übertragen, so ändert sich das Vorzeichen beim Logarithmus im Nenner und wird positiv. Die zu (29.13) äquivalente Formel hat dann die Form

$$\bar{\alpha}_s(k^2, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{1 + \beta_1 \alpha_s \ln k^2}. \tag{33.2}$$

Dabei ist

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} \tag{33.3}$$

das Analogon der Feinstrukturkonstante, g die Kopplungskonstante des nichtabelschen Eichfeldes und β_1 ein Zahlenfaktor, der vom Rang N der Eichgruppe und der Anzahl n der Materiefelder abhängt, mit denen das nichtabelsche Eichfeld in Wechselwirkung steht. Für die Flavourgruppe SU(3) gilt

$$\beta_1 = \frac{11 - 2n/3}{4\pi},$$

und bei nicht zu großer Anzahl n der Quarkfelder ist β_1 positiv ($n \leqq 16$).

Daraus folgt, daß die effektive Ladung $\bar{\alpha}_s$ im Limes $r \sim |k|^{-1} \to 0$ verschwindet und daß sich dadurch die Wechselwirkung faktisch selbst ausschaltet. Diese Eigenschaft trägt den Namen asymptotische Freiheit (siehe Abb. 33.2).

Diese Vorstellungen wurden zu Beginn der siebziger Jahre entwickelt und riefen großes Interesse hervor; sie sind mit der kurz zuvor experimentell entdeckten Parton-Struktur der Hadronen vereinbar und waren schließlich das entscheidende Argument für die Behauptung, daß die Eichfeldtheorien den einzig möglichen Schlüssel zum Verständnis der starken Wechselwirkungen liefern.

33.3. Die Quantenchromodynamik

Auf dieser Grundlage wurde in der ersten Hälfte der siebziger Jahre die Quantentheorie der Eichfelder für die starken Wechselwirkungen formuliert. Sie enthält das nichtabelsche Vektorfeld der Gruppe $SU_c(3)$, das die Wechselwirkung zwischen den Materiefeldern, d. h. den Quarkfeldern $q^A(x)$, $A = 1, 2, 3$, vermittelt. Diese Theorie der starken Wechselwirkungen erhielt den Namen *Quantenchromodynamik*. Die masselosen Quanten des Eichfeldes heißen *Gluonen*.

Die effektive Wechselwirkungs-Lagrangedichte L_{QCD} setzt sich additiv aus der effektiven Lagrangedichte (19.20) der acht farbigen Gluonfelder $B_\mu^a(x)$, $a = 1, 2, \ldots, 8$, und der zugehörigen Geisterfelder $\xi^a(x)$ und $\bar{\xi}^a(x)$, und, gemäß den Ausführungen des Abschnitts 11.2, aus der kovariant angekoppelten Diracschen Lagrangedichte der drei farbigen Quarkfelder $q^A(x)$, $A = 1, 2, 3$, zusammen:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{QCD}} = &-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{a}{2} (\partial^\mu B_\mu^a)^2 - \partial^\mu \bar{\xi} \partial_\mu \xi^a + i g t^{abc} \bar{\xi}^a B_\mu^b \partial^\mu \xi^c + \\ &+ \frac{i}{2} (\bar{\psi}^A \cdot \gamma^\mu \partial_\mu \psi^A - \partial_\mu \bar{\psi}^A \cdot \gamma^\mu \psi^A) - m \bar{\psi}^A \psi^A - g \bar{\psi}^A \gamma^\mu (t^a)^{AB} B_\mu^a \psi^B . \end{aligned} \tag{33.4}$$

Die Flavourquantenzahlen der Quarks wurden hierbei nicht explizit angegeben; werden sie berücksichtigt, so hat man die Masse m als Diagonalmatrix aufzufassen, deren nichtverschwindende Elemente durch die Massen m_u, m_d, ... usf. der Quarks gegeben sind. Die sich aus der Lagrangedichte (33.4) ergebenden Feynman-Regeln, die die Grundlage für störungstheoretische Überlegungen bilden, sind im Anhang VIII zusammengestellt, während die aus der Renormierung folgenden Besonderheiten im Anhang IX zu finden sind.

Vergleiche von störungstheoretischen Rechnungen der Quantenchromodynamik mit experimentellen Resultaten zeigen, daß der Entwicklungsparameter α_s im Energiebereich um 10 GeV von der Größenordnung 0,1 ist. Erinnert man sich dann, daß die Wechselwirkungskonstante $g_\pi NN$ der niederenergetischen Pion-Nukleon-

Wechselwirkung vom Yukawa-Typ um eine Größenordnung größer als Eins ist, so erscheint die relative Kleinheit von α_s, die einer hinreichend schwachen Bindung bei genügend großen Energien entspricht, recht bedeutsam. Sie rechtfertigt die Anwendung der renormierten Störungstheorie auf die Quantenchromodynamik.

Gleichzeitig stellt sich jedoch heraus, daß die direkte Verwendung störungstheoretischer Rechnungen in der Quantenchromodynamik bei der Beschreibung von Prozessen der starken Wechselwirkung auf Schwierigkeiten stößt. In erster Linie sind sie darauf zurückzuführen, daß α_s doch nicht „genügend" klein ist. Wie man sich leicht anhand von Gl. (33.2) überzeugt, ändert sich der Wert von $\bar{\alpha}_s(k^2, \alpha_s)$ bei einer entsprechenden Änderung von $\ln (k^2)$ wesentlich. Hier tritt letztlich eine neue Erscheinung zutage: Die durch die dimensionslose Kopplungskonstante beschriebene Wechselwirkung hängt in starkem Maße von der Wechselwirkungsenergie ab, d. h., die Wechselwirkungskonstante α_s ist durch eine dimensionslose Funktion

$$\alpha_s \rightarrow \bar{\alpha}_s(k^2, \alpha_s)$$

zu ersetzen, die wesentlich von der Impulsvariablen k^2 abhängt. Dabei stellt sich heraus, daß eine Verringerung von $|k|$ bis auf etwa 1 GeV zum Anwachsen von $\bar{\alpha}_s$ auf Werte von 0,3 bis 0,5 führt, so daß die zuvor schwache Bindung nunmehr stark wird. Damit ist der Bereich „kleiner" Energien $|k| \lesssim 1$ GeV selbst qualitativ nicht mit der Störungstheorie zu beschreiben. Insbesondere ist es bis heute nicht gelungen, das sogenannte „Confinement"-Problem zu lösen, d. h. eine aus der Dynamik folgende Erklärung für die Abwesenheit freier Quarks und Gluonen zu finden. Entsprechend einer dem Confinement zugrundeliegenden Hypothese sollte die Anziehungskraft zwischen den Quarks (und den Gluonen) mit zunehmender Entfernung unbeschränkt wachsen, wenn diese größer als 10^{-13} cm wird. Das soll die Existenz freier Quarks (und Gluonen) verhindern. Nach wie vor werden Anstrengungen unternommen, einen Zugang zum Confinement-Problem zu finden, der nicht auf Potenzreihenentwicklungen in α_s beruht und insbesondere Beiträge berücksichtigt, die bei $\alpha_s = 0$ nicht analytisch in α_s sind.

Aus diesem Grund gibt es keine quantitativen Aussagen über die Quarkstruktur der realen Hadronen, so daß die Analyse der hochenergetischen Prozesse (genauer der Prozesse mit großen Impulsüberträgen) in zwei Etappen erfolgen muß. Zunächst wird bei einer Reaktion von Hadronen der hochenergetische Subprozeß herauspräpariert, dessen virtuelle Streupartner (Quarks und Gluonen) große ($\gg 1$ GeV^2) Impulsquadrate haben. Eben dieser Subprozeß, der sich bei kleinen ($\lesssim 10^{-14}$ cm) Abständen abspielt, wird in der Quantenchromodynamik störungstheoretisch berechnet. In einigen Fällen läßt sich dann der Wirkungsquerschnitt des realen hadronischen Prozesses als Produkt von niederenergetischen, das Hadron charakterisierende Strukturfunktionen (die der Berechnung zur Zeit unzugänglich sind) und der berechenbaren hochenergetischen Parton-Wirkungsquerschnitte darstellen.

Beschränkt man sich ferner auf die Betrachtung der partonischen Subprozesse, so ist auch hierbei die theoretische Behandlung nicht trivial. Der Grund dafür ist darin zu sehen, daß im gegenwärtig experimentell zugänglichen Energiebereich und im Bereich der Impulsüberträge von $|k| \sim 10$ GeV die Korrekturen von höheren Feynman-Diagrammen, die sich durch Produkte wie $\beta_1 \alpha_s \ln k^2$ ausdrücken, von der Größenordnung Eins ($\gtrsim 0{,}1$) sind, d. h., es ist eine Berücksichtigung von Mehr-Loop-Beiträgen notwendig. In einer Reihe von Fällen lassen sich diese Bei-

träge recht effektiv durch die Methode der Renormierungsgruppe (siehe Anhang IX.) berücksichtigen. Trotzdem gibt es hier noch wichtige ungelöste Probleme.

Wir haben hier keinerlei Möglichkeit, tiefer in die Physik der starken Wechselwirkungen oder in die Details der Quantenchromodynamik einzudringen. Es sei lediglich bemerkt, daß nach den modernen Vorstellungen die Anwendung der in diesem Buch beschriebenen renormierten Störungstheorie in einigen physikalischen Situationen gerechtfertigt ist.

Aus dem Gesagten folgt, daß der Anwendungsbereich der renormierten Störungstheorie in natürlicher Weise auf Quantenfeldtheorien mit einer zahlenmäßig kleinen Kopplungskonstanten beschränkt ist. Es existieren jedoch noch weitere Einschränkungen.

33.4. Der Anwendungsbereich der Störungstheorie

Es stellt sich beispielsweise heraus, daß es auch bei zahlenmäßig kleinen Kopplungskonstanten Bereiche der kinematischen Variablen gibt, in denen die einzelnen Terme der Störungstheorie mit wachsender Ordnung nicht unbedingt kleiner werden. Wie weiter oben bei der Berechnung der 1-Loop-Korrekturen zum Propagator für große Werte der Impulse p (ultraviolette Asymptotik) gezeigt wurde, wachsen diese Korrekturen logarithmisch (siehe z.B. (24.6) oder (29.6)). Damit ist ihr eigentlicher Beitrag zum Propagator dem Produkt g^2L, d. h. dem Produkt des Quadrats der Kopplungskonstanten mit dem großen „ultravioletten" Logarithmus

$$L = \ln\left(\frac{p^2}{\lambda^2}\right)$$

proportional. Eine Analyse der höheren Strahlungskorrekturen zeigt, daß die n-Loop-Beiträge im ultravioletten Bereich wie $(g^2L)^n$ wachsen. Eine ähnliche Situation wird auch im Bereich kleiner Impulse (infrarote Asymptotik) für einige solcher quantenfeldtheoretischer Modelle beobachtet, die masselose Felder enthalten. So enthält beispielsweise in der Elektrodynamik die Strahlungskorrektur zum Elektronpropagator, die durch die Emission und Absorption des masselosen Photons hervorgerufen wird (siehe (29.17) und (29.20)), das Produkt αl, d. h. das Produkt der Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/4\pi$ mit dem „infraroten" Logarithmus

$$l = \ln\frac{m^2 - p^2}{m^2},$$

der bei der Annäherung des Elektronimpulses p an die Massenschale $(p^2 \to m^2)$ unbeschränkt wächst. Die höheren Strahlungskorrekturen enthalten den Faktor $(\alpha l)^n$.

Damit sind im ultravioletten bzw. im infraroten Bereich Produkte des Typs g^2L bzw. g^2l die eigentlichen Entwicklungsparameter der Störungstheorie. In diesen Bereichen wird der Gültigkeitsbereich der Störungstheorie selbst bei kleinen Werten der Kopplungskonstanten echt überschritten. Das hier Gesagte gilt nicht nur für die Propagatoren selbst, sondern auch für die höheren Vertexfunktionen.

Damit stellt sich die Aufgabe, derartige große Beiträge in allen Ordnungen zu berechnen und aufzusummieren. Diese Aufgabe läßt sich in einigen Fällen durch eine Vervollkommnung der Technik der Störungstheorie partiell lösen. Ein Beispiel hierfür ist (29.13) für die ultraviolette Asymptotik des Photonpropagators. Im

allgemeinen hat man jedoch Methoden heranzuziehen, die über die Störungstheorie hinausgehen oder sie nur teilweise benutzen (siehe unten Abschnitt 33.5.).

Somit ist der Anwendungsbereich der in diesem Buch dargelegten renormierten Störungstheorie von verschiedenen Seiten her eingeschränkt:

Zum ersten ist sie nur bei renormierbaren Wechselwirkungen anwendbar. Sie kann insbesondere nicht für die schwache Wechselwirkung vom Fermi-Typ verwendet werden (das wurde in Abschnitt 31.3. gezeigt), und gleichfalls ist sie untauglich für die Gravitationswechselwirkung (da der Spin des Gravitons gleich 2 ist und sein Propagator im ultravioletten Bereich wächst).

Zweitens kann in renormierbaren Quantenfeldtheorien die Störungstheorie nur für kleine Kopplungskonstanten verwendet werden. Dieser Bedingung genügen die Elektrodynamik und ihre Verallgemeinerung in Richtung der schwachen Wechselwirkungen wie das Salam-Weinberg-Modell.

Schließlich gibt es, wie eben gezeigt wurde, auch in renormierbaren Modellen mit kleinen Kopplungskonstanten kinematische Beschränkungen. Zu ihrer Überwindung werden verschiedene Verfahren und Methoden angewandt, die es wenigstens teilweise gestatten, den Rahmen der in diesem Buch dargelegten „Standard"-Störungstheorie zu erweitern.

33.5. Andere Methoden der Quantenfeldtheorie

Auf Grund der soeben dargelegten beschränkten Anwendbarkeit der Störungstheorie für reale Prozesse, insbesondere für Aufgaben der Hadron-Physik, gewinnen bestimmte erfolgreiche theoretische Wege zur Analyse der Teilchenphysik, die nicht direkt mit der Kleinheit der Kopplungskonstanten und mit Potenzreihenentwicklungen verbunden sind, große Bedeutung. Es haben sich drei Methoden dieser Art bewährt: die Methode der Dispersionsrelationen, die Methode der funktionalen (oder kontinuierlichen) Integration und die Methode der Renormierungsgruppe.

Die Methode der *Dispersionsrelationen* beruht auf der axiomatischen Formulierung der Quantenfeldtheorie, von der der Leser in den Abschnitten über die Streumatrix eine gewisse Vorstellung erhielt. Die in Abschnitt 15. formulierten Axiome wurden in Abschnitt 16. zur Entwicklung der Streumatrix nach Potenzen der als klein angenommenen Wechselwirkung, d. h. nach Potenzen einer (oder mehrerer) Kopplungskonstanten verwendet. Die hieraus resultierenden Ergebnisse erwiesen sich der iterativen Lösung der Schwinger-Gleichung äquivalent, wie wir in Vorlesung 14. dargelegt haben.

Eine etwas erweiterte Variante der Axiome der Vorlesung 15. (die Bogoljubovsche Axiomatik) wurde von einem der Autoren Mitte der fünfziger Jahre zur Begründung der Methode der Dispersionsrelationen (siehe Kapitel X. in [1]) verwendet. Das wesentliche Element für die strenge mathematische Ableitung war dabei die Formulierung der Kausalitätsbedingung in differentieller Form (15.16) sowie die Verbindung von Methoden aus der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher mit der Theorie verallgemeinerter Funktionen.

Die Dispersionsrelationen sind formal gesehen eine Anwendung des Cauchy-Theorems der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen auf die Streuamplitude $f(E)$, nachdem diese analytisch in die komplexe Ebene der Energievariablen $E \to E + iV$ fortgesetzt wurde. Gewöhnlich wird sie mittels einer

Integralrelation der Form

$$\operatorname{Re} f(E) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(E')}{E' - E} \mathrm{d}E' + \cdots$$

zwischen Real- und Imaginärteil der Zweiteilchen-Streuamplitude in Vorwärtsrichtung

$$f(E) = f(E, \Theta = 0) = \operatorname{Re} f(E) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(E)$$

formuliert; dabei kann jeder Teil über algebraische Beziehungen (vgl. die Formeln des Abschnitts 21.4.) durch zwei direkt meßbare Größen, den totalen Streuquerschnitt $\sigma(E)$ und den differentiellen Streuquerschnitt für den Streuwinkel Null $\mathrm{d}\sigma(E, \Theta = 0)/\mathrm{d}\Omega$, ausgedrückt werden. Die analytische Fortsetzung der Streuamplitude $f(E)$ in die komplexe Energieebene ist auf Grund der Kausalitätsbedingung möglich.

Die Dispersionsrelationen folgen streng aus den grundlegenden axiomatischen Annahmen der lokalen Quantenfeldtheorie und werden in der Form von Integral-Relationen bezüglich der Energievariablen zwischen beobachtbaren Größen formuliert. Diese Relationen bilden kein ausreichendes System zur theoretischen Bestimmung der in sie eingehenden Funktionen. Sie lassen sich jedoch direkt experimentell verifizieren und bilden eine Grundlage zur Ableitung strenger, qualitativer und approximativer Resultate.

In den vergangenen Jahrzehnten erfuhr die Methode der Dispersionsrelationen eine breite Entwicklung und war bis zum Beginn der siebziger Jahre das einzige Mittel zur quantitativen Analyse der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung der Hadronen.

Die Methode der *funktionalen Integration* beruht auf der Feynmanschen Formulierung der Quantenmechanik als Integral über Trajektorien (siehe [4], § 138). Die Übergangsamplituden und die Green-Funktionen werden dabei durch funktionale Integrale gegeben, die man sich als Grenzwerte mehrfacher Integrale (wenn die Anzahl der Integrationen gegen Unendlich strebt) vorstellen kann. Es erweist sich als möglich, für die Funktionalintegrale bestimmte Rechenregeln einzuführen und diese in einigen Fällen auch explizit auszurechnen. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt hat sich die Methode der funktionalen Integration als Methode zur Ableitung allgemeiner Ergebnisse der Quantenfeldtheorie empfohlen. So wurden z.B. mit dieser Methode die nichtabelschen Eichfelder quantisiert (vgl. [22]) und in sehr eleganter Weise die Formeln für die Eichtransformationen der Green-Funktionen in der Quantenelektrodynamik abgeleitet (siehe [1], Kapitel VIII.); auch eine Reihe anderer wichtiger Probleme wurden gelöst. In den letzten Jahren wurden auch einige interessante Eigenschaften hinsichtlich der Struktur der Störungsreihe im Ganzen (diese hat ihr Analogon in der Sattelpunktsmethode der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher), die auf einer genäherten Berechnung der Funktionalintegrale mittels der (funktionalen) Sattelpunktsmethode fußen, abgeleitet. Auf diesem Wege gelang es zu zeigen, daß die Reihen der quantenfeldtheoretischen Störungstheorie asymptotische Reihen sind (und demzufolge kein Konvergenzgebiet haben).

Die Methode der *Renormierungsgruppe* beruht auf dem Gruppencharakter endlicher Umrenormierungen der Green-Funktionen und der Kopplungskonstanten, die verschiedenen Möglichkeiten zur Beseitigung der Divergenzen entsprechen (z.B. verschiedenen Subtraktionspunkten in der R-Operation; vgl. Abschnitt 28.).

Die mathematische Formulierung der Gruppeneigenschaften (siehe Anhang IX.) führt auf funktionale Beziehungen, die die Green-Funktionen für verschiedene Renormierungsverfahren miteinander verbinden. Diese Differentialgleichungen, die den Lie-Gleichungen stetiger Transformationsgruppen entsprechen, erweisen sich als sehr bequem für die Untersuchung der ultravioletten und infraroten Asymptotik der Green-Funktionen, d. h. für die Analyse solcher Fälle, wo man, wie oben in Abschnitt 33.3. gezeigt wurde, den Rahmen der schwachen Kopplung verläßt.

Es ist bemerkenswert, daß hierbei, im Unterschied zur überwiegenden Mehrzahl der mittels Dispersionsrelationen oder funktionaler Integration erhaltenen Ergebnisse, die grundlegenden physikalischen Resultate durch eine Symbiose von störungstheoretischen Rechnungen und strengen Beziehungen der Renormierungsgruppe erhalten werden. Zu ihnen gehört die Eigenschaft der asymptotischen Freiheit einer Reihe quantenfeldtheoretischer Modelle, die Yang-Mills-Felder enthalten.

33.6. Schlußbemerkungen

Die in diesem Buch dargelegte Methode der renormierten Störungstheorie ist das grundlegende reguläre Arbeitsinstrument der Quantenfeldtheorie. Es ermöglicht es, zuverlässige quantitative Vorhersagen für eine große Anzahl physikalischer Erscheinungen des Mikrokosmos zu treffen. Die Prozedur der Beseitigung von Ultraviolett-Divergenzen mittels Renormierung ist ein wesentliches Element dieser Methode. Manchmal trifft man auf die Meinung, daß die Existenz dieser Divergenzen einen schwerwiegenden Defekt der Quantenfeldtheorie darstelle, der mit der mathematisch unbefriedigenden Operation der Renormierung „verdeckt“ werden muß.

Hierbei sind zwei Aspekte hervorzuheben. Das Vorhandensein der Ultraviolett-Divergenzen ist organisch mit der Lokalität der Quantenfeldtheorie verknüpft. Deshalb werden die Divergenzen und die Renormierung jede Modifikation der modernen Formulierung der Quantenfeldtheorie unausweichlich solange begleiten, wie ihr lokaler Charakter erhalten bleibt.

Andererseits ist die Prozedur der Renormierung gegenwärtig eine mathematisch strenge Operation, die nach einem Rezept auszuführen ist, dem die Theorie der verallgemeinerten Funktionen zugrunde liegt. Der physikalische Inhalt der Renormierung besteht darin, daß der Einfluß der „kleinen“ Abstände auf die Physik der „großen“ Abstände effektiv durch eine beschränkte Anzahl endlicher Parameter berücksichtigt werden kann.

Anhang

A I. Der Isospin-Formalismus

Der Isospin-Formalismus wurde von Heisenberg eingeführt, um die Unabhängigkeit der Kernkräfte von der elektrischen Ladung zu beschreiben. In diesem Formalismus werden das Neutron und das Proton als zwei verschiedene (Ladungs-)Zustände ein und desselben Teilchens (des Nukleons) betrachtet.

Die Nukleonwellenfunktion wird dabei bezüglich der Drehungen in einem fiktiven dreidimensionalen Raum, dem sogenannten Isospinraum, als zweikomponentiger Spinor (Isospinor) angesehen. Analog werden die Wellenfunktionen der anderen Ladungsmultipletts betrachtet. So wird z.B. das Triplett der Pionen π^+, π^0 und π^- durch drei Funktionen beschrieben, die einen dreikomponentigen Vektor (Isovektor) im Isospinraum bilden usw.

Die Invarianz bezüglich der Drehungen im Isospinraum entspricht physikalisch der Gleichberechtigung der Teilchen innerhalb eines Multipletts. Offensichtlich wird diese Gleichberechtigung durch die elektromagnetischen Wechselwirkungen verletzt. Ohne Berücksichtigung dieser Wechselwirkung ist jedoch die Isospin-Invarianz für die starke (Kern-)Wechselwirkung gültig.

Im weiteren geben wir die wichtigsten Formeln des Isospin-Formalismus für Nukleonen und Pionen an. Bezüglich Einzelheiten verweisen wir den Leser auf [21], Kapitel III.

1. Das Nukleonen-Dublett

Als erstes betrachten wir das Dublett der Nukleonen. Der entsprechende Spinor im dreidimensionalen Isospinraum hat zwei Komponenten, die den Wellenfunktionen ψ_{p} des Protons und ψ_{n} des Neutrons entsprechen:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{p}} \\ \psi_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}, \qquad \Psi^* = (\psi_{\mathrm{p}}^*, \psi_{\mathrm{n}}^*) \,. \tag{A I.1}$$

Die Erzeugenden der Drehungen im Isospinraum werden aus 2×2-Matrizen konstruiert, die formal mit den Pauli-Matrizen (A II.8) identifiziert werden können, jedoch anders bezeichnet werden:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A I.2}$$

Die Matrizen τ antikommutieren miteinander

$$\tau_a \tau_b + \tau_b \tau_a = 0 \,, \qquad (a \neq b) \,, \qquad \tau_a^2 = 1 \tag{A I.3}$$

und genügen den Relationen

$$\tau_1 \tau_2 = \mathrm{i} \tau_3 \tag{A I.4}$$

(einschließlich zyklischer Vertauschungen der Indizes 1, 2 und 3).

Die Operatoren der Isodrehungen der Nukleonen hängen mit den Matrizen τ über die Beziehungen

$$I_a = \tau_a / 2 \tag{A I.5}$$

zusammen. Aus den Formeln (A I.3) und (A I.4) folgt, daß sie den Vertauschungsrelationen für Drehimpulsoperatoren

$$[I_1, I_2] = \mathrm{i} I_3 \qquad \text{(A I.6)}$$

(einschließlich zyklischer Vertauschungen der Indizes 1, 2 und 3) sowie der Beziehung

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = \tfrac{3}{4}$$

genügen. Aus der letzten Beziehung folgt, daß der Eigenwert des Isospinbetrages I, entsprechend der quantenmechanischen Formel

$$I^2 = I(I + 1)$$

bestimmt, den Wert $I = \frac{1}{2}$ hat.

Die Linearkombinationen

$$\tau_+ = \tau_1 + \mathrm{i}\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_- = \tau_1 - \mathrm{i}\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(A I.7)}$$

der Matrizen τ_1 und τ_2 führen den Neutron-Zustand in den Proton-Zustand über und umgekehrt:

$$\tau_+ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_- \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Aus diesem Grund werden die Operatoren τ_+ und τ_- auch manchmal Erzeugungs- bzw. Vernichtungs-Operatoren der elektrischen Ladung genannt. Die Transformationsformeln eines Spinors ψ bei einer Drehung im Isospinraum um den Winkel φ bezüglich der Achse z_a haben eine zu (A II.18) analoge Form:

$$\Psi' = \Lambda_a(\varphi)\, \Psi, \qquad \overline{\Psi}' = \Lambda_a^{-1}(\varphi)\, \overline{\Psi}$$

mit

$$\Lambda_a(\varphi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i} I_a \varphi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau_a \varphi/2} = \cos\frac{\varphi}{2} - \mathrm{i}\tau_a \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Die bilinearen Formen $\overline{\Psi}\tau_a\Psi$ $(a = 1, 2, 3)$ sind die Dichten der Komponenten des Isospinvektors

$$\boldsymbol{I} = \int \overline{\Psi}(x) \frac{\tau}{2} \Psi(x)\, \mathrm{d}x,$$

dessen dritte Komponente über

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2} \qquad \text{(A I.8)}$$

mit der elektrischen Ladung Q und der Hyperladung Y zusammenhängt.

2. Das Triplett der Pionen

Die drei pseudoskalaren Pionen π^+, π^0 und π^- bilden ein Isotriplett; es wird durch drei pseudoskalare Felder beschrieben, die sich wie ein Isovektor transformieren. Gewöhnlich werden zwei Darstellungen für diese Funktionen verwendet. In der ersten werden reelle Felder verwendet:

$$\boldsymbol{\pi} = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \qquad \pi_a^*(x) = \pi_a(x). \qquad \text{(A I.9)}$$

In der zweiten Darstellung werden aus den reellen Funktionen π_1 und π_2 zwei komplexe Felder

$$\varphi_1 = \frac{\pi_1 - \mathrm{i}\pi_2}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_2 = \pi_3, \qquad \varphi_3 = \frac{\pi_1 + \mathrm{i}\pi_2}{\sqrt{2}} \qquad \text{(A I.10)}$$

gebildet. Die Transformation von (A I.9) in die Darstellung

$$\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \qquad \text{(A I.11)}$$

kann in einfacher Weise in Matrixform geschrieben werden

$$\varphi = O\pi\,, \qquad O = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{A I.12}$$

wobei O eine unitäre Matrix ist:

$$O^+O = 1\,.$$

Die Transformationsformeln für einen Isovektor (A I.9) bei Drehungen im dreidimensionalen Isospinraum haben die Form

$$\pi \to \pi' = \Lambda(\alpha)\,\pi\,, \qquad \Lambda(\alpha) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n\alpha_n}\,,$$

wobei α_n ($n = 1, 2, 3$) die Drehwinkel und ω_n die Isospinmatrizen in der Darstellung (A I.9) sind:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A I.13}$$

Das Quadrat des Matrixvektors $\boldsymbol{\omega}$ ist gleich

$$\omega(\omega + 1) = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 2\,.$$

Somit ist $\boldsymbol{\omega}$ ein Drehimpulsoperator mit den Eigenwerten -1, 0 und $+1$.

Eine Drehung um die z_3-Achse mit dem Winkel α läßt sich in der Form

$$\Lambda(\alpha) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_3\alpha} = 1 - \omega_3^2 + \omega_3^2\cos\alpha - \mathrm{i}\omega_3\sin\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \tag{A I.14}$$

darstellen. Die Matrizen (A I.13) lassen sich durch den vollständig antisymmetrischen Einheitstensor dritten Ranges ausdrücken:

$$(\omega_a)_{bc} = -\mathrm{i}\varepsilon_{abc}\,.$$

Die Matrizen ω_a genügen den Vertauschungsrelationen

$$[\omega_1, \omega_2] = \mathrm{i}\omega_3 \tag{A I.15}$$

(einschließlich zyklischer Vertauschungen der Indizes 1, 2 und 3).

Der Übergang zur Darstellung (A I.11) ist mit der unitären Transformation

$$T_n = O\omega_n O^+$$

möglich. Die Matrizen T_n haben die Form

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A I.16}$$

und genügen ebenfalls den Vertauschungsrelationen (A I.15). Dabei ist wesentlich, daß die Matrix T_3 diagonal ist. Diese Eigenschaft spiegelt die Tatsache wider, daß die Komponenten von φ_ν in der Darstellung (A I.11) bestimmten Werten der elektrischen Ladung entsprechen. Damit hat man in Übereinstimmung mit (A I.8) folgende Identifizierung vorzunehmen:

$$\varphi_1 \sim \pi^+\,, \qquad \varphi_2 \sim \pi^0\,, \qquad \varphi_3 \sim \pi^-\,. \tag{A I.17}$$

A II. Die Dirac-Matrizen und die Dirac-Gleichung

Dieser Anhang enthält Material über die Dirac-Matrizen und die Dirac-Gleichung sowie über die Transformationseigenschaften von Spinoren. Er kann als Einführung zu Abschnitt 5. betrachtet werden. Die hier angegebenen Formeln sind bei der Berechnung von Matrixelementen eine große Hilfe. Die Übungen dazu sind in den Aufgaben A enthalten.

1. Die Dirac-Matrizen

Die Eigenschaften der vier hyperkomplexen Zahlen γ_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$) sind durch die Vertauschungsrelationen (Antikommutatorrelationen)

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \tag{A II.1}$$

gegeben. Hieraus folgt unmittelbar, daß die folgenden 16 Größen,

$$\begin{aligned}
&\text{Einheitsmatrix } I = g^{\nu\nu}\gamma^\nu\gamma^\nu \text{ (keine Summation!)},\\
&4 \text{ Matrizen } \gamma_\nu,\\
&6 \text{ Matrizen } \sigma_{\nu\mu} = (\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu)/2\mathrm{i} \qquad (\nu < \mu),\\
&1 \text{ Matrix } \gamma_5 = \mathrm{i}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\\
&4 \text{ Matrizen } D_\nu = \gamma_\nu\gamma_5,
\end{aligned} \tag{A II.2}$$

eine Algebra über dem Körper der komplexen Zahlen bilden, die häufig als *Dirac-Algebra* bezeichnet wird. Anders ausgedrückt ist die Menge der Elemente, die man aus (A II.2) durch Linearkombinationen mit komplexen Koeffizienten, durch Produktbildung oder durch Kombination beider Operationen erhält, bezüglich der Addition, der Multiplikation miteinander und mit komplexen Zahlen abgeschlossen.

Wir weisen darauf hin, daß die Formen $\sigma_{\nu\mu}$ bilinear, die Formen D_ν trilinear in den γ sind und daß γ_5 die einzige Form vierter Ordnung ist. Alle anderen Formen vierter Ordnung sowie alle Formen fünfter und höherer Ordnung lassen sich mit (A II.1) auf eine der Größen (A II.2) zurückführen.

Unter Verwendung einiger algebraischer Sätze kann man zeigen, daß der Rang r einer irreduziblen Matrix-Darstellung des Systems hyperkomplexer Zahlen mit der Anzahl n linear unabhängiger Elemente durch die Beziehung

$$r^2 = n$$

verknüpft ist. Diese Beziehung ist leicht einzusehen, wenn man die hyperkomplexen Zahlen als quadratische Matrizen darstellt.

Es läßt sich ferner zeigen, daß die 16 Matrizen (A II.2) linear unabhängig sind. Dazu stellen wir als erstes fest, daß die Spuren aller Matrizen, außer der Einheitsmatrix, Null sind. Für letztere gilt $\mathrm{Sp}\, I = r$. Der Beweis basiert auf der Möglichkeit zyklischer Vertauschungen der Matrix-Faktoren bei der Spurbildung. Als Beispiel betrachten wir die Spur des Produktes $\gamma_\nu\gamma_\mu$ für $\nu \neq \mu$. Verwenden wir schrittweise die Zyklizität und die Vertauschungsrelation (A II.1), so ergibt sich

$$\mathrm{Sp}\,\gamma_\nu\gamma_\mu = \mathrm{Sp}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_\nu) = 0\,, \qquad (\nu \neq \mu)\,.$$

Im nächsten Schritt betrachten wir die lineare Form

$$F = aI + b^\nu\gamma_\nu + c^{\nu\mu}\sigma_{\nu\mu} + d^\nu D_\nu + e\gamma_5$$

und berechnen die Spuren von F sowie von den Produkten $F\gamma_\nu$, $F\sigma_{\nu\mu}$, FD_ν und $F\gamma_5$. Dabei überzeugen wir uns, daß aus $F = 0$ die Beziehungen

$$a = 0\,, \quad b^\nu = 0\,, \quad c^{\nu\mu} = 0\,, \quad d^\nu = 0\,, \quad e = 0$$

folgen. Somit ist gewährleistet, daß die Anzahl der linear unabhängigen Elemente 16 ist, und wir folgern aus $r^2 = n$, daß sich die den Beziehungen (A II.1) genügenden hyperkomplexen Zahlen γ^ν durch quadratische Matrizen vierter Ordnung, die Dirac-Matrizen, darstellen lassen.

Aus der Vertauschungsrelation (A II.1) folgt weiter, daß sich die vier Matrizen γ_ν unitär wählen lassen, falls die hermitesche Konjugation durch

$$\gamma^{\nu^+} = \gamma_\nu\,, \qquad (\gamma^{\nu^+})_{\alpha\beta} = \gamma^{\nu*}_{\beta\alpha} \tag{A II.3}$$

definiert wird.

Die Matrix γ_5 antikommutiert mit den Matrizen γ_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$), ihr Quadrat ist gleich Eins. Damit lassen sich die Antikommutatorrelationen (A II.1) zu

$$\gamma_m\gamma_n + \gamma_n\gamma_m = 2g_{mn}\,, \qquad m, n = 0, 1, 2, 3, 5 \tag{A II.4}$$

mit

$$g_{55} = 1$$

erweitern. Dabei gilt

$$\gamma_5^+ = \gamma_5 = \gamma^5\,.$$

Die Definition (A II.1) und alle daraus folgenden Relationen sind bezüglich einer unitären Transformation

$$\gamma_\nu \to O\gamma_\nu O^{-1}$$

invariant, wobei O eine beliebige nichtentartete (d. h. invertierbare) Matrix ist, die unter Berücksichtigung von (A II.3) unitär gewählt werden muß.

Damit sind die Dirac-Matrizen bis auf eine unitäre Transformation bestimmt. Gewöhnlich wird die Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$
$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -\mathrm{i} \\ \cdot & \cdot & \mathrm{i} & \cdot \\ \cdot & \mathrm{i} & \cdot & \cdot \\ -\mathrm{i} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{AII.5}$$
$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

verwendet. (Hierbei bezeichnen die Punkte diejenigen Elemente, die gleich Null sind.) Diese Darstellung zeichnet sich dadurch aus, daß die Matrix γ^0 diagonal ist. Sie ist für die Betrachtung des nichtrelativistischen Grenzfalls (siehe unten) also besonders geeignet. Wir bezeichnen (A II.5) als *Standarddarstellung* der Dirac-Matrizen.

Diese Darstellung der Matrizen γ ist mit den gelegentlich anzutreffenden Matrizen $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varrho}$ durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} &\alpha_n = \gamma_0\gamma^n \ (n = 1, 2, 3)\,; \qquad \beta = \gamma^0\,; \\ &\sigma_n = \gamma^5\gamma^n\gamma^0 \ (n = 1, 2, 3)\,, \qquad \sigma_1 = \sigma^{23}\,, \qquad \sigma_2 = \sigma^{31}\,, \qquad \sigma_3 = \sigma^{12}\,; \\ &\varrho_1 = -\gamma^5\,, \qquad \varrho_2 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^5\,, \qquad \varrho_3 = \gamma^0 \end{aligned} \tag{A II.6}$$

verknüpft.

Die Standarddarstellung (A II.5) läßt sich sehr anschaulich in der Blockschreibweise

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^n = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ -\sigma_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix} \tag{A II.7}$$

angeben. Verallgemeinerte Matrixelemente bilden dabei die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A II.8}$$

die den Relationen

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\,, \qquad \sigma_k\sigma_j = \delta_{kj} + \mathrm{i}\varepsilon_{kjl}\sigma_l \tag{A II.9}$$

genügen, sowie die Einheits- und die Nullmatrix zweiten Ranges

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kehren wir zu den Spuren der Dirac-Matrizen und ihrer Produkte zurück. Die Spur der Einheitsmatrix ist gleich dem Rang der Darstellung, d. h., es gilt

$$\mathrm{Sp}\, I = \mathrm{Sp}\, \gamma_\nu\gamma^\nu = 4 \quad \text{(keine Summation über } \nu!)\,.$$

Berücksichtigen wir nun, daß nach dem oben Gesagten die Spuren der Matrizen $\sigma_{\mu\nu}$ und D_ν verschwinden, so können wir

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\,\gamma_\nu = 0\,, \qquad \mathrm{Sp}\,\gamma_\nu\gamma_\mu = 4g_{\nu\mu}\,, \\ &\mathrm{Sp}\,\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\varrho = 0\,, \\ &\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\varrho\gamma_\sigma = g_{\nu\mu}g_{\varrho\sigma} + g_{\nu\sigma}g_{\mu\varrho} - g_{\nu\varrho}g_{\mu\sigma}\,, \\ &\nu, \mu, \varrho, \sigma = 0, 1, 2, 3\,, \end{aligned} \tag{A II.10}$$

schreiben.

Als allgemeine Regel gilt: Die Spur eines Produktes einer ungeraden Anzahl von Dirac-Matrizen verschwindet, und die Spur eines Produktes aus einer geraden Anzahl von Matrizen γ ist bis auf den Faktor vier gleich dem antisymmetrisierten Produkt von Faktoren $g_{\mu\nu}$. Dabei wird das Vorzeichen des Terms $4g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}\cdots g_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}$ in $\mathrm{Sp}\,(\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_{2n}})$ durch die Parität der Permutation $P^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{2n}}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{2n}}$ bestimmt.

Wir geben noch einige Formeln für die Spuren von Verjüngungen der γ-Matrizen mit Vektoren $\hat{a} = a^\nu\gamma_\nu$ an, die aus (A II.10) folgen:

$$\mathrm{Sp}\,\hat{a}\hat{b} = 4(ab)\,, \tag{A II.11a}$$

$$\mathrm{Sp}\,\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} = 4\{(ab)\,(cd) + (ad)\,(bc) - (ac)\,(bd)\}\,, \tag{A II.11b}$$

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[(\hat{k}_1 + m_1)\,(\hat{k}_2 + m_2)\,(\hat{k}_3 + m_3)\,(\hat{k}_4 + m_4)] \\ &= (K_1K_2)\,(K_3K_4) + (K_1K_4)\,(K_2K_3) - (K_1K_3)\,(K_2K_4) \end{aligned} \tag{A II.11c}$$

mit

$$K_iK_j = k_ik_j + \eta_{ij}m_im_j\,, \qquad \eta_{ij} = (-1)^{i-j+1}\,.$$

Diese Beziehung zwischen den Spuren „mit Massen“ und den „masselosen“ Spuren, wie sie sich in den Formeln (A II.11b) und (A II.11c) ergeben hat, gilt analog auch für eine größere Anzahl von Faktoren.

2. Die Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung ist eine lineare Matrix-Gleichung mit partiellen Ableitungen erster Ordnung

$$[(\mathrm{i}\hat{\partial}_x - m)\,\psi(x)]_\alpha = \left(\mathrm{i}\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} - mI\right)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x) = 0\,. \tag{A II.12}$$

Die Feldfunktion ψ_α $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ enthält vier Komponenten. Wenden wir den Operator $(\mathrm{i}\hat{\partial} + m)$ von links auf die Gleichung (A II.12) an, so ergibt sich unter Verwendung von (A II.1)

$$(\mathrm{i}\hat{\partial} + m)(\mathrm{i}\hat{\partial} - m)\psi = [-\partial^2 - m^2]\psi = (\Box - m^2)\psi = 0 .$$

Daher genügt jede einzelne Komponente ψ_α der Klein-Gordon-Gleichung. Die konjugierte Dirac-Gleichung erhalten wir in folgender Weise: Zunächst bilden wir mit Hilfe von (A II.3) die zu (A II.12) hermitesch konjugierte Gleichung

$$\mathrm{i}\gamma_\nu^* \frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu} + m\psi^* = \mathrm{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\gamma_\nu^+ + m\psi^* = \mathrm{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\gamma^\nu + m\psi^* = 0 .$$

Dieser Ausdruck hat jedoch noch nicht die „richtige“ lorentzsymmetrische Form. Multiplizieren wir ihn von rechts mit γ^0, so ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$\gamma_0\gamma^\nu\gamma_0 = \gamma_\nu = \gamma^\nu \tag{A II.13}$$

die Gleichung

$$\mathrm{i}\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x^\nu}\gamma_\nu + m\bar{\psi}(x) = 0 . \tag{A II.14}$$

Das ist die konjugierte Dirac-Gleichung. Der Spinor

$$\bar{\psi} = \psi^*\psi^0 \tag{A II.15}$$

wird als konjugierter Spinor bezeichnet.

Die Spinoren ψ und $\bar{\psi}$ werden häufig als vierkomponentige Spalten bzw. Zeilen dargestellt. Bei all ihrer Anschaulichkeit kann diese Darstellung unter Umständen zu Unbequemlichkeiten führen, wie das beispielsweise bei der Einführung der Ladungskonjugation (vgl. Abschnitt 9.3) der Fall ist. In der praktischen Anwendung muß man dann unter Umständen auf die Darstellung in Komponenten zurückgreifen.

3. Die Transformationseigenschaften

Wir geben hier die Formeln für die Transformationen der spinoriellen Feldfunktionen an. Den an der Ableitung dieser Formeln interessierten Leser verweisen wir auf die vorhandene umfangreiche Literatur.

Bei Translationen liegt auf Grund der allgemeinen Überlegungen von Abschnitt 1.3. folgendes Transformationsverhalten vor:

$$\psi(x) = \psi'(x') , \qquad x' = x + a .$$

Bei räumlichen Drehungen um den Winkel φ in der (x_m, x_n)-Ebene

$$x_m' = x_m \cos\varphi - x_n \sin\varphi , \qquad x_n' = x_n \cos\varphi + x_m \sin\varphi$$

hat die entsprechende Transformation Matrixform:

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \Lambda_{(m,n)}(\varphi)\,\psi(x) , \tag{A II.16}$$

wobei die Drehmatrix Λ durch

$$\Lambda_{(m,n)}(\varphi) = \exp\left(-\mathrm{i}\sigma_{mn}\frac{\varphi}{2}\right)$$

gegeben und σ_{mn} die in (A II.2) eingeführte „Matrix des Spintensors“ ist. Damit gilt

$$\psi'(x') = \cos\frac{\varphi}{2}\psi(x) - \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\sigma_{mn}\psi(x) . \tag{A II.17}$$

Bei Lorentz-Drehungen in der Ebene (x_0, x_n) $(n = 1, 2, 3)$

$$x_0' = x_0 \operatorname{ch}\varphi - x_n \operatorname{sh}\varphi , \qquad x_n' = x_n \operatorname{ch}\varphi - x_0 \operatorname{sh}\varphi \quad \left(\tan\varphi = v \mathrel{\hat{=}} \frac{v}{c}\right)$$

haben wir entsprechend

$$\Lambda_{(0,n)}(\varphi) = \exp\left(i\sigma_{0n}\frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} + i\sigma_{0n}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}.$$

Diese Formeln lassen sich in folgender Weise zusammenfassen (vgl. hierzu A III.9):

$$\Lambda_{(\mu,\nu)}(\varphi) = \exp\left(-i\sigma^{\mu\nu}\frac{\varphi}{2}\right). \tag{A II.18}$$

Es läßt sich zeigen, daß die angegebenen Transformationen mit der Dirac-Gleichung verträglich sind. Dazu hat man sich zunächst davon zu überzeugen, daß die der Lorentz-Transformation

$$x' = Lx\,, \qquad x'_\nu = L_{\nu\mu}x_\mu$$

entsprechenden Matrizen $\Lambda_{(\mu,\nu)}$ die Eigenschaft

$$\Lambda^{-1}\gamma_\nu\Lambda = L_{\nu\mu}\gamma_\mu\,, \qquad \Lambda\gamma_\mu\Lambda^{-1} = L^{-1}_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{A II.19}$$

haben. Multiplizieren wir nun die Dirac-Gleichung (A II.12) von links mit Λ, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Lambda(i\gamma_\nu\partial^\nu - m)\,\psi &= [i(\Lambda\gamma_\nu\Lambda^{-1})\,\partial^\nu - m]\,\Lambda\psi \\ &= (iL^{-1}_{\nu\mu}\gamma_\mu\partial^\nu - m)\,\psi'(x') = (i\hat{\partial}' - m)\,\psi'(x') = 0\,.\end{aligned}$$

Hierbei wurde berücksichtigt, daß nach (A II.19)

$$\partial^\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \partial'^\mu L_{\mu\nu}\,, \qquad \partial'^\nu = \partial^\mu L^{-1}_{\mu\nu}$$

gilt.

Bekanntlich wird eine Gleichung bezüglich einer Transformationsgruppe als *kovariant* bezeichnet, wenn sie bei einer beliebigen Transformation dieser Gruppe ihre Form beibehält, d. h., wenn sie in den transformierten Feldfunktionen und transformierten Variablen dieselbe Gestalt wie die untransformierte Gleichung hat. Somit haben wir gezeigt, daß die Dirac-Gleichung auf Grund der Matrix-Transformation (A II.16) bezüglich der Gruppe der Lorentz-Transformationen kovariant ist.

Die analoge Schlußfolgerung gilt für die konjugierte Dirac-Gleichung. Dazu hat man das Transformationsgesetz

$$\bar{\psi}(x') = \bar{\psi}(x)\,\Lambda^{-1}(\varphi) \tag{A II.20}$$

für den konjugierten Spinor zu berücksichtigen. Man erhält aus (A II.16) durch hermitesche Konjugation und nachfolgende Multiplikation von rechts mit γ_0 unter Berücksichtigung von

$$\gamma_0\Lambda^+\gamma_0 = \gamma_0\exp\left(i\sigma^{\mu\nu+}\frac{\varphi}{2}\right)\gamma_0 = \exp\left(i\sigma^{\mu\nu}\frac{\varphi}{2}\right) = \Lambda^{-1}\,.$$

Aus den Formeln (A II.17) folgt, daß die Spinorfunktionen bezüglich räumlicher Drehungen zweideutig sind. Setzt man $\varphi = 2\pi$, so findet man, daß einer vollen räumlichen Drehung des Koordinatensystems eine Transformationsmatrix $\Lambda(2\pi) = -1$ entspricht. Somit ändert das Feld bei dieser Transformation sein Vorzeichen. Da jedoch eine Drehung um 2π das Koordinatensystem in seine ursprüngliche Lage überführt und folglich mit der identischen Operation übereinstimmt, ergibt sich hieraus, daß die spinorielle Wellenfunktion immer nur bis auf das Vorzeichen bestimmt ist.

Wir wollen noch die Matrizen Λ angeben, die einer Spiegelung der Koordinatenachsen entsprechen. Da sich die Spiegelung einer geraden Anzahl von räumlichen Achsen stets auf eine Drehung zurückführen läßt und daher aus Formel (A II.17) folgt, beschränken wir uns auf die Spiegelung aller drei räumlichen Achsen (P-Transformation):

$$\begin{aligned}&x'^n = -x^n\ (n = 1, 2, 3)\,, \qquad x'^0 = x^0\,, \\ &\psi'(x') = \eta(P)\,\Lambda_{123}\psi(x)\,, \qquad \Lambda_{123} = \gamma^0\,.\end{aligned} \tag{A II.21}$$

Wegen der Zweideutigkeit der Spinordarstellung genügt der Phasenfaktor η der Bedingung $\eta^2(P) = \pm 1$.

Die „Lorentz-Transformation" für die Matrizen γ und die Transformationsformeln für ψ und $\bar{\psi}$ gestatten die unmittelbare Angabe der Transformationsgesetze für bilineare Bildungen des Typs $\bar{\psi} O \psi$. So erhalten wir mit (A II.16) und (A II.20)

$$\bar{\psi}'(x')\, O\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\, \Lambda^{-1} O \Lambda \psi(x)\,.$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung von Formel (A II.19)

a) $O = 1:\ \bar{\psi}'(x')\, \psi'(x') = \bar{\psi}(x)\, \bar{\psi}(x)\,,$

b) $O = \gamma_\nu:\ \bar{\psi}(x')\, \gamma_\nu \psi'(x') = L_{\nu\mu} \bar{\psi}(x)\, \gamma_\mu \psi(x)\,,$

c) $O = \sigma_{\nu\mu}:\ \bar{\psi}' \sigma_{\nu\mu} \psi' = L_{\nu\nu'} L_{\mu\mu'} \bar{\psi} \sigma_{\nu'\mu'} \psi$ usw.

Wie wir sehen, transformieren sich die betrachteten quadratischen Formen wie die Tensor-Darstellungen der Lorentz-Gruppe. Die Fälle, wo O den Faktor γ_5 enthält, betrachten wir gesondert. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Drehmatrix (A II.18) mit γ_5 kommutiert:

$$\Lambda^{-1}(\varphi)\, \gamma_5 \Lambda(\varphi) = \gamma_5\,.$$

Gleichzeitig antikommutiert die Matrix (A II.21) der Raumspiegelungen mit γ_5:

$$\Lambda_{123}^{-1} \gamma_5 \Lambda_{123} = \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_5\,.$$

Damit ergibt sich folgende Klassifikation der bilinearen Formen:

$\bar{\psi}\psi$	— Skalar,	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$	— Pseudoskalar,
$\bar{\psi}\gamma_\nu\psi$	— Vektor,	$\bar{\psi}\gamma_\nu\gamma_5\psi$	— Pseudovektor,
$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$	— Tensor zweiten Ranges.		

4. Der nichtrelativistische Grenzfall

Der nichtrelativistische Grenzfall der Dirac-Gleichung entspricht der Bedingung $|p| \ll m$. Für den Übergang zum nichtrelativistischen Limes ist es vorteilhaft, den vierkomponentigen Spinor in der vierdimensionalen Raum-Zeit durch zwei zweikomponentige Spinoren χ und φ im dreidimensionalen euklidischen Raum darzustellen

$$u(p) = \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{p}) \\ \chi(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \tag{A II.22}$$

und dabei die Standarddarstellung (A II.5) durch die Matrizen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ auszudrücken

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{A II.23}$$

Die in $\boldsymbol{\alpha}$ eingehenden 2×2-Matrizen σ sind die Pauli-Matrizen (vgl. Formel (A II.8)).

Weiterhin gehen wir in der Dirac-Gleichung zur Impulsdarstellung über

$$(p^0 \gamma_0 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma} - mI)\, u(\boldsymbol{p}) = 0 \tag{A II.24}$$

($u(\boldsymbol{p})$ bezeichnet hier den negativ-frequenten Teil $u^-(\boldsymbol{p})$) des Spinors. Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $\gamma_0 = \beta$, so ergeben sich unter Berücksichtigung von (A II.22) und (A II.23) zwei Gleichungen für die zweikomponentigen Spinoren φ und χ:

$$(p^0 - m)\, \varphi(\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma})\, \chi(\boldsymbol{p}) = 0 \tag{A II.25}$$

und

$$-(\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma})\, \varphi(\boldsymbol{p}) + (p^0 + m)\, \chi(\boldsymbol{p}) = 0\,. \tag{A II.26}$$

Hieraus folgt, daß der Spinor χ in der nichtrelativistischen Näherung wesentlich „kleiner" als der Spinor φ ist. Dies ist aus der Formel

$$\chi(\boldsymbol{p}) = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})}{m + p^0}\, \varphi(\boldsymbol{p}) \approx \frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})}{2m}\, \varphi(\boldsymbol{p})\,, \tag{A II.27}$$

die unmittelbar aus (A II.26) folgt, direkt ersichtlich. Aus diesem Grunde beschreibt der Spinor φ gewöhnlich die Elektron- und χ die Positron-Komponenten (siehe Formel (5.12)).

Setzen wir (A II.27) in (A II.25) und (A II.26) ein, so ergibt sich eine Gleichung für φ allein:

$$p^0\varphi(\boldsymbol{p}) = \left[m + \frac{(\sigma\boldsymbol{p})\,(\sigma\boldsymbol{p})}{2m}\right]\varphi(\boldsymbol{p}) = \left[m + \frac{p^2}{2m}\right]\varphi(\boldsymbol{p})\,.$$

Unter Verwendung der Matrix-Relation

$$(\sigma\boldsymbol{a})\,(\sigma\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) + \mathrm{i}(\sigma[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]) \tag{A II.28}$$

ist der Operator auf der rechten Seite offensichtlich diagonal in den Spinor-Indizes. Gehen wir zur Koordinatendarstellung über und trennen den Faktor exp (imt) ab

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt} = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^0t+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\,\varphi(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}\,,$$

so erhalten wir für $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ die Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x}, t)\,.$$

Bei Anwesenheit eines äußeren elektromagnetischen Feldes haben wir nach der allgemeinen Regel die partiellen Ableitungen (vgl. Abschnitt 10.3.) durch die kovarianten Ableitungen zu ersetzen; damit erhalten wir an Stelle von (A II.24):

$$[(p^0 - eA_0)\,\gamma_0 - (\boldsymbol{p} - eA)\,\boldsymbol{\gamma} - mI]\,u(\boldsymbol{p}) = 0\,. \tag{A II.29}$$

Wiederholen wir nun den Übergang zum zweikomponentigen Elektron-Spinor, so erhalten wir unter Vernachlässigung von eA_0 gegenüber $2m$ die Gleichung

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m}(\nabla - \mathrm{i}e\boldsymbol{A})^2 + eA_0 - \frac{e}{2m}(\sigma\boldsymbol{H})\right]\varphi\,. \tag{A II.30}$$

Hier ist $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ der Vektor des magnetischen Feldes. Diese Gleichung heißt *Pauli-Gleichung*. Sie ist eine Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + eA_0 - (\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H})\,, \tag{A II.31}$$

wobei der letzte Term die Energie des magnetischen Dipols

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0\sigma\,, \qquad \mu_0 = \frac{e}{2m} = \frac{e\hbar}{2mc} \tag{A II.32}$$

im äußeren magnetischen Feld $\boldsymbol{H}$ beschreibt. Die Größe μ_0 entspricht dem (normalen) magnetischen Moment des Elektrons und heißt *Bohrsches Magneton.*

A III.[1]) Stetige Gruppen

In diesem Anhang sind einige Angaben zur Theorie der stetigen Gruppen zusammengestellt. Bezüglich weiterer Einzelheiten der Formulierungen und der Beweise wird der Leser auf die entsprechenden Einführungen in die Gruppentheorie verwiesen.

Wir geben zunächst einige Definitionen für abstrakte Gruppen, d. h. für Gruppen, deren Elemente und Gruppenoperationen keinen zusätzlichen Einschränkungen unterliegen, an.

---

[1]) Dieser Anhang wurde von N. A. Sveznikov geschrieben, dem die Autoren an dieser Stelle ihren Dank aussprechen.

1. Allgemeine Definitionen

Eine Menge G (deren Elemente wir gewöhnlich mit g_1, g_2 usw. bezeichnen) ist eine *Gruppe*, wenn eine Operation erklärt ist, die jedem Paar von Elementen dieser Gruppe ein weiteres Element der Gruppe zuordnet. Diese Gruppenoperation heißt gewöhnlich *Multiplikation* und wird in der Form

$$g = g_1 g_2$$

geschrieben. Dabei ist g das *Produkt* der Gruppenelemente g_1 und g_2. Für konkrete Gruppen, deren Elemente Zahlen, Abbildungen, Matrizen, Operatoren usw. sein können, ist diese Gruppenoperation die Addition oder die Multiplikation der Zahlen, die Multiplikation der Matrizen und Operatoren, die Komposition der Abbildungen usw.

Die Gruppenoperation, die wir im folgenden Multiplikation nennen, muß folgenden Bedingungen genügen:

1. Für jeweils drei beliebige Elemente g_1, g_2 und g_3 der Gruppe ist die Multiplikation assoziativ, d. h.[1])

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G: \; (g_1 g_2)\, g_3 = g_1(g_2 g_3)\,.$$

2. In der Gruppe gibt es genau ein Element e, *das Einselement* (oder einfacher Eins) der Gruppe, so daß für jedes Element g der Gruppe

$$ge = eg = g$$

gilt.

3. Zu jedem Element g der Gruppe gibt es ein und nur ein Element g^{-1} mit der Eigenschaft

$$g^{-1}g = gg^{-1} = e\,.$$

Das Element g^{-1} heißt inverses Element (oder kurz Inverses) zu g.

Wir weisen besonders darauf hin, daß die angegebenen Eigenschaften der Gruppenoperation deren Kommutativität nicht voraussetzen; im allgemeinen gilt also für zwei beliebige Elemente $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$. Ist die Multiplikation für eine Gruppe kommutativ, gilt also

$$\forall g_1, g_2 \in G: \; g_1 g_2 = g_2 g_1\,,$$

so heißt diese Gruppe *abelsch* oder kommutativ. Das einfachste Beispiel für eine abelsche Gruppe ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Addition als Gruppenmultiplikation. Es ist klar, daß dabei das Einselement der Gruppe die Zahl Null und „$-x$" das Inverse zu x ist.

Als *Untergruppe* K einer Gruppe G bezeichnen wir eine Untermenge von G, die bezüglich der Gruppenoperation abgeschlossen ist, d. h.

$$\forall g_1, g_2 \in K: \; g_1 g_2 \in K; \qquad \forall g \in K: \; g^{-1} \in K\,.$$

Im angegebenen Beispiel ist die Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen eine Untergruppe. Jede Gruppe hat zwei triviale Untergruppen. Die eine von ihnen ist die Gruppe selbst, und die andere besteht nur aus dem Einselement e.

In der Gruppentheorie spielen die Begriffe einfache und halbeinfache Gruppe eine wichtige Rolle. Um sie definieren zu können, führen wir zunächst den Begriff der *invarianten Untergruppe* ein. Eine Untergruppe K der Gruppe G heißt *invariante Untergruppe* oder *Normalteiler* von G, wenn für jedes Element g aus G die Menge der Elemente gkg^{-1} gleich k ist, wobei k die Untergruppe K durchläuft, d. h., wenn

$$\forall g \in G: \; gKg^{-1} = K$$

[1]) In diesem Anhang verwenden wir einige in der mathematischen Literatur übliche Abkürzungen: $\forall \equiv$ „für alle", $\in \equiv$ „gehört zu".

gilt. Die Gruppe G heißt *einfach*, wenn sie keine invarianten Untergruppen hat. Die Gruppe G heißt *halbeinfach*, wenn sie keine abelschen invarianten Untergruppen hat. Wir bemerken, daß die in der Theorie der Elementarteilchen wichtigen Gruppen wie die Lorentz-Gruppe und die Gruppen der unitären Symmetrie zu diesen Klassen gehören.

Historisch waren die ersten Gruppen, die in der theoretischen Physik auftraten, die der Kristallsymmetrie. Beispiele dafür sind die Gruppe der Drehung einer Ebene um Winkel, die Vielfache von 60° sind. Die Gruppenmultiplikation ist im gegebenen Fall die Komposition der Abbildungen.

Ein weiteres Beispiel für eine endliche Gruppe, d. h. für eine Gruppe mit einer endlichen Anzahl von Elementen, ist die Menge der in Abschnitt 9. eingeführten Operationen C, P und T, zusammen mit der identischen Operation I, und allen ihren Kombinationen. Es läßt sich einfach zeigen, daß diese Gruppe auf Grund der Eigenschaften

$$C^2 = P^2 = T^2 = I$$

und der Kommutativität der Transformationen C, P und T genau acht Elemente hat.

2. Lie-Gruppen

Vom Standpunkt der Quantentheorie aus sind die unendlichen Gruppen, d. h. die Gruppen mit unendlich vielen Elementen, von besonderem Interesse. Diese unendlichen Gruppen lassen sich in zwei Klassen einteilen, die diskreten und die kontinuierlichen Gruppen. Von ihrer Struktur her sind die diskreten unendlichen Gruppen den endlichen Gruppen sehr ähnlich; sie haben die Eigenschaft, daß sich ihre Elemente „deutlich“ voneinander unterscheiden. Ein Beispiel hierfür ist die bereits erwähnte abelsche Gruppe der ganzen Zahlen. Im Gegensatz hierzu gibt es in einer stetigen Gruppe eine zusätzliche Struktur (Topologie). Sie gestattet die Einführung des Begriffes der Nachbarschaft von Gruppenelementen, der Stetigkeit eines Grenzwertes usw. Die Existenz einer solchen Struktur eröffnet die Möglichkeit, die Gruppenelemente durch die Punkte eines topologischen Raumes zu parametrisieren. Dabei müssen die Gruppenoperationen stetige Abbildungen des Parameterraumes auf sich sein. Man sagt z.B., daß die Elemente „x_1“ und „x_2“ der Gruppe $\mathbb{R}$ benachbart sind, wenn die ihnen entsprechenden Zahlen x_1 und x_2 benachbart sind. Läßt sich für eine gegebene Gruppe der Parameterraum lokal als ein endlichdimensionaler euklidischer Raum wählen, so spricht man von einer *Lie-Gruppe*. Genauer gesagt heißt eine stetige Gruppe *n-parametrige Lie-Gruppe* (oder *Lie-Gruppe der Dimension n*), wenn sich beliebige, hinreichend kleine Umgebungen jedes ihrer Elemente umkehrbar eindeutig und stetig auf ein Gebiet des n-dimensionalen reellen euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ abbilden lassen. Tatsächlich sind alle in der Teilchenphysik auftretenden stetigen Gruppen Liesche Gruppen. Deshalb ist die Theorie der Lie-Gruppen für die Quantenfeldtheorie von besonderer Bedeutung.

Das einfachste, physikalisch interessante Beispiel einer Lie-Gruppe ist die abelsche Gruppe der Drehungen einer Ebene um beliebige Winkel $\varphi \leqq 2\pi$; dies ist die Gruppe U(1). Die Elemente dieser Gruppe lassen sich stetig und eindeutig durch die Punkte des Intervalls $[0, 2\pi]$ der reellen Achse (mit identifizierten Endpunkten) nach der folgenden Vorschrift parametrisieren:

$$\text{„Drehung um den Winkel } \varphi\text{“} \leftrightarrow \text{Zahl } \varphi \in [0, 2\pi]\,. \tag{A III.1}$$

Damit ist die Gruppe U(1) definitionsgemäß eine Lie-Gruppe der Dimension Eins. Eine andere (äquivalente) Parametrisierung der Elemente der Gruppe U(1) entsteht, wenn man einer Drehung um den Winkel φ einen Punkt auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ zuordnet:

$$\text{„Drehung um den Winkel } \varphi\text{“} \leftrightarrow \text{Zahl } z = e^{i\varphi} \in \mathbb{C}\,. \tag{A III.2}$$

In der Teilchenphysik tritt die Gruppe U(1) als abelsche Gruppe der Eichtransformationen auf und steht mit der Erhaltung additiver Ladungen in Zusammenhang.

Eine wichtige Klasse von Lie-Gruppen sind die Gruppen der nichtentarteten linearen Transformationen endlichdimensionaler Vektorräume; sie korrespondieren eindeutig den Gruppen der quadratischen Matrizen. Die Elemente dieser Gruppen sind Matrizen mit nichtverschwindender Determinante, und die Gruppenmultiplikation fällt mit der Matrix-Multiplikation zusammen. Gewöhnlich werden die speziellen Eigenschaften der Gruppenelemente auch in der *Bezeichnung der Gruppe* zum Ausdruck gebracht. So enthält die Gruppenbezeichnung den Buchstaben L (linear), wenn die Gruppenelemente nichtentartete Matrizen sind und keinen weiteren Einschränkungen unterliegen. Gruppen unitärer Matrizen enthalten den Buchstaben U und Gruppen orthogonaler (reeller) Matrizen den Buchstaben O in ihrer Bezeichnung. Haben die Matrizen, die die Gruppenelemente bilden, die Determinante Eins, so tritt der Buchstabe S (speziell) in der Bezeichnung auf. In Klammern wird nach diesen Buchstaben gewöhnlich die Dimension der Matrizen (die Anzahl ihrer Zeilen) angegeben. So bezeichnet z.B. SU(N) die Gruppe aller unitären $N \times N$-Matrizen, deren Determinanten gleich Eins sind. Es ist üblich, die Bezeichnungen einer Reihe von Matrix-Gruppen wie SU(N), SO(N), SL(N) usw. auf die zugehörigen abstrakten Gruppen zu übertragen, da es sich dabei um Lie-Gruppen mit denselben topologischen und Gruppeneigenschaften handelt. In diesem Sinne ist z.B. die Gruppe SL(2, $\mathbb{C}$) diejenige Lie-Gruppe, deren Elemente eineindeutig und umkehrbar stetig auf die zweireihigen komplexen Matrizen mit der Determinante Eins abgebildet werden können. Dabei wird die Gruppenmultiplikation auf die Multiplikation der Matrizen und die Bildung eines inversen Gruppenelementes auf die Inversion einer Matrix abgebildet.

In der theoretischen Physik spielt die Gruppe SU(2) eine große Rolle. Sie ist das einfachste Beispiel einer nichtabelschen Lie-Gruppe. Tatsächlich läßt sich leicht einsehen, daß die Beziehung $AB = BA$ für zweireihige unitäre Matrizen im allgemeinen nicht erfüllt ist. Eine komplexe 2×2-Matrix wird durch acht reelle Zahlen parametrisiert. Diesen Zahlen werden vier Bedingungen durch die Unitarität und eine weitere durch die Forderung auferlegt, daß die Determinante gleich Eins ist. Damit wird ein beliebiges Element der Gruppe SU(2) durch drei reelle Zahlen parametrisiert, und die Dimension der Gruppe SU(2) ist gleich drei.

Auf analoge Weise läßt sich zeigen, daß die Dimension der Gruppe SU(3) gleich acht und die der Gruppen SU(N) gleich $N^2 - 1$ ist. Jedes Element der Gruppe SU(2) läßt sich in der Form

$$g = \exp\,(\mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \tau_k \alpha_k) \equiv \cos\alpha + \frac{\mathrm{i}}{\alpha} \sin\alpha \sum_{k=1}^{3} \tau_k \alpha_k \qquad \text{(A III.3)}$$

darstellen. Dabei sind τ_k die Pauli-Matrizen, und α_k sind reelle Zahlen, die der Bedingung $\alpha \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} \leqq \pi$ genügen. Wir bemerken, daß, wie im Falle der Gruppe U(1) (vgl. (A III.1) und (A III.2)), der in (A III.3) zugelassene Parameterbereich im zugeordneten euklidischen Raum abgeschlossen und beschränkt ist. Es stellt sich heraus, daß dies nicht etwa die Folge der hier gewählten Parametrisierung, sondern eine Folge der Kompaktheit der Gruppen U(1) und SU(2) ist. Allgemein heißt eine Lie-Gruppe *kompakt*, wenn die Menge ihrer Elemente eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, d. h., wenn jede unendliche Folge ihrer Elemente eine konvergente Teilfolge enthält; hieraus resultiert die Möglichkeit einer stetigen Parametrisierung dieser Lie-Gruppe durch die Punkte eines abgeschlosssenen und beschränkten (d. h. kompakten) Gebietes im entsprechenden euklidischen Raum. Wichtige Beispiele für kompakte Lie-Gruppen sind die Gruppe SU(N) und SO(N) für alle N. Die Theorie der halbeinfachen kompakten Lie-Gruppen ist der am weitesten ausgearbeitete Teil der allgemeinen Theorie Liescher Gruppen.

Als Beispiele nichtkompakter Lie-Gruppen lassen sich die Gruppe T der Translationen der Raum-Zeit und die Lorentz-Gruppe anführen.

Ein Element a_T der Gruppe T wird als Parallelverschiebung aller Punkte der Raum-Zeit M um den Vektor $a \in M$

$$(a_T x)_\mu = x_\mu + a_\mu$$

definiert. Es ist klar, daß das Produkt zweier Elemente a_T und b_T der Gruppe T durch die Formel

$$a_T b_T = (a + b)_T$$

definiert ist. Dabei entspricht dem Element $(a + b)_T$ der Gruppe T der Vektor $a + b$ des Raumes M. Das zu a_T inverse Element ist $(-a_T)$. Es ist unmittelbar einzusehen, daß die Gruppe T abelsch ist. Der Begriff der Nachbarschaft (und folglich auch der Konvergenz) von Gruppenelementen fällt mit dem der Nachbarschaft der ihnen entsprechenden Vektoren in der Raum-Zeit zusammen. Damit ist die Nichtkompaktheit der Gruppe T eine direkte Folge der Unbeschränktheit von M.

Jedes Element der Lorentz-Gruppe läßt sich als Superposition einer räumlichen Drehung R und einer reinen Lorentz-Transformation B (häufig auch *boost* genannt) darstellen; die letztgenannte Transformation führt ein System aus dem Zustand der Ruhe in den der gleichförmigen geradlinigen Bewegung mit der Geschwindigkeit v über:

$$\Lambda = B(v)\, R\,.$$

Die räumlichen Drehungen bilden die kompakte Untergruppe SO(3) der Lorentz-Gruppe. Die Nichtkompaktheit der Gruppe ist mit der offensichtlichen Tatsache verbunden, daß der hyperbolische Winkel $\chi = \arctan\,(v/c)$, der den boost $B(v)$ stetig parametrisiert, unbeschränkt ist:

$$-\infty < \chi < +\infty\,.$$

Die Poincaré-Gruppe ist die wichtigste Gruppe der relativistischen Physik. Sie entsteht aus der Vereinigung der Gruppen T und L in dem Sinne, daß jedes ihrer Elemente p in der Form

$$p = a_T \Lambda \qquad \text{(A III.4)}$$

dargestellt werden kann, und daß das Produkt zweier Elemente $p_1, p_2 \in P$ durch

$$p_1 p_2 = (a_{1T}\Lambda_1)\,(a_{2T}\Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2)_T\,(\Lambda_1\Lambda_2)$$

bestimmt ist. Der Sinn der Formel (A III.4) besteht darin, daß jede Transformation der Raum-Zeit, die die Abstände zwischen den Ereignissen in M ungeändert läßt, als Ergebnis einer Lorentz-Transformation Λ des Koordinatensystems und einer nachfolgenden Verschiebung des Koordinatenursprungs um den Vektor a aufgefaßt werden kann. Es ist klar, daß man dasselbe Ergebnis erhält, wenn man zunächst eine Translation um den Vektor $\Lambda^{-1}a$ und anschließend eine Lorentz-Transformation Λ ausführt. Deshalb läßt sich die Transformation p auch in der Form

$$p \equiv a_T \Lambda = \Lambda(\Lambda^{-1}a)_T$$

darstellen. Man überzeugt sich leicht davon, daß die Gruppe der Translationen T ein abelscher Normalteiler von P ist. Deshalb ist die Poincaré-Gruppe nicht halbeinfach (und schon gar nicht einfach).

3. Darstellungen der Lie-Gruppen

In physikalischen Untersuchungen interessieren uns gewöhnlich konkrete Realisierungen eine gegebenen abstrakten Gruppe. Beschränken wir unsere Betrachtungen auf Realisierungen der Gruppen durch lineare Operatoren, so kommen wir zum Begriff der linearen Darstellung von Gruppen. Genauer gesagt, ist eine *lineare Darstellung* der Gruppe G eine stetige Abbildung dieser Gruppe in die Gruppe der linearen Operatoren eines Vektorraumes $\mathcal{L}$, die mit der Gruppenmultiplikation kommutiert. Ist somit $g \in G$ ein beliebiges Element der Gruppe und $A(g)$ der entsprechende lineare Operator in $\mathcal{L}$, so muß gelten:

$$\forall g_1, g_2 \in G\colon\;\; A(g_1 g_2) = A(g_1)\, A(g_2)$$

und

$$\forall g \in G\colon\;\; A(g^{-1}) = A^{-1}(g)\,.$$

Diese Formeln zeigen, daß die Multiplikation und die Inversion von Gruppenelementen in der Darstellung in die Multiplikation und die Inversion der Operatoren im Raum $\mathcal{L}$ übergehen. Die Dimension des Raumes $\mathcal{L}$ wird Dimension der Darstellung genannt.

In einer Darstellung der Dimension N lassen sich die Operatoren durch die ihnen (in einer bestimmten Basis des Raumes $\mathcal{L}$) entsprechenden Matrizen ersetzen, und die ursprüngliche Gruppe läßt sich als Gruppe der $N \times N$-Matrizen auffassen und untersuchen. Für jede Gruppe ist eine *triviale*, eindimensionale *Darstellung* möglich, die jedes Gruppenelement auf die Zahl Eins abbildet.

Eine Darstellung der Gruppe G heißt *treu*, wenn verschiedenen Gruppenelementen g_1 und g_2 verschiedene Operatoren $A(g_1)$ und $A(g_2)$ entsprechen, d. h., wenn es eine eineindeutige Abbildung der Menge der Gruppenelemente auf die Menge der Darstellungsoperatoren gibt. Eine treue Darstellung reproduziert die Struktur der Lie-Gruppe exakt.

Eine lineare Darstellung A der Gruppe G im Raum $\mathcal{L}$ heißt *reduzibel*, wenn es im Raum $\mathcal{L}$ einen eigentlichen (d. h. von $\{0\}$ und $\mathcal{L}$ verschiedenen) Unterraum $\mathcal{L}_1$ gibt, der von den Darstellungsoperatoren in sich übergeführt wird:

$$\forall g \in G: \; A(g)\,\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_1 \,.$$

Andernfalls heißt die Darstellung *irreduzibel*. In der Teilchenphysik gilt den unitären linearen Darstellungen, d. h. den Darstellungen durch lineare unitäre Operatoren, die die Norm der Zustandsvektoren erhalten, das größte Interesse. Es läßt sich zeigen, daß jede reduzible unitäre Darstellung U einer Gruppe G in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerfällt, d. h., daß alle Matrizen $U(g)$ in einer geeigneten Basis blockdiagonale Struktur haben:

$$U(g) = \begin{pmatrix} \blacksquare & 0 & 0 \\ & \blacksquare & \\ 0 & & \blacktriangledown \end{pmatrix}.$$

Damit wird die Untersuchung einer beliebigen unitären Darstellung einer Gruppe auf die Untersuchung ihrer irreduziblen Darstellungen reduziert.

Wir geben noch einige Beispiele an. Für jede abelsche Gruppe sind alle irreduziblen Darstellungen eindimensional. Speziell für die Gruppe $\mathbb{R}$ haben die irreduziblen unitären Darstellungen die Gestalt

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad A(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \,.$$

Hierbei ist p eine reelle Zahl, die die Wahl der Darstellung fixiert. Oben hatten wir darauf hingewiesen, daß die topologischen und Gruppeneigenschaften für eine Reihe von Gruppen ($\mathrm{SL}(N)$, $\mathrm{SU}(N)$, $\mathrm{SO}(N)$ usw.) mit den Eigenschaften der entsprechenden Matrix-Gruppen zusammenfallen. Es ist somit klar, daß die N-dimensionale Matrix-Gruppe, deren Bezeichnung mit der einer gegebenen Gruppe zusammenfällt, deren treue irreduzible Darstellung realisiert. Für die Gruppen SU(2), SU(3) und einige andere, in der Quantentheorie häufig anzutreffende Gruppen, heißt diese Darstellung *fundamental*.

Eine wichtige Rolle in der Theorie der Lie-Gruppen spielen die *adjungierten* Darstellungen. Es zeigt sich, daß jede n-parametrige Lie-Gruppe eine Darstellung der Dimension n hat, deren Form vollständig durch die lokale Struktur der gegebenen Gruppe bestimmt ist. Ein Verfahren zur Konstruktion dieser Darstellung geben wir unten, nach der Einführung des Begriffes der Lie-Algebra, an (siehe Abschnitt 4. dieses Anhangs). Hier bemerken wir nur, daß für kompakte einfache Gruppen, wie z.B. die Gruppen $\mathrm{SU}(N)$ und $\mathrm{SO}(N)$ für beliebiges N, die adjungierte Darstellung irreduzibel ist. Somit hat beispielsweise die adjungierte Darstellung der Gruppe SU(2) die Dimension drei. Zum Abschluß dieses Abschnitts weisen wir darauf hin, daß die Gruppe SU(2) in der Feldtheorie oft mit der Gruppe des Spins (oder des Isospins) assoziiert wird und die Gruppe SU(3) mit der Gruppe der unitären Symmetrie. In diesem Falle lassen sich die Vektoren des Raumes $\mathcal{L}$, in dem die irreduzible Darstellung der Gruppe SU(2) realisiert ist, mit den Spin (Isospin-)Multipletts und die der Gruppe SU(3) mit den unitären Multipletts identifizieren. Gleichzeitig können die unitären Multipletts nur ausgewählte Dimensionen 1, 3, 8, 10, ... haben, d. h., im Raum $\mathcal{L}$ kann nicht für jede Dimension eine irreduzible Darstellung der Gruppe SU(3) konstruiert werden.

4. Lie-Algebra und Erzeugende einer Lie-Gruppe

Aus der Definition der Lie-Gruppe folgt, daß sie lokal (d. h. in jeder infinitesimal kleinen Umgebung eines beliebigen Elementes) die Struktur eines euklidischen Raumes hat. Dieser Umstand gestattet die Einführung solcher Begriffe wie des Abstands infinitesimal benachbarter Elemente, der Ableitung usw. in der Gruppe. Eine bemerkenswerte Aussage der Theorie Liescher Gruppen besteht darin, daß die Gruppenelemente nicht nur stetige oder differenzierbare, sondern sogar analytische Funktionen der Parameter sind. Betrachten wir eine kleine Umgebung der Eins in der Gruppe. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß diesem Punkt der Koordinatenursprung im Parameterraum entspricht. Dann läßt sich ein beliebiges Element seiner Umgebung bis auf Terme zweiter Ordnung (in den Potenzen der infinitesimalen Parameter) in der Form

$$g(a_1, a_2, \dots, a_n) = e + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} X_k a_k \tag{A III.5}$$

schreiben. Die Größen

$$X_k = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial g(\dots a \dots)}{\partial a_k}\bigg|_{a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0} \tag{A III.6}$$

heißen *infinitesimale Erzeugende* (*Generatoren*) der Lie-Gruppe oder einfach *Erzeugende*. Die Einführung der imaginären Einheit in (A III.6) hat den Vorteil, daß in den physikalisch interessanten Fällen die so definierten Erzeugenden der Gruppe gerade mit den hermiteschen Operatoren für die physikalisch wichtigen Größen wie Impuls, Energie, Spin, Ladung usw. identifiziert werden können.

Es läßt sich zeigen, daß die Gesetze der Gruppenmultiplikation folgende Beziehungen für die Erzeugenden nach sich ziehen:

$$[X_l, X_j] = \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} C_{lj}^{k} X_k \tag{A III.7}$$

und

$$[X_l, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_l]] + [X_k, [X_l, X_j]] = 0\,. \tag{A III.8}$$

Letztere ist die Jacobi-Identität. Hierbei ist $[X, Y] = XY - YX$ der Kommutator zweier Erzeugender, und die C_{lj}^{k} sind bestimmte Zahlen, die *Strukturkonstanten* der Lie-Gruppe.

Diese Eigenschaften (A III.7) und (A III.8) der Erzeugenden werden gewöhnlich als die definierenden Axiome einer Algebra angesehen, d. h., die Erzeugenden bilden die Basis einer Lie-Algebra. Eine Menge A ist eine *Lie-Algebra*, wenn sie ein reeller (oder komplexer) linearer Raum ist, d. h., wenn für alle $X, Y \in A$ und alle Zahlen α, β gilt

$$\alpha X + \beta Y \in A\,,$$

und wenn die Menge bezüglich der Kommutatorbildung abgeschlossen ist, d. h., wenn für alle $X, Y \in A$ auch $[X, Y] \in A$ gilt. Wir weisen darauf hin, daß gerade die letzte Forderung die Lie-Algebren von den gewöhnlichen Algebren unterscheidet, die nur bezüglich der (assoziativen) Multiplikation ihrer Elemente abgeschlossen sind. Ein wichtiges Resultat der Lieschen Theorie ist, daß ein Satz von Strukturkonstanten (d. h. ein Satz von Zahlen C_{lj}^{k}, die den aus (A III.7) und (A III.8) folgenden Bedingungen

$$\begin{aligned} &C_{lj}^{k} = -C_{jl}^{k}\,, \\ &\sum_{l=1}^{n} \left(C_{ik}^{l} C_{lj}^{m} + C_{ji}^{l} C_{lk}^{m} + C_{kj}^{l} C_{li}^{m}\right) = 0 \end{aligned} \tag{A III.9}$$

genügen) die Struktur der Lie-Algebra und, nach (A III.5), auch die lokale Struktur der Lie-Gruppe eindeutig bestimmt. Die einfachste Struktur hat die Lie-Algebra einer abelschen Lie-Gruppe. In diesem Falle sind alle Strukturkonstanten gleich Null. Die Erzeugenden der

Gruppe T sind die Vektoren P_μ des Gesamtimpulses, und es gilt

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \,.$$

Die Algebra der Gruppe SU(2) wird durch die Vertauschungsrelationen zwischen ihren drei Erzeugenden I_k (dies können die Operatoren der Komponenten des orbitalen Drehimpulses, des Spin, des Isospins oder andere sein)

$$[I_l, I_j] = \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ljk} I_k$$

bestimmt. Hierbei ist ε der vollständig antisymmetrische Einheitstensor. Denselben Vertauschungsrelationen genügen auch die Erzeugenden der Gruppe SO(3). Damit haben beide Gruppen die gleiche lokale Struktur.

Wie schon für die Lie-Gruppen, so läßt sich auch für die Lie-Algebren der Begriff einer linearen Darstellung, d. h. der Abbildung der Lie-Algebra in die Algebra lokaler Operatoren über einem linearen Raum, einführen. Die Darstellung einer Lie-Algebra ist mit der Darstellung der entsprechenden Lie-Gruppe durch die Formeln (A III.5) und (A III.6) verknüpft, in denen man lediglich die Elemente der abstrakten Gruppe bzw. Algebra durch ihre konkrete Realisierung als Operatoren im entsprechenden Raum zu ersetzen hat. Wir weisen darauf hin, daß aus der Unitarität der Darstellung der Gruppe vermöge (A III.6) die Hermitezität der Operatoren der Lie-Algebra folgt. Als Beispiele geben wir die Erzeugenden für die fundamentale Darstellung der Gruppe SU(2) an; es sind die 2×2 Matrizen

$$(I_k)^{\mathrm{fund}} = \tfrac{1}{2} \tau_k \,.$$

Die Erzeugenden der adjungierten Darstellung sind 3×3-Matrizen:

$$(I_k)_{lj}^{\mathrm{adj}} = \mathrm{i} \varepsilon_{lkj} \,.$$

Allgemein wird diejenige Darstellung einer Lie-Algebra der Dimension n als *adjungierte Darstellung* bezeichnet, die durch $n \times n$-Matrizen realisiert ist und deren Generatoren X aus den Strukturkonstanten aufgebaut sind:

$$(X_k^{\mathrm{adj}})_m^l = \mathrm{i} C_{mk}^l \,.$$

Aus (A III.9) folgt, daß die so definierten Erzeugenden der Bedingung (A III.7) genügen und somit die Basiselemente einer Darstellung der Lie-Algebra sind. Mit Hilfe von (A III.5) läßt sich diese Darstellung der Lie-Algebra auf eine Darstellung der Lie-Gruppe, die *adjungierte Darstellung der Lie-Gruppe*, übertragen. Wir bemerken noch, daß diese recht weitgehende Simplizität der Theorie halbeinfacher kompakter Lie-Gruppen darauf zurückzuführen ist, daß sich *jedes* Element der Gruppe (und nicht nur die Elemente einer kleinen Umgebung der Eins) in der sogenannten Normalform darstellen läßt:

$$g(a_1, \ldots, a_n) = \exp\,(\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} X_k a_k) \,.$$

Zum Abschluß geben wir noch die Vertauschungsrelationen an, die die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe P bestimmen. Die Gesamtzahl ihrer Erzeugenden ist zehn. Vier von ihnen sind die Operatoren P_μ der Impulskomponenten (sie rühren von der Untergruppe T her), und die übrigen sind die Komponenten $M_{\mu\nu}$ der Drehimpuls- und Boost-Operatoren (sie rühren von der Lorentz-Gruppe her). Mit diesen Bezeichnungen gilt dann:

$$\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0 \,, \\
&[P_\mu, M_{\nu\lambda}] = \mathrm{i}(g_{\mu\lambda} P_\nu - g_{\mu\nu} P_\lambda) \,, \qquad \text{(A III.10)} \\
&[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\varrho}] = \mathrm{i}(g_{\mu\lambda} M_{\nu\varrho} - g_{\nu\lambda} M_{\mu\varrho} + g_{\nu\varrho} M_{\mu\lambda} - g_{\mu\varrho} M_{\nu\lambda}) \,.
\end{aligned}$$

A IV. Operatortransformationen

1. Lineare stetige Transformationen

In diesem Anhang betrachten wir lineare, von einem Parameter φ stetig abhängende Transformationen bestimmter Operatoren a_i,

$$a_i \to a'_i = L_{ij}(\varphi)\, a_j\,, \qquad a' = U^{-1}(\varphi)\, aU(\varphi)\,,$$

die eine einparametrige Gruppe bilden:

$$L(\varphi_1)\, L(\varphi_2) = L(\varphi_1 + \varphi_2)\,.$$

Man kann die explizite Bestimmung des unitären Operators $U(\varphi)$, der wegen der Gruppen-eigenschaft durch den Ansatz

$$U(\varphi) = \exp\,(\mathrm{i}\varphi V)\,, \qquad \overset{+}{V} = V\,,$$

gegeben ist, auf die explizite Konstruktion des (konstanten) Operators V, d. h. der Erzeugenden der Transformationen, zurückführen.

Dazu betrachten wir die infinitesimale Transformation ($\varphi = \varepsilon \ll 1$)

$$a' \approx a + \varepsilon A\,, \qquad U \approx 1 + \mathrm{i}\varepsilon V$$

und erhalten

$$a + \varepsilon A \approx (1 - \mathrm{i}\varepsilon V)\, a(1 + \mathrm{i}\varepsilon V)\,,$$

so daß

$$A = \mathrm{i}[a, V] \tag{A IV.1}$$

die Grundgleichung zur Bestimmung des Operators V ist.

Im folgenden diskutieren wir einige wichtige Beispiele:

a) *Verschiebung um eine komplexe c-Zahl*:

$$a' = a + \varphi\,, \qquad \overset{*}{a}{}' = \overset{*}{a} + \overset{*}{\varphi}$$

oder

$$a' = a + \varphi + \mathrm{i}\psi\,, \qquad \overset{*}{a}{}' = \overset{*}{a} + \varphi - \mathrm{i}\psi$$

$$U = \exp\,(\mathrm{i}\varphi u + \mathrm{i}\psi v)\,.$$

Die Grundgleichung (A IV.1) liefert

$$1 = \mathrm{i}[a, u]\,, \qquad 1 = \mathrm{i}[\overset{*}{a}, u]\,,$$

$$1 = [a, v]\,, \qquad -1 = [\overset{*}{a}, v]\,.$$

Hieraus folgt, daß u und v linear von den Bose-Operatoren a, $\overset{*}{a}$ mit

$$[a, \overset{*}{a}] = a\overset{*}{a} - \overset{*}{a}a = 1\,, \qquad [a, a] = [\overset{*}{a}, \overset{*}{a}] = 0$$

abhängen müssen; daher gilt

$$u = \mathrm{i}(a - \overset{*}{a})\,, \qquad v = (a + \overset{*}{a})$$

und

$$U = \exp\,(\overset{*}{a}\varphi - a\overset{*}{\varphi})\,. \tag{A IV.2}$$

Eine entsprechende Lösung für Fermi-Operatoren existiert nicht, denn eine Translation würde in diesem Fall die Substitution der c-Zahl-Objekte φ und $\overset{*}{\varphi}$ durch die Erzeugenden der Graßmann-Algebra erfordern.

b) *„Drehung" von $a = (a_1, a_2)$ um den Winkel φ:*

$$a_1' = a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi\,, \qquad \text{dgl. für } \overset{*}{a}{}_1'\,;$$

$$a_2' = a_2 \cos\varphi + a_1 \sin\varphi\,, \qquad \text{dgl. für } \overset{*}{a}{}_2'\,.$$

Auf derartige Transformationen kann man z. B. die Drehungen im Isospinraum zurückführen. Wir erhalten aus den Grundgleichungen

$$a_1 = \mathrm{i}[a_2, V]\,, \qquad -a_2 = \mathrm{i}[a_1, V] \tag{A IV.3}$$

sowie die hermitesch konjugierten Beziehungen

$$\overset{*}{a}_1 = \mathrm{i}[\overset{*}{a}_2, V]\,, \qquad -\overset{*}{a}_2 = \mathrm{i}[a_1, V]\,. \tag{A IV.3'}$$

Im Gegensatz zum Fall a) muß der Operator V bilinear in den a_k und $\overset{*}{a}_k$ sein:

$$V = c\overset{*}{a}_1 a_1 + d\overset{*}{a}_2 a_2 + e(\overset{*}{a}_1 a_2 + \overset{*}{a}_2 a_1) + \mathrm{i}f(\overset{*}{a}_1 a_2 - \overset{*}{a}_2 a_1)\,.$$

Diesen allgemeinen hermiteschen Ausdruck setzen wir nun in (A IV.3) und (A IV.3') ein und sehen, daß $c = d = e = 0$ und $f = 1$ gilt, d. h.

$$U = \exp\left[\varphi(\overset{*}{a}_2 a_1 - \overset{*}{a}_1 a_2)\right]\,. \tag{A IV.4}$$

Diese Formel ist sowohl für Bose- als auch für Fermi-Operatoren gültig.

c) *Bogoljubov-Transformation für Bose-Operatoren:*

$$\begin{aligned} b_1 \to \beta_1 &= b_1 \,\mathrm{ch}\,\varphi + \overset{*}{b}_2 \,\mathrm{sh}\,\varphi\,, & \overset{*}{\beta}_1 &= \overset{*}{b}_1 \,\mathrm{ch}\,\varphi + b_2 \,\mathrm{sh}\,\varphi\,, \\ b_2 \to \beta_2 &= \overset{*}{b}_1 \,\mathrm{sh}\,\varphi + b_2 \,\mathrm{ch}\,\varphi\,, & \overset{*}{\beta}_2 &= b_1 \,\mathrm{sh}\,\varphi + \overset{*}{b}_2 \,\mathrm{ch}\,\varphi\,. \end{aligned} \tag{A IV.5}$$

Die Grundgleichung liefert hier

$$\overset{*}{b}_2 = \mathrm{i}[b_1, V]\,, \qquad \overset{*}{b}_1 = \mathrm{i}[b_2, V]$$

sowie die hermitesch konjugierten Gleichungen. Die Lösung hat die Gestalt

$$V = \mathrm{i}(b_1 b_2 - \overset{*}{b}_2 \overset{*}{b}_1) = \mathrm{i}(\beta_1 \beta_2 - \overset{*}{\beta}_2 \overset{*}{\beta}_1)\,,$$

d. h.

$$U(\varphi) = \exp\left[\varphi(\overset{*}{b}_2 \overset{*}{b}_1 - b_1 b_2)\right]\,. \tag{A IV.6}$$

d) *Bogoljubov-Transformation für Fermi-Operatoren:*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 \cos\varphi + \overset{*}{a}_2 \sin\varphi\,, & \overset{*}{\alpha}_1 &= \overset{*}{a}_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi\,, \\ \alpha_2 &= -\overset{*}{a}_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi\,, & \overset{*}{\alpha}_2 &= -a_1 \sin\varphi + \overset{*}{a}_2 \cos\varphi\,. \end{aligned} \tag{A IV.7}$$

Mit Hilfe der Grundgleichung erhalten wir

$$\overset{*}{a}_1 = -\mathrm{i}[a_2, V]\,, \qquad \overset{*}{a}_2 = \mathrm{i}[a_1, V]$$

und die hermitesch konjugierten Beziehungen. Als Lösung ergibt sich

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{i}(a_1 a_2 - \overset{*}{a}_2 \overset{*}{a}_1) = \mathrm{i}(\alpha_1 \alpha_2 - \overset{*}{\alpha}_2 \overset{*}{\alpha}_1)\,, \\ U(\varphi) &= \exp\left[\varphi(\overset{*}{a}_2 \overset{*}{a}_1 - a_1 a_2)\right]\,. \end{aligned} \tag{A IV.8}$$

e) *Lorentz-„Drehungen" der Dirac-Matrizen:*

Nun konstruieren wir den Operator $U(\varphi)$ der Transformation

$$\gamma_\mu \to \tilde{\gamma}_\mu = L_{\mu\nu}(\varphi)\, \gamma_\nu$$

der Dirac-Matrizen, wobei L die Matrix der Lorentz-Drehungen $x' = L(\varphi)\, x$ der Koordinaten ist. Für die räumliche (euklidische) Drehung in der (x_1, x_2)-Ebene gilt

$$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 \cos\varphi - \gamma_2 \sin\varphi\,, \qquad \tilde{\gamma}_2 = \gamma_1 \sin\varphi + \gamma_2 \cos\varphi\,, \qquad \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0\,, \qquad \tilde{\gamma}_3 = \gamma_3\,;$$

für Lorentz-Drehungen in der (x_0, x_1)-Ebene gilt

$$\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 \operatorname{ch}\varphi + \gamma_1 \operatorname{sh}\varphi\,, \qquad \tilde{\gamma}_1 = \gamma_0 \operatorname{sh}\varphi + \gamma_1 \operatorname{ch}\varphi\,, \qquad \tilde{\gamma}_2 = \gamma_2\,, \qquad \tilde{\gamma}_3 = \gamma_3\,.$$

Aus der Grundgleichung erhält man

$$-\gamma_2 = \mathrm{i}[\gamma_1, V_{12}]\,, \qquad \gamma_1 = \mathrm{i}[\gamma_2, V_{12}]\,, \qquad [\gamma_0, V_{12}] = [\gamma_3, V_{12}] = 0$$

bzw.

$$\gamma_1 = \mathrm{i}[\gamma_0, V_{01}]\,, \qquad \gamma_0 = \mathrm{i}[\gamma_1, V_{01}]\,, \qquad [\gamma_2, V_{01}] = [\gamma_3, V_{01}] = 0\,.$$

Die Lösungen haben die Gestalt

$$V_{12} = -\,(\mathrm{i}/2)\,\gamma_1\gamma_2\,, \qquad V_{01} = -\,(\mathrm{i}/2)\,\gamma_0\gamma_1\,.$$

Wir können also, die soeben erhaltenen Ergebnisse verallgemeinernd, den Operator $U_{(\mu\nu)}$ der Drehung in der (x_μ, x_ν)-Ebene in Übereinstimmung mit (A II.18) folgendermaßen angeben:

$$U_{(\mu\nu)} = \exp\,(\varphi\gamma_\mu\gamma_\nu/2) = \exp\,(\mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}\varphi/2) \qquad \text{(A IV.9)}$$

2. Faktorisierung des Exponenten[1]

Wir betrachten nun

$$U = \exp\,(A + B)$$

mit nichtkommutierenden Operatoren A und B und stellen uns die Aufgabe, die Abhängigkeit von den Operatoren A und B zu faktorisieren. Falls A nur Erzeugungs- und B nur Vernichtungsoperatoren enthält, wird man auf dieses Problem geführt, wenn man den Operator U in die Normalform bringen will.

Im allgemeinen Fall kann man den Operator U stets in die Form

$$U = \mathrm{e}^A\, Q\, \mathrm{e}^B$$

bringen, wobei der Faktor Q gewöhnlich sowohl von A als auch von B sowie von deren mehrfachen Kommutatoren abhängt.

Zur Bestimmung der expliziten Gestalt von Q verwenden wir die „Methode des unendlich kleinen Wachstums". Dazu führen wir den Hilfsparameter τ ein und schreiben:

$$U \to U(\tau) = \mathrm{e}^{\tau(A+B)} = \mathrm{e}^{\tau A}\, Q(\tau;\, A,\, B,\, [A,\, B],\, \ldots)\, \mathrm{e}^{\tau B}\,.$$

Differentiation nach τ führt zu folgender Differentialgleichung für den Operator $Q(\tau)$:

$$Q'(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau A}\, B\, \mathrm{e}^{\tau A}\, Q(\tau) - Q(\tau)\, B$$

mit der Anfangsbedingung $Q(\tau = 0) = 1$.

Am einfachsten ist der Fall zu behandeln, für den der Kommutator der Operatoren A und B,

$$[A,\, B] \coloneqq C$$

eine c-Zahl ist (siehe (A IV.2)). Dann gilt

$$\mathrm{e}^{-\tau A}\, B\, \mathrm{e}^{\tau A} = B - \tau C\,, \qquad Q(\tau) = \exp\,(-\tau^2 C/2)\,,$$

und wir erhalten die sogenannte *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel*:

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\, \mathrm{e}^{-C/2}\, \mathrm{e}^B\,, \quad \text{falls} \quad C = [A,\, B] \text{ eine } c\text{-Zahl ist.} \qquad \text{(A IV.10)}$$

Für die Faktorisierung der Formeln (A IV.6) und (A IV.8) der kanonischen Bogoljubov-Transformation ist jedoch der Fall von Interesse, in dem der Kommutator C ein Operator ist

---

[1]) Die Darlegung dieses Abschnitts folgt [15], Anhang B., wo man auch eine Reihe anderer nützlicher Formeln findet.

und die Operatoren A, B und C eine geschlossene Kommutatoralgebra der speziellen Form

$$[A, B] = C\,, \quad [A, C] = -2\xi A\,, \quad [B, C] = 2\xi B \tag{A IV.11}$$

bilden.

Diesen Fall kann man mit differentiellen Methoden behandeln. Wir überlassen es dem Leser, sich selbständig davon zu überzeugen, daß das gesuchte Ergebnis die Form

$$\mathrm{e}^{\tau(A+B)} = \mathrm{e}^{\alpha(\tau)A}\,\mathrm{e}^{\gamma(\tau)C}\,\mathrm{e}^{\alpha(\tau)B} \tag{A IV.12}$$

hat, wobei

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\tanh(\tau\sqrt{\xi})\,, \quad \gamma(\tau, \xi) = \frac{1}{\xi}\ln\coth(\tau\sqrt{\xi}) \tag{A IV.13}$$

gilt.

Für den Fall von Bose-Operatoren gilt

$$A = \overset{+}{b}_1\overset{+}{b}_2\,, \quad B = -b_1 b_2\,, \quad C = 1 - \overset{+}{b}_1 b_1 - \overset{+}{b}_2 b_2\,, \quad \xi = 1$$

und für Fermi-Operatoren

$$A = \overset{+}{a}_2\overset{+}{a}_1\,, \quad B = -a_1 a_2\,, \quad C = 1 + a_1\overset{+}{a}_1 + a_2\overset{+}{a}_2\,, \quad \xi = 1\,.$$

3. Kommutatoren mit dem Operator $n(k)$ der Teilchenzahldichte

Geben wir noch einige nützliche Formeln für Kommutatoren mit dem Teilchenzahldichteoperator

$$n(\boldsymbol{k}) = \overset{*}{a}(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}) = a^+(\boldsymbol{k})\,a^-(\boldsymbol{k})$$

an. Dazu führen wir folgende lineare Superposition der Operatoren a^+ und a^- ein,

$$A = A_+ + A_-\,, \quad A_\pm = \int \lambda_\pm(\boldsymbol{q})\,a^\pm(\boldsymbol{q})\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}\,, \tag{A IV.14}$$

und erhalten

$$[n(\boldsymbol{k}), A_\pm] = \pm\lambda_\pm(\boldsymbol{k})\,a^\pm(\boldsymbol{k})$$

und

$$[n(\boldsymbol{k}), A] = K(\boldsymbol{k}) = \lambda_+(\boldsymbol{k})\,a^+(\boldsymbol{k}) - \lambda_-(\boldsymbol{k})\,a^-(\boldsymbol{k})\,,$$

wobei der Kommutator der Operatoren A und K eine c-Zahl ist:

$$[A, K(\boldsymbol{k})] = -2\lambda^2(\boldsymbol{k})\,, \quad \lambda^2(\boldsymbol{k}) \equiv \lambda_+(\boldsymbol{k})\,\lambda_-(\boldsymbol{k})\,.$$

Daraus folgt nun

$$[n(\boldsymbol{k}), A^N] = NK(\boldsymbol{k})\,A^{N-1} - N(N-1)\,\lambda^2 A^{N-2}$$

und schließlich

$$[n(\boldsymbol{k}), \exp(\pm A)] = \{\pm K(\boldsymbol{k}) - \lambda^2(\boldsymbol{k})\}\exp(\pm A)\,. \tag{A IV.15}$$

A V. Zusammenstellung von singulären Funktionen

1. Singuläre Hilfsfunktionen

Die Diracsche vierdimensionale δ-Funktion hat die Gestalt

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k\,, \tag{A V.1}$$

$$\delta(x) = \delta(x^0)\,\delta(\boldsymbol{x}) = \delta(x^0)\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)\,. \tag{A V.2}$$

Die Sprungfunktionen $\Theta(\alpha)$ und $\varepsilon(\alpha)$ sind gegeben durch

$$\Theta(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha\tau}}{\tau - i\varepsilon} d\tau = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases} \quad (\varepsilon \to +0), \tag{A V.3}$$

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \mathscr{P} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\tau} \frac{d\tau}{\tau} = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases} \tag{A V.4}$$

($\mathscr{P}$ ist das Symbol für den Hauptwert).

Den positiv- bzw. negativ-frequenten Anteil der δ-Funktion kann man folgendermaßen schreiben:

$$\delta_\pm(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\pm i\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{2}\left[\delta(\alpha) \pm \frac{i}{\pi} \mathscr{P} \frac{1}{\alpha}\right]. \tag{A V.5}$$

Einige weitere nützliche Beziehungen sind:

$$\frac{1}{\alpha + i\varepsilon} = \frac{2\pi}{i} \delta_+(\alpha) = \frac{\pi}{i} \delta(\alpha) + \mathscr{P} \frac{1}{\alpha} \quad (\varepsilon \to +0), \tag{A V.6}$$

$$\frac{1}{\alpha - i\varepsilon} = 2\pi i \delta_-(\alpha) = \pi i \delta(\alpha) + \mathscr{P} \frac{1}{\alpha}, \tag{A V.7}$$

$$\mathscr{P} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{i\alpha\tau} d\tau. \tag{A V.8}$$

2. Funktionen des skalaren Feldes

Die Pauli-Jordan-Vertauschungsfunktion D genügt folgenden Relationen:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{i} D(x - y); \tag{8.4}$$

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \sin(x^0 \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}); \tag{A V.9}$$

$$\left.\frac{\partial D(x^0, \boldsymbol{x})}{\partial x^0}\right|_{x^0=0} = \delta(\boldsymbol{x}); \tag{A V.10}$$

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m}{4\pi\sqrt{\lambda}} \varepsilon(x^0) \Theta(\lambda) J_1(m\sqrt{\lambda}),$$

$$\lambda = x^2 = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2. \tag{18.16}$$

In der Umgebung des Lichtkegels hat D die folgende Asymptotik:

$$D(x) \simeq \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m^2}{8\pi} \varepsilon(x^0) \Theta(\lambda). \tag{18.20}$$

Die positiv- und negativ-frequenten Anteile D^+ und D^- der Pauli-Jordan-Funktion sind

$$[\varphi^-(x), \varphi^+(y)] = \langle\varphi(x)\,\varphi(y)\rangle_0 = \frac{1}{\mathrm{i}}\,D^-(x-y); \tag{A V.11}$$

$$[\varphi^+(x), \varphi^-(y)] = \frac{1}{\mathrm{i}}\,D^+(x-y) = \mathrm{i}D^-(y-x); \tag{A V.12}$$

$$\begin{aligned} D^\pm(x) &= \frac{\pm 1}{(2\pi)^3\,\mathrm{i}} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\Theta(\pm k^0)\,\delta(k^2-m^2)\,\mathrm{d}k \\ &= \frac{\mp\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(x^0\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{k})} \qquad \text{(A V.13)} \\ &= \frac{1}{8\pi}\,\varepsilon(x^0)\,\delta(\lambda) - \frac{m\Theta(\lambda)}{8\pi\sqrt{\lambda}}\,[\varepsilon(x^0)\,J_1(m\sqrt{\lambda}) \pm \mathrm{i}N_1(m\sqrt{\lambda})] \\ &\mp \frac{m\mathrm{i}\Theta(-\lambda)}{4\pi^2\,|\lambda|^{1/2}}\,K_1(m\sqrt{-\lambda})\,. \qquad \text{(18.17)} \end{aligned}$$

In der Umgebung des Lichtkegels haben D^+ und D^- folgende Asymptotik

$$D^\pm(x) \simeq \frac{\varepsilon(x^0)\,\delta(\lambda)}{4\pi} \pm \frac{\mathrm{i}}{4\pi^2\lambda} \mp \frac{\mathrm{i}m^2}{8\pi^2}\ln\frac{m\,|\lambda|^{1/2}}{2} - \frac{m^2}{16\pi^2}\,\varepsilon(x^0)\,\Theta(\lambda)\,. \tag{A V.14}$$

Die Paritäts- und Realitätseigenschaften sind:

$$D^\pm(-x) = -D^\mp(x) = -\left(D^\pm(x)\right)^*, \qquad D(x) = -D(-x) = \overset{*}{D}(x)\,. \tag{A V.15}$$

Die kausale Green-Funktion D^c ist definiert als

$$\langle T\varphi(x)\,\varphi(y)\rangle_0 = \frac{1}{\mathrm{i}}\,D^c(x-y); \tag{18.12}$$

$$(\Box - m^2)\,D^c(x) = -\delta(x)\,,$$

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,D^c(k)\,\mathrm{d}k\,, \qquad D^c(k) = \frac{1}{m^2-k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\,; \tag{18.9}$$

$$D^c(x) = \frac{m\mathrm{i}}{4\pi^2}\,\frac{K_1(m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\varepsilon})}{\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\varepsilon}}\,. \tag{18.19}$$

Das Verhalten von D^c in der Umgebung des Lichtkegels ist

$$D^c(x) \simeq \frac{1}{4\pi}\,\delta(\lambda) - \frac{\mathrm{i}}{4\pi^2\lambda} + \frac{\mathrm{i}m^2}{8\pi^2}\ln|\lambda|^{1/2} - \frac{m^2}{16\pi}\,\Theta(\lambda)\,. \tag{18.22}$$

Die kausale Green-Funktion D_0^c für die Masse Null lautet:

$$D_0^c(x) = \frac{1}{4\pi}\left(\delta(\lambda) - \frac{\mathrm{i}}{\pi\lambda}\right) = \frac{1}{4\pi^2\mathrm{i}(\lambda-\mathrm{i}\varepsilon)}\,. \tag{A V.16}$$

Retardierte und advancierte Green-Funktion D^{ret} und D^{adv} sind wie folgt definiert:

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = 0 \quad \text{für} \quad x^0 < 0\,, \qquad D^{\mathrm{adv}}(x) = 0 \quad \text{für} \quad x^0 > 0\,,$$

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{m^2-k^2-\mathrm{i}\varepsilon k^0}\,\mathrm{d}k = \Theta(x^0)\,D(x); \qquad \text{(18.5), (18.6)}$$

$$D^{\mathrm{adv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{m^2-k^2+\mathrm{i}\varepsilon k^0}\,\mathrm{d}k = -\Theta(-x^0)\,D(x); \tag{18.7}$$

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi}\,\Theta(x^0)\left\{\delta(\lambda) - \Theta(\lambda)\frac{m}{2\sqrt{\lambda}}\,J_1(m\sqrt{\lambda})\right\}; \tag{18.20}$$

$$D^{\mathrm{adv}}(x) = \frac{1}{2\pi}\,\Theta(-x^0)\left\{\delta(\lambda) - \Theta(\lambda)\frac{m}{2\sqrt{\lambda}}\,J_1(m\sqrt{\lambda})\right\}. \tag{A V.17}$$

Es gelten folgende Beziehungen zwischen den Funktionen D, D^+, D^-, D^c, D^{ret} und D^{adv}:

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x),$$

$$D^c(x) = \Theta(x^0)\,D^-(x) - \Theta(-x^0)\,D^+(x), \tag{18.8}$$

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = \Theta(x^0)\,D(x) = D^c(x) + D^+(x), \tag{A V.18}$$

$$D^{\mathrm{adv}}(x) = -\Theta(-x^0)\,D(x) = D^c(x) - D^-(x), \tag{A V.19}$$

$$D(x) = D^{\mathrm{ret}}(x) - D^{\mathrm{adv}}(x). \tag{A V.20}$$

3. Funktionen der elektromagnetischen, vektoriellen und spinoriellen Felder

Elektromagnetisches Feld:

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = \mathrm{i}g_{\mu\nu}D_0(x-y), \tag{8.22}$$

$$\langle A_\mu(x)\,A_\nu(y)\rangle_0 = \mathrm{i}g_{\mu\nu}D_0^-(x-y), \tag{A V.21}$$

$$\langle TA_\mu(x)\,A_\nu(y)\rangle_0 = \mathrm{i}g_{\mu\nu}D_0^c(x-y). \tag{A V.22}$$

Die Funktionen D_0, $D_0^\pm$, D_0^c usw. erhält man aus den Funktionen des massiven skalaren Feldes D, $D^\pm$, D^c für $m = 0$, z.B.:

$$D_0^c(x) = D^c(x)|_{m=0} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}k. \tag{A V.23}$$

Massives Vektorfeld:

$$[U_\mu(x), U_\nu(y)] = \mathrm{i}D_{\mu\nu}(x-y), \tag{A V.24}$$

$$\langle U_\mu(x)\,U_\nu(y)\rangle_0 = \mathrm{i}D_{\mu\nu}^-(x-y), \tag{A V.25}$$

$$\langle TU_\mu(x)\,U_\nu(y)\rangle_0 = \mathrm{i}D_{\mu\nu}^c(x-y). \tag{A V.26}$$

Die Funktionen $D_{\mu\nu}$, $D_{\mu\nu}^\pm$, $D_{\mu\nu}^c$ usw. erhält man aus den entsprechenden Funktionen des skalaren Feldes durch Anwendung des Differentialoperators $g_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu/m^2$; z.B. gilt

$$D_{\mu\nu}^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{g_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{m^2}}{m^2-k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k. \tag{A V.27}$$

Spinorfeld:

$$[\psi_\alpha(x), \bar\psi_\beta(y)]_+ = -\mathrm{i}S_{\alpha\beta}(x-y), \tag{9.4}$$

$$\langle\psi_\alpha(x)\,\bar\psi_\beta(y)\rangle_0 = -\mathrm{i}S_{\alpha\beta}^-(x-y), \tag{A V.28}$$

$$\langle T\psi_\alpha(x)\,\bar\psi_\beta(y)\rangle_0 = -\mathrm{i}S_{\alpha\beta}^c(x-y). \tag{A V.29}$$

Auch die Funktionen S, $S^\pm$, S^c usw. lassen sich aus den entsprechenden Funktionen des skalaren Feldes bestimmen, in diesem Falle unter Verwendung des Differentialoperators

$$(\mathrm{i}\hat\partial + m)_{\alpha\beta} = \mathrm{i}\gamma_{\alpha\beta}^\nu\partial_\nu + mI_{\alpha\beta},$$

z. B. gilt

$$S(x) = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \varepsilon(k^0)\, (\hat{k} + m)\, \delta(k^2 - m^2)\, \mathrm{d}k\,, \tag{A V.30}$$

$$S(x)|_{x_0=0} = \mathrm{i}\gamma^0\delta(\boldsymbol{x})\,, \tag{A V.31}$$

$$S^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\, \mathrm{d}p\,. \tag{A V.32}$$

A VI. Formeln zur Impulsintegration

1. Alpha-Darstellung

Der Übergang zur α-Darstellung erfolgt vermöge der Beziehung

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon} = \mathrm{i} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(p^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon)}\, \mathrm{d}\alpha \tag{22.2}$$

bzw. deren Verallgemeinerung

$$\frac{1}{(D - \mathrm{i}\varepsilon)^k} = \frac{\mathrm{i}^k}{\Gamma(k)} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(-D + \mathrm{i}\varepsilon)}\, \alpha^{k-1}\, \mathrm{d}\alpha\,, \qquad k > 0\,. \tag{22.8}$$

Die wichtigsten Gaußschen Quadraturen (a: positive Zahl, b: 4-Vektor) sind:

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2 + 2bk)} = \frac{1}{a^2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b^2/a} \equiv I(a, b^2)\,, \tag{22.3}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2 + 2bk)}\, [k^\nu] = \left[-\frac{b^\nu}{a}\right] I(a, b^2)\,, \tag{22.4a}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2 + 2bk)}\, [k^\nu k^\mu] = \left[\frac{2b^\nu b^\mu + \mathrm{i}ag^{\mu\nu}}{2a^2}\right] I(a, b^2)\,, \tag{22.4b}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2 + 2bk)}\, [k^2] = \left[\frac{b^2 + 2\mathrm{i}a}{a^2}\right] I(a, b^2)\,, \tag{22.4c}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2} \int \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2 + 2bk)}\, [k^\nu k^2] = \left[-\frac{b^\nu(b^2 + 3\mathrm{i}a)}{a^3}\right] I(a, b^2)\,. \tag{A VI.1}$$

Die Ausfaktorisierung der unendlichen Integration geschieht mit Hilfe der Formel

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\alpha_n = \int\limits_0^1 \{\mathrm{d}x\}_n \int\limits_0^\infty \mathrm{d}a\, a^{n-1}\,, \tag{A VI.2}$$

wobei

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\,, \qquad x_\nu = \alpha_\nu/a\,,$$

$$\{\mathrm{d}x\}_n = \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n\, \delta(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n) \tag{A VI.3}$$

gilt.

Typische Integrale über a sind:

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\int_0^\infty \mathrm{d}a\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}a(A+\mathrm{i}\varepsilon)} = \frac{1}{A+\mathrm{i}\varepsilon}, \tag{A VI.4}$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}a}{a}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}aA} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}aB}\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon a} = \ln\frac{B+\mathrm{i}\varepsilon}{A+\mathrm{i}\varepsilon}, \tag{A VI.5}$$

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}a}{a^2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}aA} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}aB}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}aC} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}aD}\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon A}$$

$$= (A+D)\ln(A+D+\mathrm{i}\varepsilon) + (B+C)\ln(B+C+\mathrm{i}\varepsilon) - (A+C)\ln(A+C+\mathrm{i}\varepsilon) - (B+D)\ln(B+D+\mathrm{i}\varepsilon)\,. \tag{A VI.6}$$

Für den Fall, daß B und D einen großen Parameter Λ^2 ($B = b\Lambda^2$, $D = d\Lambda^2$) enthalten, wird aus (A VI.6) im Grenzwert $\Lambda^2 \to \infty$:

$$\to \Lambda^2[b\ln b + d\ln d - (b+d)\ln(b+d)] + (A+C)\ln\Lambda^2 + (A+C)[1-\ln(A+C)] + A\ln d + C\ln b\,. \tag{A VI.7}$$

2. Feynman-Parametrisierung

Die Ausgangsformel lautet:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)!\int_0^1 \frac{\{\mathrm{d}x\}_n}{\left(\sum\limits_{1\leq\nu\leq n} a_\nu x_\nu\right)^n}, \tag{22.10}$$

wobei das Symbol $\{\mathrm{d}x\}_n$ in (A VI.3) definiert ist.

Impulsquadraturen des Typs

$$J_L(D) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}q}{(q^2 - D + i\varepsilon)^L} = \frac{(-1)^{L+1}(L-3)!}{(D-\mathrm{i}\varepsilon)^{L-2}(L-1)!}, \quad L \geqq 3\,, \tag{22.16}$$

verallgemeinert man für praktische Zwecke (Verschiebung der Integrationsvariablen) wie folgt:

$$F_L(D,k) = J_L(k^2 - D) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}p}{[p^2 - 2kp + D]^L} = -\frac{(L-3)!}{(D-k^2+\mathrm{i}\varepsilon)^{L-2}(L-1)!}, \tag{A VI.8}$$

$$F_L^\mu(D,k) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p^\mu\,\mathrm{d}p}{[p^2 - 2kp + D]^L} = -\frac{k^\mu(L-3)!}{(D-k^2)^{L-2}(L-1)!} = k^\mu F_L(D,k)\,, \tag{A VI.9}$$

$$F_L^{\mu\nu}(D,k) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p^\mu p^\nu\,\mathrm{d}p}{[p^2 - 2kp + D]^L} = \frac{g^{\mu\nu}(D-k^2) + 2(L-3)\,k^\mu k^\nu}{2(L-3)}\,F_L(D,k)\,, \tag{A VI.10}$$

$$F_L^{(2)}(D,k) = \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p^2\,\mathrm{d}p}{[p^2 - 2kp + D]^L} = \frac{2D + (L-5)\,k^2}{(L-3)}\,F_L(D,k) \tag{A VI.11}$$

usw.

3. Dimensionsregularisierung

Die Dimensionsregularisierung wird vermöge der folgenden Ersetzung eingeführt:

$$\int \mathrm{d}p = \int \mathrm{d}^4p \rightarrow \int \mathrm{d}^np = \mu^{2\varepsilon} \int\limits_{\Omega(n)} \mathrm{d}\Omega \int\limits_0^\infty p^{n-1}\,\mathrm{d}p\,, \qquad n = 4 - 2\varepsilon\,. \tag{23.10}$$

Die Modifikation der Gaußschen Quadraturen lautet:

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \mathrm{d}^nk\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2+2bk)} = \left(\frac{\mathrm{i}a\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b^2/a} = I_\varepsilon(a, b^2)\,, \tag{23.11}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \mathrm{d}^nk\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2+2bk)}\,[k^\nu] = \left[-\frac{b^\nu}{a}\right] I_\varepsilon(a, b^2)\,, \tag{A VI.12}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \mathrm{d}^nk\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2+2bk)}[k^\nu k^\mu] = \left[\frac{2b^\mu b^\nu + \mathrm{i}ag^{\mu\nu}}{2a^2}\right] I_\varepsilon(a, b^2)\,. \tag{A VI.13}$$

(Diese drei Formeln unterscheiden sich von den Formeln (22.3) und (22.4a, 22.4b) nur durch die Substitution $I(a, b^2) \rightarrow I_\varepsilon(a, b^2)$);

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \mathrm{d}^nk\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2+2bk)}\,[k^2] = \left[\frac{b^2 + \mathrm{i}a(2-\varepsilon)}{a^2}\right] I_\varepsilon(a, b^2)\,, \tag{A VI.14}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \mathrm{d}^nk\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ak^2+2bk)}\,[k^2k^\nu] = \left[-\frac{b_\nu[b^2 + \mathrm{i}a(3-\varepsilon)]}{a^3}\right] I_\varepsilon(a, b^2) \tag{A VI.15}$$

usw.

Es sei bemerkt, daß man Formel (A VI.14) entweder aus (23.11) durch Differentiation nach dem Parameter a oder aber aus (A VI.13) durch Summation über die Lorentz-Indizes erhalten kann. Im letzten Fall muß man berücksichtigen, daß

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\; g_{\mu\nu} = n = 4 - 2\varepsilon \tag{A VI.16}$$

gilt. Verwendet man diese Eigenschaft, so hat man bei der Ausführung von Operationen mit den Dirac-Matrizen die gewöhnlichen Beziehungen

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

zu benutzen.

Die Modifikation der Formeln der Feynman-Integration erfolgt gemäß:

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}^np}{[p^2 - 2pk + D + \mathrm{i}\varepsilon]^L} = -\left(\frac{\mathrm{i}^2\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(L+\varepsilon-2)}{(D-k^2)^{L+\varepsilon-2}\,\Gamma(L)} \equiv F_L^\varepsilon(D, k)\,, \tag{A VI.17}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p^\nu\,\mathrm{d}^np}{[p^2 - 2pk + D]^L} = k^\nu F_L^\varepsilon(D, k)\,, \tag{A VI.18}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p^\nu p^\mu\,\mathrm{d}^np}{[p^2 - 2pk + D]^L} = \left\{k^\nu k^\mu + \frac{g^{\nu\mu}(D-k^2)}{2(L+\varepsilon-3)}\right\} F_L^\varepsilon(D, k)\,, \tag{A VI.19}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p^2\,\mathrm{d}^np}{[p^2 - 2pk + D]^L} = \left\{k^2 + (D-k^2)\frac{2-\varepsilon}{L+\varepsilon-3}\right\} F_L^\varepsilon(D, k)\,, \tag{A VI.20}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p_\nu p^2\,\mathrm{d}^np}{[p^2 - 2pk + D]^L} = k_\nu\left\{k^2 + \frac{3-\varepsilon}{L+\varepsilon-3}(D-k^2)\right\} F_L^\varepsilon(D, k)\,. \tag{A VI.21}$$

Aus den angeführten Formeln folgt unter Berücksichtigung dessen, daß für $\varepsilon \rightarrow 0$ die asymptotische Entwicklung der Gammafunktion durch $\Gamma(\varepsilon) \rightarrow 1/\varepsilon - C$ mit der Eulerschen Kon-

stante $C = 0{,}5772\ldots$ gegeben ist:

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}^n p}{p^2 - 2pk + D} = \frac{D - k^2}{\varepsilon} + \left\{\ln \frac{\mu^2}{(k^2 - D)\,\pi} + 1 - C\right\}(D - k^2)\,, \qquad \text{(A VI.22)}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}^n p}{[p^2 - 2pk + D]^2} = -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{(k^2 - D)\,\pi}{\mu^2} + C\,, \qquad \text{(A VI.23)}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p_\nu\,\mathrm{d}^n p}{[p^2 - 2pk + D]^2} = k_\nu\left\{-\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{(k^2 - D)\,\pi}{\mu^2} + C\right\}, \qquad \text{(A VI.24)}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p_\nu p_\mu\,\mathrm{d}^n p}{[p^2 - 2pk + D]^2} = \left\{-\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{(k^2 - D)\,\pi}{\mu^2} + C\right\}\left\{k_\mu k_\nu + g_{\mu\nu}\frac{k^2 - D}{2}\right\}, \qquad \text{(A VI.25)}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p_\nu p_\mu\,\mathrm{d}^n p}{[p^2 - 2pk + D]^3} = -\frac{g_{\mu\nu}}{4\varepsilon} + \frac{k_\nu k_\mu}{2(k^2 - D)} + \frac{g_{\mu\nu}}{4}\left\{\ln \frac{(k^2 - D)\,\pi}{\mu^2} + C\right\} \qquad \text{(A VI.26)}$$

usw.

4. Cut-off-Regularisierung

Die cut-off-Regularisierung erfolgt nach dem Schema

$$\int \mathrm{d}p = \mathrm{i}\int (\mathrm{d}^4 p)_E \to \mathrm{i}\int_{\Omega(4)} \mathrm{d}\Omega \int_0^{\Lambda} p^3\,\mathrm{d}p \equiv \mathrm{reg}_\Lambda \int \mathrm{d}p\,.$$

Hier wollen wir die am häufigsten benötigten divergenten Integrale zusammenstellen. Details der entsprechenden Rechnungen kann man z. B. in [2], § 36 finden:

$$\mathrm{reg}_\Lambda \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2 - 2pk + D} = -\Lambda^2 + (D - k^2)\ln \frac{\Lambda^2}{k^2 - D}\,, \qquad \text{(A VI.27)}$$

$$\mathrm{reg}_\Lambda \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}p}{(p^2 - 2pk + D)^2} = \ln \frac{k^2 - D}{\Lambda^2} + 1\,, \qquad \text{(23.17)}$$

$$\mathrm{reg}_\Lambda \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p_\nu\,\mathrm{d}p}{(p^2 - 2pk + D)^2} = k_\nu\left(\ln \frac{k^2 - D}{\Lambda^2} + \frac{3}{2}\right), \qquad \text{(A VI.28)}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}_\Lambda \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p_\nu p_\mu\,\mathrm{d}p}{(p^2 - 2pk + D)^2} &= \frac{g_{\mu\nu}}{4}\Lambda^2 - \left\{\frac{g_{\mu\nu}}{2}(k^2 - D) + k_\mu k_\nu\right\}\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \\ &\quad - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\left\{(k^2 - D)\ln \frac{\mu^2}{k^2 - D} + \frac{5k^2 - 3D}{6}\right\} \\ &\quad + k_\mu k_\nu\left(\ln \frac{k^2 - D}{\mu^2} + \frac{11}{6}\right), \end{aligned} \qquad \text{(A VI.29)}$$

$$\mathrm{reg}_\Lambda \frac{\mathrm{i}}{\pi^2}\int \frac{p_\nu p_\mu\,\mathrm{d}p}{(p^2 - 2pk + D)^3} = -\frac{g_{\mu\nu}}{4}\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{g_{\mu\nu}}{4}\left(\ln \frac{k^2 - D}{\mu^2} + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - D}\,. \qquad \text{(A VI.30)}$$

Der Vergleich dieser Formeln mit den Formeln (A VI.22) bis (A VI.26) zeigt, daß die endlichen Anteile der betrachteten Integrale bis auf die endlichen Konstanten für die logarithmisch divergenten Integrale und bis auf endliche Polynome erster oder zweiter Ordnung für die linear bzw. quadratisch divergenten Integrale übereinstimmen.

5. Die einfachsten 1-Loop-Integrationen

Wir geben noch einige Ergebnisse von Berechnungen für 1-Loop-Diagramme an, die aus zwei inneren skalaren Linien mit unterschiedlichen Massen bestehen:

$$f \sim \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk}{(m^2 - k^2 - i\varepsilon)\,[\mu^2 - (k+p)^2 - i\varepsilon]}\,. \tag{A VI.31}$$

Der endliche Anteil der Funktion f läßt sich in der Form

$$f(p^2; m^2, \mu^2) = \int_0^1 dx \ln \frac{xm^2 + (1-x)\mu^2 - x(1-x)\,p^2 - i\varepsilon}{xm^2 + (1-x)\,\mu^2}$$

schreiben. Dieser Ausdruck ist für $p^2 < (m + \mu)^2$ reell und für $p^2 = 0$ auf Null normiert, d. h.

$$f(0; m^2, \mu^2) = 0\,.$$

Die Integration über x liefert

$$f = \left(\frac{\Delta}{2p^2} - \frac{\Sigma}{2\Delta}\right) \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{K(p)}{2} \ln \frac{\Sigma - p^2 - p^2 K(p)}{\Sigma - p^2 + p^2 K(p)} - 1\,, \tag{A VI.32}$$

wobei $\Sigma = m^2 + \mu^2$, $\Delta = m^2 - \mu^2$ und

$$K(p) = \left[\left(1 - \frac{(m+\mu)^2}{p^2}\right)\left(1 - \frac{(m-\mu)^2}{p^2}\right)\right]^{1/2}$$

gilt. Der zweite Summand in (A VI.32), der einen Logarithmus enthält, verkörpert drei verschiedene Ausdrücke für die verschiedenen Wertebereiche von p^2

$$\begin{aligned}\frac{K(p)}{2} \ln \frac{\Sigma - p^2 - p^2 K}{\Sigma - p^2 + p^2 K} &= \frac{K(p)}{2} \ln \frac{\Sigma - p^2 - p^2 K}{\Sigma - p^2 + p^2 K} \quad \text{für} \quad p^2 < (m - \mu)^2\,,\\ &= \frac{K(p)}{2} \ln \frac{\Sigma - p^2 - p^2 K}{\Sigma - p^2 + p^2 K} - i\pi K(p) \quad \text{für} \quad p^2 \geqq (m + \mu)^2\,,\\ &= Q(p) \arctan \frac{p^2 Q(p)}{\Sigma - p^2} \quad \text{für} \quad (m - \mu)^2 \leqq p^2 \leqq (m + \mu)^2\,,\end{aligned}$$

wobei

$$p^2 Q(p) = [((m + \mu)^2 - p^2)\,(p^2 - (m - \mu)^2)]^{1/2}$$

gesetzt wurde. Für den Fall übereinstimmender Massen ($\mu = m$) ergibt sich

$$f(p^2; m^2, m^2) = J\left(\frac{p^2}{4m^2}\right) - 2; \qquad J(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{1/2} \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z-1} - \sqrt{z}}\,.$$

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß die Funktion J in Abschnitt 24. eingeführt wurde und sich auch in der Form

$$J(z) = \int_0^1 dx \ln \frac{1 - 4x(1-x)\,z - i\varepsilon}{1 - 4x(1-x)} = (1 - z) \int_1^\infty \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma - 1)}\,(\sigma - z + i\varepsilon)}$$

schreiben läßt. Wenn nun eine der Massen gleich Null ($\mu = 0$) ist, so gilt

$$f(p^2; m^2, 0) = \frac{z-1}{z} \ln (1 - z) - 1\,, \qquad z = p^2/m^2\,.$$

Analoge Ausdrücke trifft man auch bei der Berechnung der Elektron-Selbstenergie (siehe (24.17)) und der Vertexfunktion an. In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß der

Logarithmus aus dem Parameter-Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\frac{p^2}{m^2} - 1} = \frac{m^2}{p^2} \ln \frac{m^2 - p^2}{m^2}$$

hervorgeht, welches auf der Massenschale, d. h. bei $p^2 = m^2$, singulär ist. Diese Singularität ist eine Erscheinung der Infrarotdivergenz. Sie ist mit Singularitäten des Integranden des ursprünglichen Feynman-Integrals bei kleinen virtuellen Impulsen k verbunden.

Deshalb muß der Übergang zum Grenzwert $\mu = 0$ in einigen Fällen sehr akkurat vollzogen werden. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß bei kleinem, aber endlichem μ^2 das Integral auf der linken Seite durch

$$A(p^2) = \int_0^1 \frac{m^2(x-1)\,dx}{(1-x)(m^2 - xp^2) + x\mu^2} = \begin{cases} \frac{m^2}{p^2} \ln \frac{m^2 - p^2}{m^2} & \text{für } |p^2 - m^2| \gg \mu^2\,, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\mu^2}{m^2} & \text{für } p^2 = m^2 \end{cases} \tag{29.17}$$

ersetzt werden muß (siehe Abschnitt 29.4.). Die Darstellung der Funktion f durch A

$$\lim_{\mu^2 \to 0} f(p^2; m^2, \mu^2) = \frac{p^2 - m^2}{m^2} A(p^2) - 1 \tag{A VI.33}$$

erweist sich für die Durchführung der Subtraktion des Massenoperators des Elektrons $\Sigma(p)$ auf der Massenschale und für die Berechnung der Vertexfunktion als nützlich (siehe Abschnitte 24.3., 29.4., 29.5.).

A VII. Kinematische Relationen für die verallgemeinerten Vertizes

1. Der 3-Vertex

Betrachten wir die in Abb. A VII.1 gegebene physikalische Situation: Aus den drei Vektoren p_1, p_2 und p_3, deren Summe gleich Null ist,

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0\,,$$

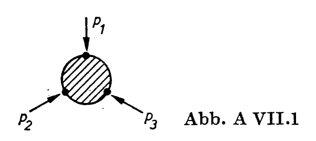


Abb. A VII.1

kann man drei linear unabhängige Invarianten bilden:

$$p_1^2, p_2^2 \quad \text{und} \quad p_3^2 = (p_1 + p_2)^2\,. \tag{A VII.1}$$

Diese Größen können jedoch nicht in jedem Fall für reelle Werte der Komponenten der Vektoren p_1, p_2 und p_3 realisiert werden.

In der Quantenelektrodynamik ist der Fall von Interesse, für den zwei dieser Quadrate positiv und gleich dem Quadrat der Elektronenmasse sind, und das dritte Quadrat gleich Null ist:

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2\,, \qquad k^2 = 0 \qquad (k = p_3)\,. \tag{A VII.2}$$

Sollen nun die Komponenten aller Vektoren reell sein, so führt das System der Gleichungen (A VII.2) zur Forderung $k_\nu = 0$, $p_1 = -p_2$. Damit können alle drei äußeren Linien des Elektron-Photon-Vertex nur dann auf der Massenschale liegen, wenn das Photon eine verschwindend kleine Frequenz hat.

Das Gebiet

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2 , \qquad k^2 < 0 , \tag{A VII.3}$$

das der Emission oder Absorption eines raumartigen Photons durch ein Elektron entspricht, ist jedoch kinematisch ebenso erlaubt, wie das Gebiet

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2 , \qquad k^2 \geqq 4m^2 , \tag{A VII.4}$$

das der Annihilation eines Elektron-Positron-Paares korrespondiert.

Im Falle eines Meson-Nukleon-3-Vertizes, der die Yukawa-Wechselwirkung beschreibt (der Impuls des Mesons p_3 ist gleich k), können nicht alle drei Impulse gleichzeitig auf der Massenschale liegen. Die Punkte

$$p_1^2 = p_2^2 = M^2 , \qquad k^2 = \mu^2 < M^2 \tag{A VII.5}$$

sind kinematisch nicht erlaubt. Diesen Umstand hat man bei der Formulierung der Subtraktionsvorschrift für die Singularitäten in den entsprechenden Modellen der Quantenfeldtheorie zu berücksichtigen.

2. Der 4-Vertex

Der skalare Vertex mit vier äußeren Linien (Abb. A VII.2) ist infolge der Lorentz-Invarianz eine Funktion der Skalarprodukte $p_i p_j$ aller vier Impulse. Wegen des Erhaltungssatzes für den

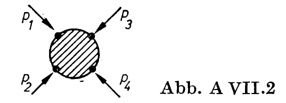


Abb. A VII.2

Gesamtimpuls,

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 ,$$

sind allerdings nur sechs dieser Skalarprodukte voneinander linear unabhängig. Vier von ihnen identifiziert man natürlich mit den Quadraten der äußeren Impulse p_i, und für die beiden verbleibenden wählt man gewöhnlich $(p_i + p_j)^2$. Es gibt jedoch drei solcher Ausdrücke,

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 , \qquad t = (p_1 + p_3)^2 , \qquad u = (p_1 + p_4)^2 , \tag{A VII.6}$$

die wegen der Energie-Impuls-Erhaltung die Beziehung

$$s + t + u = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \tag{A VII.7}$$

erfüllen.

Um den physikalischen Sinn der Variablen s, t und u zu verstehen, sei bemerkt, daß man den betrachteten 4-Vertex durch sechs Prozesse des Typs „2 Teilchen → 2 Teilchen" realisieren kann:

$$\begin{matrix} 1 + 2 \to 3 + 4 , & 1 + 3 \to 2 + 4 , & 1 + 4 \to 2 + 3 , \\ 3 + 4 \to 1 + 2 , & 2 + 4 \to 1 + 3 , & 2 + 3 \to 1 + 4 . \end{matrix} \tag{A VII.8}$$

Hierbei bedeuten die Ziffern die Indizes der Teilchen. Die drei Prozesse der letzten Zeile sind mit denen der ersten Zeile durch die Umkehr des Vorzeichens aller Impulse verknüpft und entsprechen damit denselben Werten der quadratischen Impulsvariablen. Damit ist es für

unser Anliegen hinreichend, die folgenden drei Möglichkeiten zu unterscheiden:

$$
\begin{array}{ll}
\text{I} & \text{II} \\
1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4 & 1 + 3 \leftrightarrow 2 + 4 \\
p_1 + p_2 \to (-p_3) + (-p_4) & p_1 + p_3 \to (-p_2) + (-p_4) \\
p_3 + p_4 \to (-p_1) + (-p_2) & p_2 + p_4 \to (-p_1) + (-p_3) \\
\text{III} & \\
1 + 4 \leftrightarrow 2 + 3 & \\
p_1 + p_4 \to (-p_2) + (-p_3) & \\
p_2 + p_3 \to (-p_1) + (-p_4) , &
\end{array}
\qquad \text{(A VII.9)}
$$

wobei jede von ihnen eine bestimmte Reaktion und die zu ihr inverse beschreibt und einem bestimmten Reaktions-*Kanal* entspricht.

Im ersten Kanal spielt die Variable $s = (p_1 + p_2)^2$ die Rolle des relativistisch invarianten Quadrats der Gesamtenergie, und die Variable $t = (p_1 + p_3)^2$ ist das invariante Quadrat des Impulsübertrags vom Teilchen 1 auf das Teilchen 3. Die Variable $u = (p_1 + p_4)^2$ beschreibt ihrerseits den Impulsübertrag vom Teilchen 1 auf das Teilchen 4. Deshalb gilt im physikalischen Bereich des Kanals I:

$$s \geqq (m_1 + m_2)^2 , \qquad s \geqq (m_3 + m_4)^2 , \qquad u, t < 0 .$$

Im weiteren wollen wir voraussetzen, daß die Massen aller vier Teilchen übereinstimmen. Dann haben wir

$$s \geqq 4m^2 , \qquad t \leqq 0 , \qquad u \leqq 0 . \qquad \text{(A VII.10-I)}$$

Die analogen physikalischen Bereiche der Kanäle II und III sind

$$t \geqq 4m^2 , \qquad u \leqq 0 , \qquad s \leqq 0 , \qquad \text{(A VII.10-II)}$$

$$u \geqq 4m^2 , \qquad s \leqq 0 , \qquad t \leqq 0 . \qquad \text{(A VII.10-III)}$$

Dabei genügen die Variablen s, t und u auf der Massenschale gemäß (A VII.7) der Summenregel

$$s + t + u = 4m^2 . \qquad \text{(A VII.11)}$$

Diese Situation kann man sich unter Verwendung von Dreieckskoordinaten veranschaulichen, für die sich die Achsen der Variablen s, t und u in ihren Richtungen um 120° unterscheiden (Abb. A VII.3).

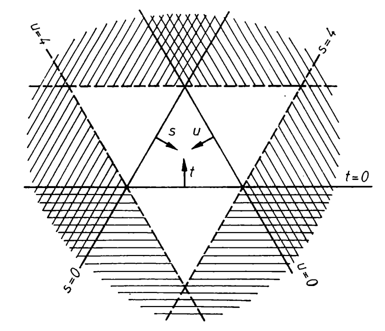


Abb. A VII.3
Ebene der kinematischen Variablen s, t und u des 4-Vertex. Die physikalischen Bereiche sind doppelt schraffiert; das Zentrum des Dreiecks, das durch die Bedingungen $s, t, u \leqq 4\,m^2$ charakterisiert ist, entspricht jenem kinematischen Gebiet, in dem der 4-Vertex reell ist.

In den physikalischen Bereichen (A VII.10) ist die Streuamplitude, die ja den Elementen der Streumatrix proportional ist, eine komplexe Größe. Deshalb darf man den Subtraktionspunkt des 4-Vertex nicht aus diesem Bereich wählen. Eine Ausnahme bilden allerdings jene Punkte,

die den Reaktionsschwellen entsprechen:

$$s = 4m^2\,,\qquad t = u = 0\,, \tag{A VII.12-I}$$

$$t = 4m^2\,,\qquad u = s = 0\,, \tag{A VII.12-II}$$

$$u = 4m^2\,,\qquad s = t = 0\,. \tag{A VII.12-III}$$

Der Vertex erweist sich als reell innerhalb des Dreiecks, das durch die Geraden $s = 4m^2$, $t = 4m^2$ und $u = 4m^2$ begrenzt ist, welche ihrerseits den Reaktionsschwellen der Prozesse I, II und III entsprechen.

Schon in der zweiten Ordnung der Störungstheorie für das φ^4-Modell geben die sogenannten „Fisch"-Diagramme Beiträge zum 4-Vertex. Diese Diagramme besitzen, wie wir durch explizite Berechnung im Abschnitt 24.1. festgestellt haben, einen Imaginärteil, der oberhalb der Zweiteilchenschwelle von Null verschieden ist.

A VIII. Die Feynman-Regeln für die Yang-Mills-Felder

In diesem Anhang sind die wichtigsten Regeln zur Konstruktion der Streumatrix im Rahmen der Störungstheorie für jene Modelle von Quantenfeldern zusammengestellt, die nichtabelsche Eichfelder enthalten. Wegen der Kompliziertheit der Quantisierungsprozedur haben wir keine Möglichkeit, die Herleitung dieser Regeln zu diskutieren. Es sei nur bemerkt, daß es in der zweiten Hälfte der 60er Jahre gelang, Yang-Mills-Felder vermöge der Darstellung der Streumatrix in Form eines Funktionalintegrals zu quantisieren (siehe z. B. [2]). Andererseits haben aber die auf Yang-Mills-Feldern basierenden Quantenfeldtheorien in den letzten Jahren eine immer größere Bedeutung sowohl in elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen (einheitliche Theorien vom Typ des Weinberg-Salam-Modells; siehe Abschnitt 32.) als auch in den starken Wechselwirkungen (Quantenchromodynamik, siehe Abschnitt 33.) erlangt.

1. Das freie Yang-Mills-Feld

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall eines freien Yang-Mills-Feldes B_ν^a mit der Eichgruppe G. Die klassische Lagrange-Dichte schreiben wir in der Form

$$\mathcal{L}(B) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial B^a)(\partial B^a)\,, \tag{A VIII.1}$$

die sich von dem im Abschnitt 11.1. benutzten Ausdruck für $\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}$ durch das Vorhandensein eines zweiten Summanden unterscheidet, der die Eichung des Feldes B_ν^a fixiert. Die Einführung eines solchen Gliedes in die Lagrange-Dichte des abelschen Eichfeldes wurde bereits im Abschnitt 4.3. diskutiert.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ in zwei Summanden aufzuspalten:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(B) + \mathcal{L}_1(B, g)\,, \tag{A VIII.2}$$

wobei der erste Summand alle diejenigen Glieder enthält, die bezüglich der Komponenten B und ihrer Ableitungen quadratisch sind, d. h.

$$\mathcal{L}_0(B) = -\frac{1}{4}H_{\mu\nu}^a H^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial B^a)^2 \tag{A VIII.3}$$

mit

$$H_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a\,,$$

und der zweite Summand enthält die Glieder höherer Ordnung:

$$\mathcal{L}_1(B, g) = -\,\mathrm{i}\,\frac{g}{2}\,t^{abc}H_{\mu\nu}^a B_\mu^b B_\nu^c + \frac{g^2}{4}(t^{abc}B_\mu^b B_\nu^c)^2\,. \tag{A VIII.4}$$

Wir wollen daran erinnern (siehe Abschnitt 4.3.), daß infolge des Vorhandenseins des zweiten Summanden in Gl. (A VIII.3) der Differentialoperator der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0(B) = -\tfrac{1}{2} B^a_\mu K^{\mu\nu} B^a_\nu\,, \tag{A VIII.5}$$

$$K^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial^2 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\,\partial^\mu\partial^\nu \qquad (\partial^2 = -\,\Box)$$

nicht singulär ist, d. h., es existiert der inverse Operator

$$K^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{\Box^2}\,\{g_{\mu\nu}\partial^2 - (1-\alpha)\,\partial_\mu\partial_\nu\}\,. \tag{A VIII.6}$$

Die quadratische Lagrange-Dichte (A VIII.3) bzw. (A VIII.5) wird oft auch als „freie" Lagrange-Dichte bezeichnet. In diesem Fall nennt man die mit Hilfe einer Lagrange-Dichte vom Typ (11.10) und (A VIII.1) beschriebenen Felder „Yang-Mills-Felder im Vakuum". Um nun eine Verwechslung von Begriffen zu vermeiden (und in Übereinstimmung mit der Terminologie von Abschnitt 19.), bezeichnen wir das Feld, welches durch die aus den quadratischen Lagrange-Dichten (A VIII.3) bzw. (A VIII.5) folgenden linearen Gleichungen beschrieben wird, als Feld in linearer Näherung oder als „lineares Yang-Mills-Feld". Das Yang-Mills-Feld, welches durch die Lagrange-Dichten (11.10) und (A VIII.1) beschrieben wird und den nichtlinearen Gleichungen (11.11) genügt, die keine Wechselwirkungsterme mit anderen Feldern (d. h. mit Materiefeldern) enthalten, bezeichnen wir in Übereinstimmung mit der physikalischen Problematik als „freies Yang-Mills-Feld".

Wenn die Kopplungskonstante g hinreichend klein ist ($g \ll 1$), dann kann man die freie Yang-Mills-Theorie störungstheoretisch behandeln und damit über die lineare Näherung hinausgehen. Eine solche Störungstheorie wurde schematisch im Abschnitt 9.4. untersucht. In diesem Fall geht in die Diagrammtechnik der masselose Propagator

$$\langle TB^a_\nu(x)\,B^b_\mu(y)\rangle = \mathrm{i}\delta^{ab}\Delta^c_{\nu\mu}(x-y)$$

in beliebiger Eichung mit

$$\Delta^c_{\nu\mu}(x;\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k}{-k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\left\{g_{\nu\mu} - (1-\alpha)\,\frac{k_\nu k_\mu}{k^2+i\varepsilon}\right\} \tag{A VIII.7}$$

ein, ferner gehen die den Beiträgen 3. und 4. Ordnung aus (A VIII.4) entsprechenden Vertizes ein. Wie in Abschnitt 19. erklärt wurde, führt das zu Schwierigkeiten mit der Unitarität der S-Matrix. Diese können aber durch die Einführung fiktiver masseloser skalarer Felder (die Faddeev-Popov-Geister) $\xi^a(x)$ beseitigt werden, welche sich nach der adjungierten Darstellung der Eichgruppe transformieren (siehe Gl. (19.20)):

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_0(\xi) + \mathcal{L}_1(\xi, B)\,, \tag{A VIII.8}$$

wobei

$$\mathcal{L}_0(\xi) = -\partial^\mu\bar{\xi}^a(x)\,\partial_\mu\xi^a(x)\,, \tag{A VIII.9}$$

$$\mathcal{L}_1(\xi, B) = \mathrm{i}gt^{abc}\bar{\xi}^a B^b_\nu\,\partial^\nu\xi^c \tag{A VIII.10}$$

gilt. Dabei hat man das Geisterfeld ξ formal als Fermi-Dirac-Feld zu quantisieren, was sich letztlich darin ausdrückt, daß jedem geschlossenen Geister-Loop des Feynman-Diagramms im Matrixelement ein Faktor -1 entspricht.

Damit enthalten also die Feynman-Diagramme für das freie Yang-Mills-Feld sowohl innere und äußere Linien des Yang-Mills-Feldes als auch innere Linien des Geisterfeldes. Die entsprechenden Feynman-Regeln im Ortsraum sind bereits im Abschnitt 19.4. formuliert worden.

Im Impulsraum enthalten die Feynman-Regeln des freien Yang-Mills-Feldes folgende Elemente:

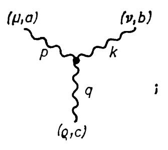
a) Den Propagator der masselosen Vektorbosonen

$$\Delta^{ab}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta^{ab}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left[g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right], \tag{A VIII.11}$$

(μ,a) ~~~ (ν,b) ; k

b) den 3-Vertex der dreifachen Selbstwechselwirkung der Vektorbosonen

$$V_3 = ig t^{abc}[(p-k)_\varrho\, g_{\mu\nu} + (k-q)_\mu\, g_{\nu\varrho} + (q-p)_\nu\, g_{\mu\varrho}]\, \delta(p+k+q) \qquad \text{(A VIII.12)}$$

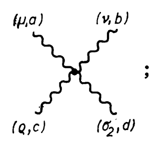


;

(in diesem Diagramm, und auch in allen folgenden Vertexdiagrammen, betrachten wir alle Impulse per definitionem als einlaufend);

c) den 4-Vertex der vierfachen Selbstwechselwirkung der Vektorbosonen

$$V_4 = g^2 \left\{ t^{abe} t^{cde} (g_{\mu\varrho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\varrho}) + \begin{pmatrix} b \leftrightarrow c \\ \nu \leftrightarrow \varrho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \leftrightarrow d \\ \nu \leftrightarrow \sigma \end{pmatrix} \right\} \delta(\sum k) \qquad \text{(A VIII.13)}$$



;

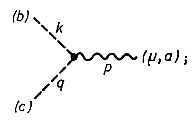
d) den Geisterpropagator

$$\Delta_\xi^{ab}(p) = i\, \frac{\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon} \qquad \text{(A VIII.14)}$$

(a) ●- - - - - - - -● (b) ;
p

e) den Vertex der Wechselwirkung von Geistern und Vektorbosonen

$$V_{\xi\xi B} = -\frac{ig}{2}\, t^{abc}(k-q)_\mu\, \delta(k+q+p) \qquad \text{(A VIII.15)}$$



f) den Vorzeichenfaktor

$$\eta = (-1)^g, \qquad \text{(A VIII.16)}$$

wobei g die Anzahl der geschlossenen Geister-Loops ist.

2. Die Wechselwirkung des Yang-Mills-Feldes mit Materiefeldern

Wie schon im Abschnitt 11.2. erwähnt wurde, wird die Wechselwirkung der Eichfelder mit den Materiefeldern auf einheitliche Weise durch die kovariante Verallgemeinerung der partiellen Ableitungen eingeführt.

Deshalb entsprechen jedem spinoriellen Materiefeld ψ^a mit der Masse m die folgenden Feynman-Regeln:

a) Der Spinorpropagator

$$S^{AB}(p) = \frac{\delta^{AB}}{i} \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \tag{A VIII.17}$$

(a) —p→ (b) ;

b) der Vertex der Wechselwirkung mit Vektorbosonen

$$V_{\psi\psi B} = -g\gamma_\nu (T^c)_{AB}\, \delta(p_1 + p_2 + q) \tag{A VIII.18}$$

(a), p_1, (b), p_2, q, (ν, c) ;

c) der Vorzeichenfaktor

$$\eta_f = (-1)^f ,$$

wobei f die Anzahl der Fermion-Loops ist.

Jedem (pseudo)skalaren Materiefeld u mit der Masse μ entsprechen:

a) Der (pseudo)skalare Propagator

$$D^{AB}(k) = \frac{-i\delta^{AB}}{\mu^2 - k^2 - i\varepsilon} \tag{A VIII.19}$$

(a) - - - k - - - (b) ;

b) der 3-Vertex der Wechselwirkung mit den Vektorbosonen

$$V_{uuB} = -g(T^c)_{AB}\, (k - p)_\mu\, \delta(k + p + q) \tag{A VIII.20}$$

(a), k, (b), p, q, (μ, c) ;

c) der 4-Vertex der Wechselwirkung mit den Vektorbosonen

$$V_{uuBB} = g^2 g_{\mu\nu}((T^a)_{AC}\, (T^b)_{BC} + (T^b)_{AC}\, (T^a)_{BC})\, \delta(k_1 + k_2 + q_1 + q_2) \tag{A VIII.21}$$

(a), k_1, (b), k_2, (μ, c), q_1, (ν, d), q_2 ;

d) andere mögliche Vertizes der Selbstwechselwirkung des skalaren Feldes (vom Typ u^4) oder seiner Wechselwirkung mit anderen Materiefeldern.

3. Das massive Yang-Mills-Feld

Jetzt wollen wir noch die Feynman-Regeln für ein massives Eichfeld formulieren, wobei die Masse mit Hilfe des Higgs-Mechanismus im Ergebnis der spontanen Symmetriebrechung durch das skalare Hilfsfeld entsteht.

Um eine Korrespondenz zum Weinberg-Salam-Modell herzustellen, werden wir den Fall des Yang-Mills-Feldes mit der Gruppe SU(2) betrachten, das mit dem komplexen skalaren Feld φ^a wechselwirken soll, welches sich nach der Spinordarstellung ($a = 1, 2$) der Eichgruppe transformiert. Das Feld φ enthält damit insgesamt vier reelle skalare Felder. Diese Situation stellt die einfachste Erweiterung des im Abschnitt 11.4. beschriebenen Modells der spontanen Brechung der Eichsymmetrie dar.

Im Ergebnis der Verschiebung der zweiten Komponente des Dubletts φ um eine reelle Konstante η und des Übergangs zu vier neuen reellen skalaren Feldern σ, $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$,

$$\varphi^1 = \frac{i\Phi^1 + \Phi^2}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi^2 = \eta + \frac{\sigma - i\Phi^3}{\sqrt{2}}, \tag{A VIII.22}$$

nimmt die ursprüngliche Lagrange-Dichte (32.4) folgende Form an:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) = &-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu B^a_\mu)^2 + \frac{M^2}{2}(B^a_\mu B^{a\mu}) \\ &+ \frac{1}{2}[\partial_\mu\sigma\, \partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2] + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi^a)^2 + M B^a_\mu\, \partial^\mu\Phi^a \\ &- \frac{g}{2} B^{a\mu}(\sigma\,\partial_\mu\Phi^a - \Phi^a\,\partial_\mu\sigma) + g\varepsilon^{abc} B^{a\mu}\Phi^b\,\partial_\mu\Phi^c - \frac{Mg}{2}\sigma(B^a_\mu B^{a\mu}) \\ &+ \frac{g^2}{8}(\sigma^2 + \Phi^2)(B^a_\mu)^2 + \frac{g m_\sigma^2}{4M}\sigma(\sigma^2 + \Phi^2) - \frac{\lambda^2}{16}(\sigma^2 + \Phi^2)^2 .\end{aligned} \tag{A VIII.23}$$

Hierbei wurden die Abkürzungen

$$\Phi^2 = \Phi^a\Phi^a$$

sowie

$$M = \frac{\eta g}{\sqrt{2}}, \qquad m_\sigma = \eta\lambda \tag{A VIII.24}$$

verwendet.

Die Lagrange-Dichte (A VIII.23) enthält drei massive Vektorfelder B^a mit der Masse M, ein skalares Higgs-Feld σ mit der Masse m_σ und drei masselose Goldstone-Felder Φ^a.

Wegen des Vorhandenseins des diagonalen Gliedes

$$M B^a_\mu \partial^\mu \Phi^a \tag{A VIII.25}$$

sind das Goldstone-Feld $\Phi(x)$ und der longitudinale Anteil des Vektorfeldes keine unabhängigen dynamischen Variablen. Deshalb kann man durch eine geeignete Wahl der Eichung entweder Φ oder aber ∂B^a zu Null machen. Die Eichung $\Phi = 0$ heißt unitär. In dieser Eichung enthält die Lagrange-Dichte nur physikalische Felder: ein Triplett massiver Vektormesonen und ein massives Higgs-Meson.

Für explizite Rechnungen ist allerdings die sogenannte transversale Eichung $\partial B^a = 0$ besser geeignet, für die der Vektorpropagator folgendes Aussehen hat:

$$\Delta^{ab}_{\mu\nu}(k) = i\delta^{ab}\, \frac{g_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{M^2 - k^2 - i\varepsilon}, \tag{A VIII.26}$$

(μ, a) ∿∿∿∿∿ (ν, b) .
k

Das Glied $B^a_\mu\, \partial^\mu\Phi^a \sim -\Phi^a\, \partial^\mu B^a_\mu$ ist jedoch in diesem Fall infolge der Transversalität des Yang-Mills-Feldes nicht effektiv wirksam, weil die zeitgeordneten Kontraktionen der Divergenz $\partial^\mu B^a_\mu$ gleich Null werden (Manchmal sagt man auch: „das Feld ∂B^a breitet sich nicht aus".).

Außer dem transversalen Propagator (A VIII.26) des Vektorfeldes enthalten die Feynman-Regeln Ausbreitungsfunktionen der Faddeev-Popov-Geister und die Vertizes (A VIII.15)

ihrer Wechselwirkung mit dem Yang-Mills-Feld, ferner Ausbreitungsfunktionen der Goldstone-Teilchen

$$\overline{\Phi^a(k)\,\Phi^b(k)} \sim \mathrm{i}\,\frac{\delta^{ab}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{A VIII.27}$$

und des Higgs-Bosons

$$\overline{\sigma(k)\,\sigma(k)} \sim -\frac{\mathrm{i}}{m_\sigma^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon} \tag{A VIII.28}$$

sowie mehrere Vertizes der Wechselwirkung der Felder B, Φ, σ, die man leicht aus der dritten und vierten Zeile der Lagrange-Dichte (A VIII.23) ableiten kann und möglicherweise auch noch Propagatoren und Vertizes vom Typ (A VIII.17)–(A VIII.21) für die verschiedenen Materiefelder.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß sowohl die den Faddeev-Popov-Geistern als auch die den Goldstone-Bosonen korrespondierenden Felder $\Phi(x)$ nur in inneren Linien der Feynman-Diagramme auftreten.

4. Einige Regeln zur Berechnung von Spuren. Casimir-Operatoren

In die Feynman-Regeln der Vertizes gehen stets die Erzeugenden der Eichgruppe G in einer bestimmten (Matrix-)Darstellung $(T^a)_{AB}$ ein, da sie, abgesehen von dem gemeinsamen Faktor g, die Wechselwirkung der Teilchen charakterisieren; demgegenüber geht in die Feynman-Regeln der Propagatoren stets die Einheitsmatrix δ_{AB} ein, da sich bei der Bewegung freier Teilchen dessen Quantenzahlen nicht ändern. Man hat daher bei der Berechnung solcher Feynman-Diagramme, die geschlossene Linien jeweils einer Teilchensorte enthalten, stets Spuren der Matrizen T^a zu bestimmen. Die Spur zweier Erzeugender tritt beispielsweise bei der Berechnung der Gluon-Selbstenergie in niedrigster störungstheoretischer Ordnung auf (siehe (19.24) und (19.25) und Abb. 19.4), und ist folglich proportional zu δ_{AB},

$$\mathrm{Sp}\; T_a T_b = T(R)\,\delta_{ab}\,, \tag{A VIII.29}$$

wobei $T(R)$ der Wert der Spur für die Darstellung R von G ist.

Wir wollen nun $T(R)$ mit dem Eigenwert $C_2(R)$ des quadratischen Casimir-Operators in Beziehung setzen. Hierzu bemerken wir zunächst, daß die irreduziblen Darstellungen R halbeinfacher Lie-Gruppen weitestgehend durch die Eigenwerte $C_m(R)$ der mit allen Erzeugenden kommutierenden Casimir-Operatoren C_m charakterisiert sind. Diese Operatoren sind in der Form

$$\begin{aligned} C_m &= \mathrm{i}^m C^{b_2}_{a_1 b_1} C^{b_3}_{a_2 b_2} \dots C^{b_1}_{a_m b_m} T^{a_1} T^{a_2} \dots T^{a_m} \\ &= \mathrm{Sp}\,(t_{a_1} t_{a_2} \dots t_{a_m})\, T^{a_1} T^{a_2} \dots T^{a_m} \end{aligned} \tag{A VIII.30}$$

für jede Matrix-Darstellung wohldefiniert; hierbei sind C^c_{ab} die gemäß

$$[T_a, T_b] = \mathrm{i} C^c_{ab} T_c \tag{A III.7}$$

eingeführten Strukturkonstanten der Gruppe. Der quadratische Casimir-Operator ist daher durch

$$C_2 = g_{ab} T^a T^b \tag{A VIII.31}$$

gegeben, wobei

$$g_{ab} = -C^d_{ac} C^c_{bd} \equiv \mathrm{Sp}\; t_a t_b \tag{A VIII.32}$$

nach E. CARTAN eine nicht-entartete Metrik in der Lie-Algebra A von G definiert; für die physikalisch wichtigen Gruppen SU(N) gilt

$$g_{ab} = N\delta_{ab} \quad \text{für} \quad \mathrm{SU}(N)\,. \qquad \text{(A VIII.33)}$$

Aus den Vertauschungsrelationen (A III.7) der Erzeugenden und der Antisymmetrie der Strukturkonstanten, $C^c_{ab} = -C^c_{ba}$, folgt unmittelbar die Vertauschbarkeit von C_2 mit allen Erzeugenden T_a, d. h., C_2 ist in jeder Darstellung ein Vielfaches der Einheitsmatrix, und wir erhalten

$$\mathrm{Sp}\, C_2 = C_2(R)\, \mathrm{d}(R)\,, \qquad \text{(A VIII.34)}$$

wobei $d(R)$ die Dimension der Darstellung R ist.

Andererseits folgt aus (A VIII.31)

$$\mathrm{Sp}\, C_2 = g_{ab}\, \mathrm{Sp}\, T^a T^b = \sum_{a=1}^{n} (T^a)^2 = T(R)\, n\,, \qquad \text{(A VIII.35)}$$

wobei $n = \mathrm{d}(G)$ die Dimension der Lie-Algebra A ist, und es gilt

$$T(R) = C_2(R)\, \mathrm{d}(R)/n\,. \qquad \text{(A VIII.36)}$$

Für die Gruppe SU(N) sind die fundamentalen Darstellungen (N) in Verallgemeinerung der Pauli- bzw. Gell-Mann-Matrizen für SU(2) bzw. SU(3) durch $N \times N$-Matrizen realisiert. Sie genügen der Normierungsbedingung

$$T(N) = \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad \mathrm{SU}(N)\,.$$

Die adjungierte Darstellung (G) hat die Dimension $n = N^2 - 1$, und es gilt wegen (A VIII.33)

$$T(G) \equiv C_2(G) = N \quad \text{für} \quad \mathrm{SU}(N);$$

damit folgt schließlich

$$C_2(N) = (N^2 - 1)/2N \quad \text{für} \quad \mathrm{SU}(N)$$

(Wir weisen hier ausdrücklich darauf hin, daß gelegentlich die Normierung der Erzeugenden so gewählt wird, daß $T(R) = 2$ für alle Darstellungen gilt; z.B. in [22]).

Für die Spuren mit mehr als zwei Erzeugenden kann man analoge Relationen ableiten. So gilt z.B. auf Grund von (A III.7)

$$\mathrm{Sp}\,([T_a, T_b]\, T_c) = -t_{abc} T(R);$$

diese Relation spiegelt die Tatsache wider, daß die Vertexfunktion Γ_3, die in niedrigster störungstheoretischer Näherung durch das Diagramm der Abb. 32.1 und ein ebensolches Diagramm mit umgekehrtem Umlaufsinn gegeben ist, proportional zu (A VIII.12) sein muß.

A IX. Die Renormierungsgruppe

1. Einführung

Die Methode der Renormierungsgruppe ist das wichtigste Hilfsmittel der Quantenfeldtheorie zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens der Green-Funktionen und der Matrixelemente sowohl im ultravioletten als auch im infraroten Bereich. Sie erlangte in den siebziger Jahren besondere Bedeutung für die Quantenchromodynamik.

Die Renormierungsgruppe (RG) ist die Gruppe jener endlichen Transformationen der Green-Funktionen und ihrer Parameter (Kopplungskonstanten, Massen, Eichparameter), die der Einführung endlicher Konterterme in die Lagrange-Dichte entsprechen und die die Renormierbarkeit der Quantenfeldtheorie nicht verletzen. Beispiele solcher Transformationen sind die in den Abschnitten 28.1. und 29.5. behandelten endlichen multiplikativen Dyson-Transfor-

mationen. Ausgehend von diesen Transformationen lassen sich funktionale Gleichungen für die Green-Funktionen und die Vertexfunktionen sowie die ihnen äquivalenten Lieschen Differentialgleichungen ableiten. Diese Gleichungen ermöglichen eine effektive Verbessserung der störungstheoretischen Aussagen im ultravioletten und im infraroten Bereich. In diesem Anhang haben wir jene Begriffe und Gleichungen der RG-Methode zusammengestellt, die zum Verständnis der in Abschnitt 33. dargelegten physikalischen Folgerungen notwendig sind.

Die Einführung der Renormierungsgruppe geht auf Arbeiten von STÜCKELBERG und PETERMANN aus dem Jahre 1953 zurück. Die Funktionalgleichungen der RG wurden von GELL-MANN und LOW 1954 formuliert, und ihre Lie-Gleichungen wurden erstmalig 1955 von BOGOLJUBOV und ŠIRKOV angegeben (und zur Aufsummation der Ultraviolett- und Infrarot-Logarithmen verwendet). Eine ausführliche Darstellung dieses Gegenstandes findet der Leser in [1], Kap. IX.

2. Die funktionalen Gleichungen der Renormierungsgruppe

Gewöhnlich werden diese Funktionalgleichungen für die Green-Funktionen in der Impulsdarstellung angegeben, weil die im Prozeß der Renormierung auftretende endliche Willkür auf natürliche Weise durch den sogenannten Normierungsimpuls (oder Subtraktionspunkt μ) in der Impulsdarstellung (siehe Abschnitt 28.) parametrisiert werden kann. Als typisches Beispiel betrachten wir eine skalare Funktion d, die nur vom Quadrat p^2 der Impulsvariablen abhängt. Dabei kann es sich um den transversalen Teil $d(p^2, \alpha)$ des Photonpropagators (vgl. (29.10)), den Massenoperator $M(p^2, \alpha)$ eines skalaren Teilchens (vgl. (27.3)), um eine Vertexfunktion des Typs (28.18) mit zusammenfallenden unabhängigen Variablen oder die skalaren Anteile s_i des Masseoperators eines Fermions handeln.

Für die hier zu behandelnden Fragen ist es zweckmäßig, mit dimensionslosen Größen zu arbeiten, die in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie auf Eins normiert sind. Als Beispiel betrachten wir den transversalen Teil des Photonpropagators der Elektrodynamik; er hängt außer vom störungstheoretischen Entwicklungsparameter α und der Impulsvariablen k^2 auch von der Masse m des Elektrons und dem Quadrat μ^2 des Normierungsimpulses (oder des dimensionsbehafteten Parameters der Dimensionsrenormierung) ab:

$$d = d\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \alpha\right). \tag{A IX.1}$$

Nach Definition gilt $d(\alpha = 0) = 1$. Werden die UV-Divergenzen mit Hilfe der R-Operation durch Subtraktion im Punkt $k^2 = \mu^2 \leq 0$ beseitigt, so daß sich beispielsweise in der Ein-Loop-Näherung mit den Bezeichnungen des Abschnitts 29.3. die Beziehung

$$d\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \alpha\right) = 1 + \frac{\alpha}{\pi}\left[I\left(\frac{k^2}{4m^2}\right) - I\left(\frac{\mu^2}{4m^2}\right)\right] + O(\alpha^2)$$

ergibt, dann gilt außerdem

$$d\left(1, \frac{m^2}{\mu^2}, \alpha\right) = 1\,. \tag{A IX.2}$$

Hierbei weichen wir bewußt von der üblichen Subtraktion des Photonpropagators im Punkt $k^2 = 0$ ab, der physikalisch das Ausbleiben von Strahlungskorrekturen für Prozesse mit langwelligen Photonen entspricht, und bei der der Entwicklungsparameter α mit der Feinstrukturkonstante

$$\alpha_0^{-1} = 137{,}036\,\ldots$$

(die wir in diesem Zusammenhang mit dem unteren Index „0“ versehen) zusammenfällt. Auf diese Weise ist die Funktion in Formel (A IX.1) in einem beliebigen Punkte $\mu^2 < 0$ auf 1 normiert. Die im Punkte $\mu^2 = 0$ normierte Funktion bezeichnen wir mit $d_0(k^2/m^2, \alpha_0)$. Die endliche Dyson-Transformation von d_0 in d (mit beliebigen μ^2) kann man dann in der Form

$$d_0\left(\frac{k^2}{m^2}, \alpha_0\right) = z_3 d\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \alpha\right), \qquad \alpha = z_3\alpha_0, \tag{A IX.3}$$

schreiben. Durch zweimalige Anwendung dieser Transformation ergibt sich

$$d\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \alpha\right) = \tilde{z}_3 d\left(\frac{k^2}{\tilde{\mu}^2}, \frac{m^2}{\tilde{\mu}^2}, \tilde{\alpha}\right), \qquad \tilde{\alpha} = \tilde{z}_3\alpha\,. \tag{A IX.4}$$

Die Formeln (A IX.3) und (A IX.4) bringen zum Ausdruck, daß eine Änderung des Normierungspunktes ($\mu \to \tilde{\mu}$) durch eine entsprechende Änderung der Kopplungskonstanten ($\alpha \to \tilde{\alpha}$) bei gleichzeitiger Änderung der Normierung des Photonpropagators ($d \to \tilde{z}_3 d$) „kompensiert" werden kann. Es ist nun offensichtlich, daß die Transformationen (A IX.3) eine Gruppe bilden, deren Multiplikationsgesetz durch die Gleichung (A IX.4) gegeben ist.

An dieser Stelle muß darauf hingewiesen werden, daß die Renormierungsfaktoren z_c beliebiger Green-Funktionen und Kopplungskonstanten im allgemeinen voneinander verschieden sind. Im betrachteten Beispiel ist die Gleichheit der multiplikativen Faktoren z_3 (bzw. $\tilde{z}_3$) in beiden Teilen der Formeln (A IX.3) (bzw. (A IX.4)) eine spezielle Folge der Eichinvarianz der Elektrodynamik. Im allgemeinen Fall, z. B. für die skalaren Bestandteile s_p des Masseoperators des Elektrons in der transversalen Eichung

$$G^{-1}(p) = m - \hat{p} - \Sigma(p) = m s_m(p^2) - \hat{p} s_p(p^2),$$

hat die entsprechende Transformation die Form

$$s_p\left(\frac{p^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \alpha\right) = \tilde{z}_2 s_p\left(\frac{p^2}{\tilde{\mu}^2}, \frac{m^2}{\tilde{\mu}^2}, \tilde{z}_3\alpha\right), \tag{A IX.5}$$

wobei $\tilde{z}_3$ derselbe Faktor wie in (A IX.4) ist, jedoch $\tilde{z}_2 \neq \tilde{z}_3$ gilt. Diese Situation, wie sie in Formel (A IX.5) zum Ausdruck kommt, ist im allgemeinen für Green-Funktionen typisch.

Andererseits ist (A IX.4) ein Beispiel für solche multiplikativen Kombinationen von Green-Funktionen, die sich wie die Kopplungskonstanten selbst transformieren. In diesem Fall ist es vorteilhaft, das Produkt

$$\bar{\alpha}(x, y, \alpha) \equiv \alpha d(x, y, \alpha)\,, \qquad x = \frac{p^2}{\mu^2}, \qquad y = \frac{m^2}{\mu^2}, \tag{A IX.6}$$

einzuführen, das auch als invariante Ladung (oder „laufende" Kopplungskonstante) bezeichnet wird. Es genügt folgende einfache Funktionalgleichung

$$\bar{\alpha}(x, y, \alpha) = \bar{\alpha}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \bar{\alpha}(t, y, \alpha)\right). \tag{A IX.7}$$

(Beim Übergang von (A IX.4) in (A IX.7) wurde neben (A IX.6) auch die Normierungsbedingung (A IX.2) benutzt.) Die zu (A IX.5) analoge Gleichung schreibt sich dann in der Form

$$s(x, y, \alpha) = s(t, y, \alpha)\, s\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \bar{\alpha}(t, y, \alpha)\right). \tag{A IX.8}$$

Die soeben abgeleiteten Funktionalgleichungen (A IX.7) und (A IX.8) sind für alle Quantenfeldtheorien mit einer einzigen Kopplungskonstanten typisch; insbesondere gelten sie auch in der Quantenchromodynamik. Diese Gleichungen sind Ausdruck der Skaleninvarianz der Quantenfeldtheorie. Ihre Lösungen enthalten keinerlei Informationen über die Dynamik des betrachteten quantenfeldtheoretischen Modells. Die im Jahre 1956 von Ovsiannikov gefundene allgemeine Lösung der Gleichungen (A IX.7) und (A IX.8) enthält eine willkürliche Funktion zweier dimensionsloser Variablen. Damit führt die Berücksichtigung der Renormierungsgruppeneigenschaften zur Verringerung der Anzahl unabhängiger Variablen der Green-Funktionen und Vertexfunktionen um Eins.

3. Die Differentialgleichungen der Gruppe

Um aus den Gleichungen (A IX.7) und (A IX.8) weitere Konsequenzen für konkrete quantenfeldtheoretische Modelle ableiten zu können, hat man über die Störungstheorie entsprechende dynamische Informationen heranzuziehen. Hierfür eignen sich die Differentialgleichungen der

Gruppe; sie entsprechen einer infinitesimalen Transformation in den Gleichungen (A IX.7) und (A IX.8).

Differenzieren wir die Gleichungen (A IX.7) und (A IX.8) bei konstantem t und y nach x und setzen anschließend $t = x$, dann ergeben sich die Lie-Gleichungen der Gruppe zu

$$x \frac{\partial \bar{\alpha}(x, y, \alpha)}{\partial x} = \beta\left(\frac{y}{x}, \bar{\alpha}(x, y, \alpha)\right), \tag{A IX.9}$$

$$\beta(y, \alpha) = \left.\frac{\partial \bar{\alpha}(\xi, y, \alpha)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} \tag{A IX.10}$$

und

$$x \frac{\partial \ln s(x, y, \alpha)}{\partial x} = \gamma\left(\frac{y}{x}, \bar{\alpha}(x, y, \alpha)\right), \tag{A IX.11}$$

$$\gamma(y, \alpha) = \left.\frac{\partial \ln s(\xi, y, \alpha)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1}. \tag{A IX.12}$$

Differenzieren wir hingegen die Gleichungen (A IX.7) und (A IX.8) bei konstantem x und y nach t und setzen anschließend $t = 1$, so ergeben sich die folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$\left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha}\right] \bar{\alpha}(x, y, \alpha) = 0, \tag{A IX.13}$$

$$\left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha}\right] \ln s(x, y, \alpha) = \gamma(y, \alpha). \tag{A IX.14}$$

Diese Gleichungen wurden erstmals von Ovsiannikov angegeben und zur allgemeinen Lösung der Funktionalgleichungen herangezogen. Selbstredend sind diese linearen partiellen Differentialgleichungen den nichtlinearen Gleichungen (A IX.9) und (A IX.11) völlig äquivalent, sie erleichtern jedoch das Auffinden von Lösungen, die der gewöhnlichen Störungstheorie entsprechen.

Wir werden hier eine Reihe derartiger Lösungen für die Ultraviolettasymptotik ableiten, insbesondere die im Abschnitt 33.3. bereits diskutierte Formel für die invariante Ladung. Im ultravioletten Bereich gilt $|p^2| \gtrsim |\mu^2| \gg m^2$ und wir lassen künftig das zweite Argument $y = m^2/\mu^2$ in den Funktional- und Integralgleichungen weg. Damit geht (A IX.9) in

$$\frac{\partial \bar{\alpha}(x, \alpha)}{\partial \ln x} = \beta(\bar{\alpha}) \tag{A IX.15}$$

über. Diese Gleichung beschreibt die „Evolution" der invarianten Kopplungskonstanten $\bar{\alpha}$ bei wachsendem Impulsquadrat.

Wie bereits im Abschnitt 33.3. erwähnt wurde, beschreibt die Größe $\bar{\alpha}$ die effektive Änderung der Wechselwirkung bei wachsendem Quadrat des Impulses. Es läßt sich zeigen (siehe z.B. [1], Formel (41.20)), daß ihre Fourier-Transformierte

$$\varrho(r, \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \sin z \, d\left(-\frac{z^2}{r^2}, \alpha\right) \tag{A IX.16}$$

als effektiver Elektronradius interpretiert werden kann, der bei kleinen Abständen durch die Polarisation des Vakuums modifiziert wird und mit dem effektiven Potential $V(r)$ eines punktförmigen Elektrons über die Beziehung

$$V(r) = -\frac{e\varrho(r, \alpha)}{4\pi r}$$

zusammenhängt. Aus diesen Betrachtungen folgt, daß das Verhalten der Funktion $\bar{\alpha}(x, \alpha) = \alpha d(x, \alpha)$ bei großen (negativen) Werten von x unmittelbar mit dem Verhalten der effektiven Ladung $e\varrho(r, \alpha)$ bei kleinen Abständen r verbunden ist.

4. Der Zusammenhang mit der Störungstheorie. Die Ultraviolettasymptotik

Gleichung (A IX.15) enthält die unbekannte Funktion $\beta(\alpha)$, die sich jedoch störungstheoretisch durch Entwicklung nach Potenzen von α bestimmen läßt. Dazu hat man, ausgehend von der Definition (A IX.10), die Koeffizienten der in $\ln x$ linearen Terme von $d(x, \alpha)$ in den einzelnen Ordnungen der Störungstheorie zu bestimmen. Mit anderen Worten, wenn für $x \to \infty$

$$d(x, \alpha) = 1 + \alpha\beta_1 \ln x + \alpha^2(\gamma_2 \ln^2 x + \beta_2 \ln x) + \alpha^3(\delta_3 \ln^3 x + \gamma_3 \ln^2 x + \beta_3 \ln x) + \cdots$$

gilt, so ist

$$\beta(\alpha) = \beta_1\alpha^2 + \beta_2\alpha^3 + \beta_3\alpha^4 + \cdots . \tag{A IX.17}$$

Die Koeffizienten β_l sind die Beiträge, die von Diagrammen mit l Loops herrühren. In der Elektrodynamik sind die ersten drei Terme der Entwicklung der Beta-Funktion bekannt; sie lauten

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3\pi} + \frac{\alpha^3}{4\pi^2} + \frac{\alpha^4}{8\pi^3}\left(\frac{8}{3}\zeta(3) - \frac{101}{36}\right); \qquad \zeta(3) \approx 1{,}19 . \tag{A IX.18}$$

Die wichtigste Aussage dieser Formel besteht darin, daß alle Terme auf der rechten Seite positiv sind. Damit ist $\bar{\alpha}(x, \alpha)$ eine mit x monoton wachsende Funktion; gemäß Formel (A IX.16) wächst daher die effektive Ladung des Elektrons bei Verringerung des Abstandes, und wir erhalten das Bild der normalen Abschirmung, das qualitativ in Abb. 33.1 dargestellt ist.

Um einen expliziten Ausdruck für $\bar{\alpha}$ zu erhalten, beschränken wir uns in Formel (A IX.18) auf den ersten Term, d. h. auf den 1-Loop-Beitrag. Setzen wir ihn in die rechte Seite von Gl. (A IX.15) ein, so ergibt sich nach Ausführung der Integration (und unter Berücksichtigung der aus der Normierungsbedingung (A IX.2) folgenden Randbedingung $\bar{\alpha}(1, \alpha) = \alpha$)

$$\bar{\alpha}_1(x, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \dfrac{\alpha}{3\pi}\ln x}, \tag{A IX.19}$$

was mit Formel (33.5) übereinstimmt.

Diese Gleichung hat eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften. Erstens stellen wir fest, daß bei der Potenzreihenentwicklung nach α

$$\bar{\alpha}_1(x, \alpha) \approx \alpha + \frac{\alpha^2}{3\pi}\ln x + \frac{\alpha^3}{9\pi^2}\ln^2 x + \cdots$$

eine unendliche Folge von Termen der Gestalt $\alpha(\alpha \ln x)^n$ auftritt, die den höchsten logarithmischen Beiträgen jeder Ordnung der Störungstheorie entsprechen. Damit sind die Koeffizienten der höchsten Logarithmen nicht unabhängig voneinander und können durch den Koeffizienten beim „1-Loop-Logarithmus“ ausgedrückt werden.

Zweitens ist (A IX.19) als 1-Loop-Näherungslösung der Lie-Gleichung

$$\frac{\partial\bar{\alpha}_1(x, \alpha)}{\partial \ln x} = \frac{1}{3\pi}\bar{\alpha}_1^2(x, \alpha)$$

eine exakte Lösung der Funktionalgleichung (A IX.7) im ultravioletten Limes, d. h., sie genügt der Beziehung

$$\bar{\alpha}_1(x, \alpha) = \bar{\alpha}_1\left(\frac{x}{t}, \bar{\alpha}_1(t, \alpha)\right).$$

Das kann durch elementare Operationen nachvollzogen werden. Andererseits genügt jedoch keine endliche Teilsumme der Taylor-Entwicklung von $\bar{\alpha}_1(x, \alpha)$ dieser Gleichung. Dies demonstriert, daß die Synthese von Eigenschaften der Renormierungsgruppe mit Informationen aus den niedrigsten Ordnungen der Störungstheorie die selektive Aufsummation einer unendlichen Folge „führender“ Beiträge höherer Ordnungen ermöglicht und damit die approximativen Eigenschaften der Störungstheorie wesentlich verbessert.

Im betrachteten Fall ist der Anwendungsbereich der gewöhnlichen Störungstheorie (ohne Verwendung der Renormierungsgruppe) durch die Bedingung

$$\frac{\alpha}{3\pi}\ln x \ll 1$$

eingeschränkt, wogegen der Anwendungsbereich von Formel (A IX.19) dadurch beschränkt ist, daß der 2-Loop-Beitrag zur Beta-Funktion gegenüber dem 1-Loop-Beitrag klein sein muß. Unter Berücksichtigung von Formel (A IX.18) bedeutet dies, daß $\bar{\alpha} \ll 4\pi/3$ oder

$$1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln x \gg \frac{3\alpha}{4\pi} \approx \frac{1}{570}$$

gelten muß. Aus der letzten Abschätzung folgt insbesondere, daß man dem formal unbeschränkten Anwachsen der rechten Seite von (A IX.19) bei $x_* = \exp(3\pi/\alpha)$ vorerst keine Bedeutung beizumessen hat; vielmehr hat man zur Analyse des Verhaltens von $\bar{\alpha}(x, \alpha)$ bei Werten von x, die in der Nähe von x_* liegen, die Beiträge mit größerer Anzahl von Loops heranzuziehen.

5. Einige Anwendungen in der Quantenchromodynamik

In der Quantenchromodynamik sind ebenfalls drei Terme der Entwicklung der Beta-Funktion bekannt:

$$\beta(\alpha_s) = -\frac{33-2n}{12\pi}\alpha_s^2 - \frac{306-38n}{48\pi^2}\alpha_s^3 - \left(2857 - \frac{5033}{9}n + \frac{325}{27}n^2\right)\frac{\alpha_s^4}{128\pi^3} + \cdots. \tag{A IX. 20}$$

Hier sind im Unterschied zur Elektrodynamik alle Terme negativ, falls die Anzahl n der Flavourfreiheitsgrade (d. h. die Anzahl der Quarks) nicht zu groß wird. Deshalb fällt die effektive Kopplungskonstante in der Quantenchromodynamik, die sich vermöge der Beziehung

$$\bar{\alpha}_s(x, \alpha_s) = \alpha_s \Gamma^2(x, \alpha_s)\, \Delta^3(x, \alpha_s)\,, \qquad \alpha_s = \frac{g_{YM}^2}{4\pi} \tag{A IX.21}$$

aus dem 3-Gluonen-Vertex Γ und dem Gluon-Propagator Δ ergibt, mit wachsendem $|p^2|$, d. h. mit fallendem Abstand, und wir erhalten den in Abb. 33.2 dargestellten qualitativen Verlauf.

Beschränken wir uns auf die 1-Loop-Näherung und auf $n = 3$, so erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung (A IX.15) den Ausdruck

$$\bar{\alpha}_s(x, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{1 + \frac{9}{4\pi}\alpha_s \ln x}\,. \tag{A IX.22}$$

Dies ist die allgemein bekannte Formel für die asymptotische Freiheit (siehe (33.4)). Sie wird auch oft in der Form

$$\bar{\alpha}_s(p^2) = \frac{4\pi}{9\ln p^2/\Lambda^2} \tag{A IX.23}$$

dargestellt, wobei der sogenannte Skalenparameter Λ mit α_s und μ^2 durch

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp -\frac{4\pi}{9\alpha_s} \tag{A IX.24}$$

verknüpft ist.

Die gegenwärtigen experimentellen Werte gestatten nur eine genäherte numerische Bestimmung der in (A IX.20) und (A IX.21) eingehenden Parameter. Aus den Experimenten zur tiefinelastischen Streuung von Elektronen an Deuteronen und dem Zerfall der J/ψ Teilchen

ergibt sich als grobe Orientierung

$$\bar{\alpha}_s(100\ \text{GeV}^2) \sim 0{,}2\,.$$

Nach Formel (A IX.24) folgt daraus für den Skalenparameter der Wert $\Lambda = 300$ MeV. Es muß jedoch hervorgehoben werden, daß dieser Wert für α_s nur eine Information über dessen Größenordnung darstellt und daß ferner für $\alpha_s \sim 0{,}2$ der 2-Loop-Beitrag bereits 10% des 1-Loop-Beitrages erreicht; auf eine Präzisierung der Formeln (A IX.22)—(A IX.24), die aus diesem Grunde notwendig wird, verzichten wir hier.

Wir wenden uns nunmehr dem zweiten Typ von Gruppengleichungen zu, wie sie für die Green-Funktionen typisch sind (siehe (A IX.8), (A IX.11), (A IX.12) und (A IX.14)). Die Differentialgleichung (A IX.11) hat im ultravioletten Limes die Form

$$\frac{\partial \ln s(x, \alpha)}{\partial \ln x} = \gamma_s(\bar{\alpha})\,. \tag{A IX.25}$$

Die durch die Beziehung

$$\gamma_s(\alpha) = \left.\frac{\partial \ln s(x, \alpha)}{\partial \ln x}\right|_{x=1}$$

definierte Funktion $\gamma_s(\alpha)$ trägt den Namen *anomale Dimension* der Funktion $s(x, \alpha)$. Wie die Beta-Funktion kann sie störungstheoretisch bestimmt werden:

$$\gamma_s(\alpha) = \alpha\gamma_1 + \alpha^2\gamma_2 + \cdots\,. \tag{A IX.26}$$

Hierbei wurde ebenso wie in Formel (A IX.17) die Bezeichnung der Entwicklungskoeffizienten γ_l so gewählt, daß γ_l dem Beitrag der l-Loop-Diagramme entspricht.

Durch Kombination der Formeln (A IX.25) und (A IX.15) läßt sich zeigen, daß die Lösung der Gleichung (A IX.25) in der Form

$$s(x, \alpha) = \exp \int\limits_{\alpha}^{\bar{\alpha}(x,\alpha)} \frac{\gamma_s(a)}{\beta(a)}\, da \tag{A IX.27}$$

dargestellt werden kann. Entwickeln wir nun den Integranden dieser Gleichung mit Hilfe von (A IX.17) und (A IX.26) in eine Reihe nach Potenzen von α und integrieren wir termweise, so ergibt sich

$$s(x, \alpha) = \left(\frac{\bar{\alpha}(x, \alpha)}{\alpha}\right)^{\gamma_1/\beta_1} \exp\left\{\frac{\gamma_2\beta_1 - \gamma_1\beta_2}{\beta_1^2}\,[\bar{\alpha}(x, \alpha) - \alpha] + \cdots\right\}. \tag{A IX.28}$$

Der Faktor vor der Exponentialfunktion rührt allein von den 1-Loop-Beiträgen her, und der Faktor in der geschweiften Klammer enthält darüber hinaus 2-Loop-Beiträge. In der Elektrodynamik hat der Masseoperator des Elektrons eine anomale Dimension, die von der Eichung unabhängig ist. Mit den Formeln des Abschnitts 29.4. ergibt sich in 1-Loop-Näherung

$$\gamma_m(\alpha) = -\frac{3\alpha}{4\pi}$$

und dementsprechend

$$\frac{\bar{m}(x, \alpha)}{m} = \left(\frac{\bar{\alpha}(x, \alpha)}{\alpha}\right)^{-3/4}. \tag{A IX.29}$$

Der hier eingeführte Masseoperator geht in die asymptotische Form der Green-Funktion des Elektrons folgendermaßen ein:

$$G^{-1}(p, \alpha) = s_p(p^2, \alpha, d_l)\,\{m(p^2, \alpha) - \hat{p}\}\,.$$

Die analogen Rechnungen für den Masseoperator des Fermions (d. h. des Quarks) in der Quantenchromodynamik ergeben

$$\gamma_m(\alpha_s) = -\frac{\alpha_s}{\pi}.$$

Hieraus folgt die effektive („laufende") Masse der Quarks zu

$$\frac{\overline{m}(x, \alpha_s)}{m} = \left(\frac{\overline{\alpha}_s(x, \alpha_s)}{\alpha_s}\right)^{12/(33-2n)}; \qquad \text{(A IX.30)}$$

sie wurde in der letzten Zeit häufig im Rahmen des Hierarchieproblems der Wechselwirkungen in einheitlichen Feldtheorien ("Grand Unified Theories") diskutiert.

Ohne Mühe kann man sich schließlich davon überzeugen, daß die Gleichungen (A IX.27), (A IX.28), (A IX.29) und (A IX.30), die sich aus den Lösungen der genäherten Differentialgleichungen ergeben, der exakten Funktionalgleichung

$$s(x, \alpha) = s(t, \alpha)\, s\left(\frac{x}{t}, \overline{\alpha}(t, \alpha)\right)$$

genügen.

Aufgaben

Freie klassische Felder

A 1. Ausgehend von der Definition (2.7) für den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ zeige man unter Verwendung der Bewegungsgleichung (2.2), daß er der Kontinuitätsgleichung (2.8) genügt.

A 2. Man leite aus (2.13) und (2.14) die Formel (2.22) für den Drehimpulstensor des Vektorfeldes her. Dazu bestimme man zunächst, ausgehend von (1.6), einen expliziten Ausdruck für die in (2.20) eingehende Matrix A und anschließend für die in die infinitesimalen Änderungen der Feldfunktionen eingehende Matrix Ψ.

A 3. Unter Verwendung der Definitionen (2.22) zeige man durch direkte Berechnung, daß der Drehimpulstensor der Kontinuitätsgleichung genügt.

A 4. Man zeige, daß die Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$ zur Erhaltung des Spins führt.

A 5. Ausgehend von der Lagrange-Dichte (3.1) und unter Verwendung von (2.2) und (2.7) leite man die Bewegungsgleichung (3.2) und den Energie-Impuls-Tensor (3.3) des reellen skalaren Feldes ab.

A 6. Ausgehend von der Lagrange-Dichte (3.16) und unter Verwendung von (2.2), (2.7), (2.22) und (2.28) leite man die Bewegungsgleichungen und die expliziten Ausdrücke (3.17) für den Energie-Impuls-Tensor, den Spindrehimpuls und den Stromdichtevektor des komplexen Vektorfeldes ab.

A 7. Man untersuche das Feld der π-Mesonen, welches sich nach der adjungierten Darstellung, d. h. der Triplett-Darstellung der Isospin-Gruppe SU(2), transformiert. In der reellen Darstellung $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$, $\overset{*}{\pi}_a = \pi_a$ haben die Isospin-Transformationen folgende Gestalt:

$$\pi_a \to \pi_a' = \Lambda_{ab}(\alpha)\,\pi_b\,, \qquad \Lambda(\alpha) = \exp\left(-\mathrm{i}\omega_l \alpha_l\right).$$

Hierbei sind α_l ($l = 1, 2, 3$) die reellen Parameter (Winkel) und ω_l die Erzeugenden der Iso-Drehungen. Letztere kann man in der reellen Triplett-Darstellung folgendermaßen wählen:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. $(\omega_l)_{jk} = -\mathrm{i}\varepsilon_{ljk}$ (ε_{ljk} ist der vollständig antisymmetrische Einheits-Tensor dritten Ranges).
Man bestimme die Matrix O der unitären Transformation $T_l = O\omega_l O^{-1}$, die zu jener Darstellung führt, in der

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist.

A 8. Mit Hilfe des Noether-Theorems konstruiere man, ausgehend von der Lagrange-Dichte

$$\mathscr{L}_0(\boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_{,\nu}\boldsymbol{\pi}^{,\nu} - \frac{m^2}{2}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}\,,$$

die zugehörigen „Iso-Ströme" und die zeitlich konstanten „Iso-Ladungen". Man überprüfe, daß die Lagrange-Dichte invariant bezüglich der in Aufgabe A 7. betrachteten Transformationen ist.

A 9. In Analogie zur vorhergehenden Aufgabe betrachte man das Iso-Dublett der Nukleonen mit

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}, \qquad \Psi'_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}(\alpha)\,\Psi_\beta\,,$$

$$\Lambda(\alpha) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\tau_l\alpha_l\right)$$

und

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\Psi}(\mathrm{i}\hat{\partial} - M)\,\Psi$$

(τ sind die Pauli-Matrizen).

A 10. Man zeige, daß die zu (3.8) inversen Formeln folgende Gestalt besitzen:

$$\tilde{\varphi}^\pm(k) = \sqrt{2k_0}\,\varphi^\pm(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-3/2}\int \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}kx}\,[k_0\varphi(x) \mp \mathrm{i}\dot{\varphi}(x)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}\,.$$

A 11. Nach dem Übergang zur Impulsdarstellung zeige man durch direkte Berechnung, daß die „gleich-frequenten" Beiträge zur Energie und zum Impuls gleich Null sind, d. h., man zeige:

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}[\varphi^\pm_{,\nu}(x)\,\varphi^\pm_{,\nu}(x) + m^2\varphi^\pm(x)\,\varphi^\pm(x)] = 0,\ \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\dot{\varphi}^\pm(x)\,\varphi^\pm_{,k}(x) = 0\,.$$

A 12. Man leite die Ausdrücke (3.19) bis (3.21) für den Energie-Impuls-Vektor, den Spindrehimpulsvektor und die elektrische Ladung des komplexen Vektorfeldes ab. Dazu setze man die Fourier-Zerlegung (3.18) jeweils in die nullten Komponenten der Formeln (3.17) ein und führe die Integration über den Ortsraum aus.

A 13[1]). Man bestimme diejenige Lösung der Klein-Gordon-Fock-Gleichung

$$(\Box - m^2)\,\varphi(x) = 0\,,$$

die bestimmten vorgegebenen Anfangsbedingungen für φ und $\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial t$ auf der Ebene $t = y^0$ genügt. Man drücke die positiv- und negativ-frequenten Anteile der Feldfunktion $\varphi(x)$ durch $\varphi(t, \boldsymbol{y})$, $\dot{\varphi}(t, \boldsymbol{y})$ und die entsprechenden Anteile der Pauli-Jordan-Funktion

$$D^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^3\,\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\Theta(\pm k^0)\,\delta(k^2 - m^2)\,\mathrm{d}k = \frac{\mp\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{2k^0}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}\bigg|_{k_0=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}}$$

aus.

A 14. Man überzeuge sich davon, daß die Lagrange-Dichte (3.16) des Vektorfeldes unmittelbar auf die Klein-Gordon-Gleichung und die Lorentz-Bedingung führt.

A 15. Ausgehend von der Lagrange-Dichte (3.11) des Vektorfeldes leite man die Ausdrücke für $T_{\mu\nu}$ und P_ν ab und diskutiere ihren Unterschied zu den Gleichungen (3.17a) und (3.19).

A 16. Durch Übergang zum lokalen Repére (3.24) diagonalisiere man die quadratische Form (3.23) und leite die Formel (3.25) ab.

A 17. Man diagonalisiere den Ausdruck (3.26), der die Projektion des Spins eines Vektorfeldes auf die Bewegungsrichtung beschreibt, indem man gemäß (3.27) die Amplituden b_n zirkular polarisierter Zustände einführt.

A 18. Ausgehend von der Lagrange-Dichte (4.13) des elektromagnetischen Feldes, leite man die Ausdrücke für die räumlichen Dichten des Energie-Impuls-Vektors $T^{0\nu}$ und des Spindrehimpulsvektors $\boldsymbol{S}$ ab.

---

[1]) Kursiv gedruckte Nummern kennzeichnen Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad.

A 19. Unter Berücksichtigung der Lorentz-Bedingung leite man die Ausdrücke für den Energie-Impuls-Vektor und den Spindrehimpulsvektor des elektromagnetischen Feldes ab, indem man gemäß (4.22) zur Impulsdarstellung übergeht und die Zerlegung (4.23) bezüglich eines lokalen Repères benutzt.

A 20. Ausgehend von der Lagrange-Dichte (5.5) des Spinorfeldes, bestimme man den Energie-Impuls-Tensor (5.6) und den Stromdichtevektor (5.7).

A 21. Ausgehend von der Definition

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 ,$$

zeige man, daß

$$\gamma^\nu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\nu = 0 , \qquad \gamma^5\gamma^5 = I \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3)$$

gilt.

A 22. Unter Ausnutzung der Zyklizität der Spur und der Vertauschungsregeln (5.1) der Dirac-Matrizen beweise man, daß die Spur aller Matrizen (A II.2), die Einheitsmatrix ausgenommen, gleich Null ist.

A 23. Unter Verwendung des Ergebnisses der vorhergehenden Aufgabe beweise man die lineare Unabhängigkeit der 16 Matrizen (A II.2).

A 24. Man zeige, daß die Spur einer ungeraden Anzahl von Dirac-Matrizen gleich Null ist und leite eine Rekursionsrelation ab, welche die Spur eines Produkts von $2n$ Matrizen durch die Spuren gewisser Produkte von $2n - 2$ Matrizen ausdrückt.

A 25. Man berechne

$$\mathrm{Sp}\, \hat{k}_1\hat{k}_2 , \qquad \mathrm{Sp}\, [(\hat{p}_1 + m_1)(\hat{p}_2 + m_2)] ,$$

$$\mathrm{Sp}\, [\hat{k}_1(\hat{p}_1 + m_1)\hat{k}_2(\hat{p}_2 + m_2)] ,$$

$$\mathrm{Sp}\, [\hat{k}_1\hat{k}_2(\hat{p}_1 + m_1)(\hat{p}_2 + m_2)] .$$

A 26. Man führe in den Ausdrücken

$$\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma_\sigma, \quad \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\sigma, \quad \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varrho\gamma_\sigma$$

die Summation über σ aus.

A 27. Man zeige, daß

$$\mathrm{Sp}\, \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = 0 , \qquad \mathrm{Sp}\, \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varrho\gamma^\sigma\gamma^5 = 4i\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$$

gilt ($\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$ ist der vollständig antisymmetrische Einheitstensor 4. Ranges).

A 28. Ausgehend von den Ergebnissen der Aufgabe A 25. und der Analyse der Spur von sechs Faktoren der Art

$$\mathrm{Sp}\, [\hat{k}_1(\hat{p}_1 + m_1)\hat{k}_2(\hat{p}_2 + m_2)\hat{k}_3(\hat{p}_3 + m_3)] ,$$

$$\mathrm{Sp}\, [\hat{k}_1\hat{k}_2(\hat{p}_1 + m_1)(\hat{p}_2 + m_2)\hat{k}_3\hat{k}_4] ,$$

bestimme man die allgemeine Formel, welche

$$\mathrm{Sp}\, [\hat{k}_1\hat{p}_1\hat{p}_2\hat{k}_2\hat{p}_3\hat{k}_3 \dots \hat{p}_m \dots \hat{k}_n]$$

und

$$\mathrm{Sp}\, [\hat{k}_1\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{k}_2\hat{P}_3\hat{k}_3 \dots \hat{P}_m \dots \hat{k}_n]) \qquad (\hat{P}_i = \hat{p}_i + m_i)$$

miteinander verbindet.

A 29. Ausgehend von den Formeln (A II.16, 18, 20) für die Lorentz-Transformation von Spinoren leite man die expliziten Ausdrücke für die in (2.20) eingeführten Erzeugenden $A^{\psi(\mu\nu)}$ und $A^{\bar{\psi}(\mu\nu)}$ der „Drehungen" der Spinoren ψ und $\bar{\psi}$ in der (x^μ, x^ν)-Ebene ab und bestimme unter Verwendung von (2.24) den Ausdruck (5.8) für den Spin-Tensor des Spinorfeldes.

A 30. Unter Verwendung der Formeln (A II.18) für die Transformation eines Spinors bei Lorentz-Drehungen leite man aus (5.12) die Formeln (5.26) ab.

A 31. In der Darstellung (A II.5), (A II.7) bestimme man die normierten Lösungen $u^{s,\pm}(\boldsymbol{k})$ $(s = 1, 2)$ der Dirac-Gleichung, welche Eigenfunktionen des Helizitätsoperators

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\Sigma}}{|\boldsymbol{k}|}, \quad \Sigma^k = \frac{1}{2}\gamma^5\gamma^0\gamma^k$$

sind, und den Orthonormierungsbedingungen

$$\overset{*}{u}{}^{r,\mp}(\boldsymbol{k})\, u^{s,\pm}(\boldsymbol{k}) = \frac{k_0}{m}\,\delta^{rs}$$

genügen.

A 32. Man konstruiere denjenigen Projektionsoperator, der Zustände mit bestimmter Polarisation liefert.

Quantisierung freier Felder

B 1. Man bestimme die Eigenfunktionen ψ_n und die Realisierung der Operatoren a und a^+ des harmonischen Oszillators in der Orts- und in der Impulsdarstellung. Man zeige, daß folgende Beziehungen gelten:

$$\overset{+}{a}a = \check{n}, \quad a\overset{+}{a} = \check{n} + 1, \quad \check{n}\Psi_n = n\Psi_n, \quad a\Psi_0 = 0,$$

$$[a, \overset{+}{a}] = a\overset{+}{a} - \overset{+}{a}a = 1, \quad [a, a] = [\overset{+}{a}, \overset{+}{a}] = 0.$$

B 2. Ausgehend von den Vertauschungsrelationen der vorhergehenden Aufgabe und der Normierungsbedingung für den Grundzustand,

$$\overset{*}{\Psi}_0\Psi_0 = 1,$$

bestimme man die Norm des Zustands $\Psi_n = (\overset{+}{a})^n\,\Psi_0$.

B 3. Man berechne die Norm des Einteilchenzustands

$$\Phi_1 = \int d\boldsymbol{q}\, w(\boldsymbol{q})\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{q})\, \Phi_0, \quad \overset{*}{\Phi}_0\Phi_0 = 1,$$

wobei der Operator $\overset{+}{a}(\boldsymbol{q})$ den Vertauschungsrelationen (6.8) genügt und $w(\boldsymbol{q})$ eine c-Zahl-Funktion ist. Man betrachte den Grenzfall

$$w(\boldsymbol{q}) \to \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P})$$

für einen festen Vektor $\boldsymbol{P}$.

B 4. Ausgehend von den Vertauschungsrelationen (7.4) für den Ladungsoperator Q zeige man, daß für ein komplexes Feld die Operatoren $u^\pm$ die Ladung verringern, die Operatoren $\overset{*}{u}{}^\pm$ sie dagegen vergrößern; mit anderen Worten, daß z. B. aus $Q\Phi_q = q\Phi_q$ die

$$Q\overset{*}{u}{}^\pm\Phi_q = (q + 1)\,\overset{*}{u}{}^\pm\Phi_q$$

Relation folgt.

B 5. Man leite eine zu (7.4) analoge Gleichung für Isospin-Transformationen ab. Als Spezialfälle betrachte man: a) das Nukleonendublett $(I = 1/2)$, b) das Pionentriplett $(I = 1)$.

B 6. Man beweise die Relationen (7.14). Unter Verwendung der Lösung der Aufgabe B 5. leite man analoge Relationen für das Pionentriplett her.

B 7. Man bestimme den Ausdruck für den Drehimpulsoperator des skalaren Feldes in der Orts- und der Impulsdarstellung und leite die Vertauschungsrelationen für seine Komponenten her. Man zeige die Gültigkeit der Relationen

$$[M_{\mu\nu}, \varphi(x)] = \mathrm{i}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, \varphi(x)\,.$$

B 8. Ausgehend von der Bedingung der hermiteschen Konjugiertheit

$$(a^\pm(k))^+ = \overset{*}{a}{}^\mp(k)\,,$$

der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, von der Formel (7.19) sowie der positiven Definitheit der Metrik im Hilbert-Raum $\overset{*}{\Phi}\,|A|^2\,\Phi \geqq 0$ bestimme man den Typ der Vertauschungsrelationen für Teilchen mit ganz- bzw. halbzahligem Spin.

B 9. Man nehme an, daß das skalare Feld $\varphi(x)$ nach Fermi-Dirac und das Spinorfeld $\psi(x)$ nach Bose-Einstein quantisiert werde und erörtere das hieraus folgende Verhalten des Antikommutators $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ für $x = y$ bzw. des Kommutators $[\psi(x), \psi(y)]$ für $(x - y)^2 < 0$.

B 10. Ausgehend von den Kommutatoren (7.19) leite man die Vertauschungsrelationen (8.14) für das Vektorfeld her. Dazu benutze man den Übergang zum lokalen Repère (3.24).

B 11. In der Vertauschungsrelation (8.17) setze man $\mu = \nu = 0$ und beweise, daß der Kommutator für die „skalaren Photonen" die positive Definitheit der Metrik im Hilbert-Raum verletzt. *Hinweis*: Man multipliziere die Vertauschungsrelation für $a_0^+(\boldsymbol{q})$ und $a_0^-(\boldsymbol{k})$ mit $f(\boldsymbol{q})\,\overset{*}{f}(\boldsymbol{k})$ und integriere über $\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{k}$.

B 12. Unter Verwendung der Antivertauschungsrelationen (9.4) berechne man die Kommutatoren

$$[\overline{\psi}(x)\,\gamma^\nu\psi(x), \overline{\psi}(y)\,\gamma^\mu\psi(y)]\,,$$
$$[\overline{\psi}(x)\,\gamma^5\psi(x), \overline{\psi}(y)\,\gamma^5\psi(y)]$$

und analysiere ihr Verhalten außerhalb des Lichtkegels.

B 13. Man bestimme das Verhalten der Kommutatoren $[\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)]$ außerhalb des Lichtkegels (d. h. für $x \sim y$), falls

a) $\mathcal{L}(x) = e\colon \overline{\psi}(x)\,\hat{A}(x)\,\psi(x)\colon,$

b) $\mathcal{L}(x) = g\,\colon\overline{\psi}(x)\,\gamma^5\psi(x)\,\varphi(x)\colon.$

B 14. Man berechne die Fourier-Transformierte $\tilde{F}(q) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\,F(x)\,\mathrm{d}x$ folgender Produkte positiv- bzw. negativ-frequenter D- und S-Funktionen:

a) $F(x) = D^-(x)\,D^-(x)\,,$

b) $F(x) = \mathrm{Sp}\,[\gamma^5 S^-(x)\,\gamma^5 S^+(-x)]\,,$

c) $F(x) = \mathrm{Sp}\,[\gamma^\mu S^-(x)\,\gamma_\mu S^+(-x)]\,.$

B 15. Man berechne die Fourier-Transformierte des Vakuumerwartungswertes der Kommutatoren freier Spinor-Ströme

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\,\langle[J^\mu(x), J^\nu(y)]\rangle_0\,,$$

falls

a) $J^\nu(x) = \overline{\psi}(x)\,\gamma^\nu\psi(x)\,,$

b) $J^\nu(x) = \overline{\psi}(x)\,\gamma^\nu\gamma^5\psi(x)\,.$

B 16. Ausgehend von den zweikomponentigen Weyl-Gleichungen (9.15) für das masselose Spinorfeld zeige man, daß der Mittelwert des Helizitätsoperators

$$\lambda(\boldsymbol{p}) = \frac{(\boldsymbol{\sigma p})}{p^0}$$

in den Zuständen $\tilde{\varphi}_\pm$ gleich ± 1 ist, d. h., daß der Spin eines Neutrinos im Zustand $\tilde{\varphi}_+\,(\boldsymbol{p})$ in Bewegungsrichtung, im Zustand $\tilde{\varphi}_-(\boldsymbol{p})$ dieser entgegengerichtet ist.

B 17. Ausgehend von (9.24), (9.28) und (9.29) sowie der Unitaritätsbedingung für die Matrix γ^0 leite man Formel (9.30) her.

B 18. Ausgehend von Formel (9.29) bestimme man die explizite Form der Matrix C der Ladungskonjugation in der Standard-Darstellung (A II.5) und in der Helizitäts-Darstellung (9.21) der Dirac-Matrizen. Man kommentiere den Fakt, daß die Matrix C in beiden Darstellungen die gleiche Gestalt hat.

Wechselwirkende Felder

C 1. Man konstruiere Lagrange-Dichten mit minimalen Potenzen und höchstens ersten Ableitungen der Felder für die Wechselwirkung

a) eine skalaren Feldes φ mit einem Spinorfeld ψ,
b) eines pseudoskalaren Feldes φ mit einem Spinorfeld ψ,
c) eines reellen skalaren Feldes φ mit einem axialen Vektorfeld B_ν,
d) eines Spinorfeldes ψ mit einem Vektorfeld A_ν.

C 2. Man konstruiere Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten mit minimalen Potenzen der Felder, die gegenüber Isospin-Transformationen invariant sind, für die Wechselwirkung

a) eines Dubletts von Spinorfeldern mit einem Triplett von skalaren Feldern,
b) eines Dubletts von Spinorfeldern mit einem Triplett von pseudoskalaren Feldern,
c) eines Dubletts von Spinorfeldern mit einem Triplett von Vektorfeldern,
d) eines Dubletts von Spinorfeldern mit einem Triplett von axialen Vektorfeldern,
e) eines Dubletts von Spinorfeldern mit einem Triplett von skalaren Feldern mit vektorieller Koppelung,
f) eines Dubletts von Spinorfeldern mit einem Dublett von pseudoskalaren Feldern.

C 3. Man konstruiere die minimale, lokal eichinvariante Lagrange-Dichte für die Wechselwirkung a) eines Spinorfeldes mit dem elektromagnetischen Feld und b) eines skalaren Feldes mit dem elektromagnetischen Feld.

C 4. Ausgehend von den Formeln (11.3) und der Definition der kovarianten Ableitung (11.4) zeige man, daß sich letztere wie eine Feldfunktion transformiert, d. h., daß Formel (11.6) gilt.

C 5. Ausgehend von der Definition (11.7) und dem Transformationsgesetz (11.5) für das Yang-Mills-Feld bestimme man das Transformationsgesetz für den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$.

C 6. Man konstruiere ein Modell der Wechselwirkung eines Yang-Mills-Feldes mit einem Triplett skalarer Mesonen φ und einem Dublett von Fermionen ψ, das invariant bezüglich der Eichgruppe SU(2) ist.

C 7. Man bestimme die statischen Lösungen $(\partial\varphi/\partial t = 0)$ des Modells

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} - \frac{h^2}{4}[\varphi^2(z, t) - \varphi_0^2]^2$$

mit spontaner Symmetriebrechung, welche den Randbedingungen $\varphi(z, \pm\infty) = \pm\varphi_0$ genügen. Hierbei ist $\varphi(z, t)$ eine Feldfunktion in der zweidimensionalen Raum-Zeit $x = (z, t)$, h^2 und φ_0^2 sind positive Konstanten. Man diskutiere den Charakter der Lösungen hinsichtlich der Lokalisierung von Energie und Impuls.

C 8. Mittels einer linearen Substitution diagonalisiere man die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{L}_0(\varphi_1; m_1) + \mathcal{L}_0(\varphi_2; m_2) + g\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,,$$

wobei

$$\mathcal{L}_0(\varphi; m) = \frac{1}{2}\,\partial_\nu\varphi\,\partial^\nu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2$$

ist.

C 9. Man löse die Aufgabe C 8. für die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\varphi; m) + g\varrho(x)\,\varphi(x)\,.$$

C 10. Man bestimme den Operator $U(\alpha)$, der eine unitäre Transformation der Bose-Operatoren a und a^+, die den Vertauschungsrelationen

$$[a, \overset{+}{a}] = a\overset{+}{a} - \overset{+}{a}a = 1\,, \qquad [a, a] = [\overset{+}{a}, \overset{+}{a}] = 0$$

genügen, in die neuen Operatoren

$$A = U^{-1}(\alpha)\, aU(\alpha) = a + \alpha$$

und

$$\overset{+}{A} = U^{-1}(\alpha)\, \overset{+}{a}U(\alpha) = \overset{+}{a} + \alpha$$

realisiert, wobei α eine reelle Zahl ist.

C 11. Man bestimme die explizite Gestalt des Operators U, welcher eine unitäre Transformation der den Relationen

$$[a, \overset{+}{a}] = [b, \overset{+}{b}] = 1\,,$$

$$[a, b] = [a, \overset{+}{b}] = [\overset{+}{a}, b] = [\overset{+}{a}, \overset{+}{b}] = 0$$

genügenden Bose-Operatoren a, $\overset{+}{a}$, $\overset{+}{b}$ und b in die neuen Operatoren

$$A = U^{-1}(\varphi)\, aU(\varphi) = a\cos\varphi + b\sin\varphi\,,$$

$$B = U^{-1}(\varphi)\, bU(\varphi) = b\cos\varphi - a\sin\varphi$$

realisiert.

C 12. Man führe die kanonische Quantisierung der Lagrange-Dichte der Aufgabe C 8. durch Man leite die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen her.

C 13. Man diagonalisiere den Hamilton-Operator

$$H = H_0 + H_1\,, \qquad H_0 = \omega\overset{+}{a}a + \varepsilon\overset{+}{b}b\,, \qquad H_1 = g(\overset{+}{a}b + a\overset{+}{b})\,,$$

wobei die Bose-Operatoren a und b den Relationen

$$[a, \overset{+}{a}] = [b, \overset{+}{b}] = 1\,,$$

$$[a, b] = [a, \overset{+}{b}] = [\overset{+}{a}, b] = [\overset{+}{a}, \overset{+}{b}] = 0$$

genügen. Man konstruiere die Eigenzustände von H und drücke diese a) durch die Feldoperatoren der diagonalen Darstellung, und b) durch die Eigenzustände des freien Hamilton-Operators H_0 aus.

C 14. Man führe die Aufgabe C 13. für den Hamilton-Operator

$$H = \int \omega(\boldsymbol{k})\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} + \int g(\boldsymbol{k}^2)\, \big(\overset{+}{a}(-\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})\big)\, \mathrm{d}\boldsymbol{k};$$

$$[a(\boldsymbol{k}), \overset{+}{a}(\boldsymbol{q})] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q})$$

aus.

C 15. In den Ausdrücken für die Verschiebung der Vakuum-Energie und der Norm der Eigenzustände der Aufgabe C 14. betrachte man den Übergang zum lokalen relativistischen Grenzfall

$$g(\boldsymbol{k}^2) = \frac{g}{[2\omega(\boldsymbol{k})]^{1/2}}\,, \qquad \omega(\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{1/2}\,.$$

C 16. Man beweise, daß im Ein-Nukleonen-Sektor die Lösung des Modells des schweren Nukleons durch die Lösung von Gl. (13.9) gegeben wird.

C 17. Durch direktes Einsetzen überzeuge man sich davon, daß der Ausdruck

$$\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(1)}(\boldsymbol{k}) = \overset{+}{b}(\boldsymbol{k})\, \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)} + g(\boldsymbol{k})\, \Psi_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}^{(0)} \tag{13.23}$$

der Gleichung

$$H\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(1)}(\boldsymbol{k}) = (M - \Delta M + \omega(\boldsymbol{k}))\, \Psi_{\boldsymbol{p}}^{(1)}(\boldsymbol{k}) \tag{13.22}$$

genügt, wobei der Zustand $\Psi_{\boldsymbol{p}}^{(0)}$ durch die Relation (13.16) definiert ist und der Gleichung (13.18) genügt; H ist der Hamilton-Operator (13.1)—(13.3) des Modells des schweren Nukleons.

C 18. Man bestimme die allgemeine Form der Kerne $\omega(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q})$ und $J(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ des Hamilton-Operators

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \omega(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q})\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{k})\, a(\boldsymbol{q}) \\ &\quad + \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}_2\, J(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2; \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{k}_1)\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{k}_2)\, a(\boldsymbol{q}_1)\, a(\boldsymbol{q}_2)\,, \end{aligned}$$

wenn dieser ein System beschreiben soll, für das die Teilchenzahl und der räumliche Impuls erhalten bleibt.

C 19. Man bestimme die explizite Gestalt der Funktionen ω und J sowie die Quantisierungsregeln der Operatoren a und a^+ im Hamilton-Operator der Aufgabe C 18. so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) der Hamilton-Operator H beschreibt die Gesamtenergie eines Systems einheitlich geladener, identischer, nichtrelativistischer Bose-Teilchen mit dem klassischen Coulomb-Potential

$$V(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}\,,$$

b) der Hamilton-Operator H beschreibt die Gesamtenergie eines Systems identischer relativistischer Fermionen (z.B. Nukleonen) mit dem Yukawa-Potential

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{g^2}{4\pi} \frac{\exp(-m\,|\boldsymbol{x}|)}{|\boldsymbol{x}|}\,.$$

Streumatrix

D 1. Durch Iteration löse man die Schrödinger-Gleichung für die S-Matrix

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = H(t)\, S(t)\,.$$

Man untersuche das n-te Glied der Iteration und stelle die Lösung als zeitgeordnete Exponentialfunktion dar.

D 2. Man betrachte folgende Lagrange-Dichten, in denen $\varphi(x)$ ein skalares Feld, $\boldsymbol{\varphi}(x)$ das pseudoskalare Isotriplett der π-Mesonen, $\Psi = \{\psi_p, \psi_n\}$ das Isodublett der Nukleonen, $e(x)$ das Elektron-, $\mu(x)$ das Müon- und $\nu(x)$ das Neutrinofeld bezeichnen:

a) $\mathscr{L} = g\varphi^3(x)$;

b) $\mathscr{L} = h\varphi^4(x)$;

c) $\mathscr{L} = h(\varphi(x)\,\varphi(x))^2$;

d) die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte des Elektron-, Nukleon- bzw. Pionenfeldes mit dem elektromagnetischen Feld;

e) $\mathscr{L} = g\overline{\Psi}(x)\,\boldsymbol{\tau}\gamma^5\Psi(x)\,\varphi(x)$;

f) $\mathscr{L} = (f/\mu)\,\overline{\Psi}(x)\,\boldsymbol{\tau}\gamma^5\gamma^\nu\Psi(x)\,\partial_\nu\varphi(x)$;

g) $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{(2c)} + \mathscr{L}_{(2e)}$;

h) $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{(2c)} + \mathscr{L}_{(2f)}$;

i) $\mathscr{L} = \frac{G}{\sqrt{2}}\,j_\alpha(x)\,\overset{+}{j}{}^\alpha(x)$ mit $j_\alpha = l_\alpha + h_\alpha$

und

$$l_\alpha = \bar{\nu}_e(x)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,e(x) + \bar{\nu}_\mu(x)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,\mu(x)\,,$$
$$h_\alpha = \bar{\psi}_p(x)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,\psi_n(x) + f_\pi\,\partial_\alpha\pi^-(x)\,.$$

Für jede dieser Lagrange-Dichten schreibe man mit Hilfe des zweiten Wick-Theorems das zeitgeordnete Produkt $\mathrm{T}(\mathscr{L}(x)\,\mathscr{L}(y))$ in der Normalform auf.

D 3. Man behandle ebenso die Lagrange-Dichte des Yang-Mills-Feldes:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{YM}} = -\,(1/4)\,F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

mit

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu + \mathrm{i}g t^{abc} B^b_\mu B^c_\nu\,,$$

wobei t^{abc} die Strukturkonstanten der entsprechenden Lie-Gruppe sind. *Hinweis*: Man sondere aus $\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ die quadratischen Glieder aus und betrachte den verbleibenden Teil als Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte.

D 4. Für die Lagrange-Dichten der Aufgaben D 2.a) bis D 2.c) gebe man die Normalform für die zeitgeordneten Produkte $\mathrm{T}(\mathscr{L}(x)\,\mathscr{L}(y)\,\mathscr{L}(z))$ an.

D 5. Für die Lagrange-Dichten der Aufgaben D 2. und D 3. gebe man die Feynman-Regeln in der Impulsdarstellung an.

D 6. Ausgehend von den in Aufgabe D 2. angeführten Kombinationen von Lagrange-Dichten zeichne man die einfachsten Feynman-Diagramme und gebe in der Impulsdarstellung die zugehörigen Beiträge zur S-Matrix für folgende Prozesse an:

a) $e^+e^- \to p\bar{p}$;

b) $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$;

c) die Streuung eines π^+ an einem Proton;

d) $\pi^+\pi^- \to \pi^+\pi^-$, $\pi^+\pi^+ \to \pi^+\pi^+$;

e) die Yukawa-Streuung $np \to np$;

f) die Compton-Streuung $\gamma p \to \gamma p$;

g) die Møller-Streuung $ep \to ep$;

h) $\pi^0 \to 2\gamma$;

i) die Wechselwirkung von Neutronen mit Photonen;

j) $\pi^\pm \to \mu^\pm\nu$;

k) $\pi^+p \to \pi^+\pi^0 p$;

l) $\mu \to e\nu\tilde{\nu}$.

Feynman-Diagramme und -Regeln

E 1. Man leite die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung zweier Fermionen her.

E 2. Man leite die Formeln für die Wahrscheinlichkeiten des Zerfalls eines Teilchens in zwei bzw. in drei Teilchen und für die mittlere Lebensdauer des zerfallenden Teilchens her.

E 3. Unter Verwendung der Resultate der Aufgabe D 6. berechne man den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Elektron-Positron-Annihilation in folgenden Kanälen:

a) $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$;

b) $e^+e^- \to 2\gamma$;

c) $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$.

E 4. Man berechne die mittlere Lebensdauer der Primärteilchen in folgenden Zerfallsprozessen:

a) $\mu^- \to e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$;

b) $\pi^\pm \to \mu^\pm \nu_\mu$.

Hinweis: Man benutze die Resultate der Aufgaben D 2.d), e), i). Die so abgeleiteten Resultate vergleiche man mit den experimentellen Werten, die man z.B. [21] entnehmen kann.

E 5. Man berechne die Energieverteilung der beim β-Zerfall

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e$$

entstehenden Elektronen. *Hinweis*: Man benutze die in Aufgabe 2 D.i) angegebene Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte. Das Resultat vergleiche man mit den experimentellen Daten, wie sie in [21], Abschnitt IV. angeführt sind.

E 6. Man berechne das Verhältnis der partiellen Halbwertsbreiten der Zerfälle

$$\varphi \to \begin{cases} K^+K^- \\ K^0\tilde{K}^0 \end{cases}$$

in Abhängigkeit vom Spin des φ-Mesons.
Die Teilchen haben folgende Eigenschaften:

φ	Masse 1019, Parität = −,	Spin = ?,	Isospin 0,
$K^\pm$	Masse 494, Parität = −,	Spin 0,	Isospin 1/2,
$K^0, \tilde{K}^0$	Masse 498, Parität = −.	Spin 0,	Isospin 1/2,

Unter Verwendung des experimentellen Wertes

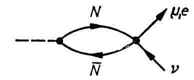
$$\Gamma(\varphi \to K^+K^-)/\Gamma(\varphi \to K^0\tilde{K}^0) \simeq 1{,}5$$

gebe man den wahrscheinlichen Wert des Spins des φ-Mesons an.

E 7. Man berechne das Verhältnis der Zerfallswahrscheinlichkeiten der $\pi^\pm$-Mesonen in den Kanälen

$$\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu \quad \text{und} \quad \pi^\pm \to e^\pm + \nu_e$$

und vergleiche es mit dem Verhältnis der experimentellen Werte $1:(1{,}24 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-4}$. *Hinweis*: Benutze den in folgendem Diagramm dargestellten Zerfallsmechanismus



und entnehme die Lagrange-Dichten der schwachen Wechselwirkung der Aufgabe D 2.

Berechnung von Integralen und Divergenzen

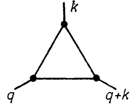
F 1. Berechne die Differenz der Feynman-Integrale $I(k) - I(0)$, wobei

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int D^c(q)\, D^c(k - q)\, dq$$

dem Selbstenergie-Diagramm zweiter Ordnung für skalare Mesonen mit der Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = (g/3) :\varphi^3(x):$ entspricht. Die Berechnung führe man auf die beiden folgenden Arten durch:

a) mittels Übergang zur α-Darstellung,
b) unter Verwendung der Feynman-Parameter.

F 2. Man berechne ebenfalls auf die beiden genannten Arten das Vertex-Diagramm dritter Ordnung für Mesonen in der Theorie $\mathcal{L} = g\varphi^3$:



F 3. Man berechne die mittlere partielle Lebensdauer τ_π des π-Mesons, die sich aus dem Zerfall $\pi^0 \to 2\gamma$ über einen virtuellen Zwischenzustand $N\overline{N}$ ergibt. Durch Vergleich mit dem bekannten experimentellen Wert der Lebensdauer τ_π bestimme man die Kopplungs-Konstante g der Pion-Nukleon-Wechselwirkung. *Hinweis*: Man benutze die Resultate der Aufgaben E 2. und D 2. d), e).

F 4. Man berechne für die Quantenelektrodynamik den Beitrag des Selbstenergie-Diagramms zweiter Ordnung des Elektrons zur S-Matrix. Für den Photonenpropagator wähle man eine beliebige Eichung, d. h.

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2}\left\{\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} d_l\right\}.$$

Man verwende drei Regularisierungsmethoden:

a) Die Pauli-Villars-Regularisierung

$$\frac{1}{m^2 - p^2} \to \frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{M^2 - p^2};$$

b) den Impuls-cut-off des virtuellen Photons bei $p^2 = \Lambda^2$;

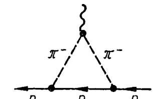
c) die Dimensionsregularisierung.

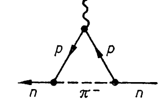
Man untersuche das Verhalten der sich ergebenden Ausdrücke für Λ^2, $M^2 \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ und gebe die zu (24.16) und (24.17) analogen Formeln an.

Man bestimme den Wert d_l, bei dem das betrachtete Diagramm frei von Divergenzen ist.

F 5. Man berechne den Schwinger-Beitrag zum anomalen magnetischen Moment des Elektrons, der dem in Abb. 24.2b) dargestellten Vertex-Diagramm entspricht. *Hinweis*: Man benutze die Formeln (24.24) bis (24.26) und (30.4).

F 6. Ausgehend von der Lagrange-Dichte der Aufgabe D 2. d) und e) berechne man das anomale magnetische Moment des Neutrons. *Hinweis*: Man betrachte folgende Vertex-Diagramme:





Renormierung

G 1. Man berechne den Beitrag des Selbstenergie-Diagramms zweiter Ordnung eines Mesons in der Theorie mit kubischer Selbstwirkung

$$\mathcal{L}(x) = \frac{g}{3} :\varphi^3(x):$$

und beseitige die Divergenzen.

G 2. Man bestimme den maximalen Divergenzgrad der Vertizes einer skalaren Theorie mit potenzartiger Selbstwechselwirkung

$$\mathcal{L}_I(x) = h :\varphi^k(x):$$

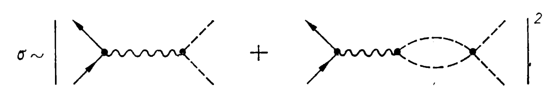
in der N-dimensionalen Raum-Zeit. Man bestimme die möglichen Werte der Zahlenpaare (N, k) für renormierbare Modelle.

G 3. Man bestimme die Amplituden der $\pi\pi$-Streuung in zweiter Ordnung der Theorie

$$\mathcal{L}_I(x) = -\frac{4\pi^2}{3} h(\overset{*}{\varphi}(x)\,\varphi(x))^2 .$$

Man bestimme die Schwellenwerte (bei $s = (p_1 + p_2)^2 = 4m_\pi^2$) der Amplituden und der Wirkungsquerschnitte der elastischen Streuung $\pi^+\pi^0$, $\pi^0\pi^0$.

G 4. Man bestimme den Wirkungsquerschnitt σ des Prozesses $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ unter Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung in α und h,



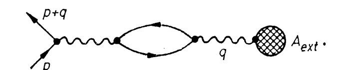
für eine Theorie mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_i(x) = eA^\nu(x)\,\{\bar{\psi}(x)\,\gamma_\nu\psi(x) + i\overset{*}{\varphi}(x)\,T_3\,\partial_\nu\varphi(x)\} + \frac{4\pi^2}{3} h(\overset{*}{\varphi}(x)\,\varphi(x))^2 .$$

G 5. Man bestimme die von der Vakuumpolarisation herrührende Korrektur des Coulomb-Gesetzes

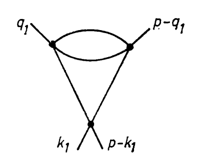
$$A^0_{\text{ext}}(q) = \frac{1}{|q|^2},$$

die durch das Diagramm



gegeben ist.

G 6. Man bestimme den S-Matrix-Beitrag des Diagramms dritter Ordnung



für die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_I(x) = -\frac{4\pi^2}{3}h\varphi^4(x) .$$

Man formuliere die R-Operation, beseitige die Divergenzen und erörtere die Struktur der willkürlichen endlichen Konstanten im Endergebnis.

Literatur

[1] Боголюбов, Н. Н.; Ширков, Д. В.: Введение в теорию квантованных полей. 3-е изд. — Москва: Наука 1976.

[2] Ахиезер, А. И.; Берестецкий, В. Б.: Квантовая электродинамика. 3-е изд. — Москва: Наука 1969.
ACHIEZER, A. I.; BERESTEZKI, V. B.: Quantenelektrodynamik. – Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962.

[3] BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D.: Relativistic Quantum Fields, Vol. 2. – New York: McGraw Hill 1965.
BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D.: Relativistische Quantenfeldtheorie. – Mannheim: Bibliographisches Institut 1967.
Бьеркен, Дж.; Дрелл, С.: Релятивистская квантовая теория. — Москва: Наука 1978.

[4] Блохинцев, Д. И.; Основы квантовой механики. 5-е изд. — Москва: Наука 1976.
BLOCHINZEW, D. I.: Grundlagen der Quantenmechanik. 6. Aufl. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1968.

[5] Боголюбов, Н. Н.; Лекции по квантовой статистике. В т. 2 „Избранных трудов" в трех томах. — Киев: Наукого думка 1970.

[6] Боголюбов, Н. Н.: Избранные труды по статистической физике. — Москва: Изд-во МГУ 1979.

[7] Боголюбов, Н. Н.; Логунов, А. А.; Тодоров, И. Т.; Основы аксиоматического подхода в квантовой теория поля. — Москва: Наука 1969.

[8] Давыдов, А. С.: Квантовая механика. 2-е изд. — Москва: Наука 1973.
DAWYDOW, A. S.: Quantenmechanik, 6. Aufl. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1981.

[9] DIRAC, P. A. M.: Lectures on Quantum Mechanics. – New York: Belfer Graduate School of Science. Yeshiva University 1964.
Дирак, П. А. М.: Лекции по квантовой механике. — Москва: Мир 1968.

[10] DIRAC, P. A. M.: The Principles of Quantum Mechanics. 4th Ed. – Oxford: Clarendon Press 1958.
Дирак, П. А. М.: Принципы квантовой механики. — Москва: Наука 1979.

[11] Елютин, П. В.; Кривченков, В. Д.: Квантовая механика. — Москва: Наука 1976.

[12] FEYNMAN, R. P.: The Theory of Fundamental Processes. – New York: W. A. Benjamin Inc. 1962.
Фейнман, Р. П.: Теория фундаментальных процессов. — Москва: Наука 1978.

[13] Грид, А. А.; Мамаев, С. Г.; Мостепаненко, В. М.: Квантовые эффекты в интенсивных внешных полях. — Москва: Атомиздат 1980.

[14] ITZYKSON, C.; ZUBER, C.-B.: Quantum Field Theory. – New York: McGraw Hill 1980.

[15] Киржниц, Д. А.: Полевые методы теории многих частиц. — Москва: Наука 1963.

[16] Klauder, J. R.; Sundarshan, E. C. G.: Fundamentals of Quantum Optics. — New York, Amsterdam: W. A. Benjamin Inc. 1968.
Клаудер, Дж., Сударшан, З.: Основы квантовой оптики. — Москва: Мир 1970.

[17] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М.: Квантовая механика. — Москва: Наука 1974.
Landau, L. D.; Lifschitz, E. M.: Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band III: Quantenmechanik. 6. Aufl. — Berlin: Akademie-Verlag 1979.

[18] Lipkin, H.: Quantum Mechanics. New Approaches to Selected Topics. — Amsterdam — London: North Holland Publ. Comp. 1973.
Липкин, Г.: Квантовая механика. — Москва: Мир 1977.

[19] Медведев, Б. В.: Начала теоретической физики. — Москва: Наука 1977.

[20] Messiah, A.: Quantum Mechanics, Vol. I. — Amsterdam: North Holland Publ. Comp. 1970.
Мессиа, А.: Квантовая механика, т. I. — Москва: Наука 1978.

[21] Perkins, D. H.: Introduction to High Energy Physics. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Comp. 1972.
Перкинс, Д.: Введение в физику высоких энергий. Москва: Мир 1975.

[22] Славнов, А. А.; Фаддеев, Л. Д.: Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — Москва: Наука 1978.

[23] Wigner, E. P.: Symmetrics and Reflections. — Bloomington — London: Indiana University Press 1970.
Вигнер, Е.: Этюды о симметры. — Москва: Мир 1971.

[24] Владимиров, В. С.: Уравнения математической физики. 3-е. изд. — Москва: Наука 1976.
Wladimirov, W. S.: Gleichungen der mathematischen Physik. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972.

[25] Завьялов, О. И.: Перенормированные диаграммы фейнмана. — Москва: Наука 1979.

Sachverzeichnis

N. N. Bogoljubov/D.V. Širkov

Quantenfelder

Die Theorie der Quantenfelder gehört zusammen mit der statistischen Physik und der allgemeinen Relativitätstheorie zu den Gebieten der theoretischen Physik, die uns besonders tiefe Einsichten in die Struktur der Materie und ihrer Erscheinungsformen geboten haben. In ihrer nichtrelativistischen Fassung gehört sie auch zu den Grundlagen der modernen Vielteilchen- und Festkörperphysik.

Dieses Buch vermittelt sowohl die wichtigsten allgemeinen Ideen und Methoden der Quantenfeldtheorie als auch ihre Rechenverfahren. Auf der klassischen Theorie freier Felder aufbauend, geht es auf die Quantisierung freier Felder ein und behandelt anschließend die störungstheoretische Formulierung der Quantentheorie wechselwirkender Felder. Viele in der Beschreibung physikalischer Erscheinungen grundlegende Begriffe (spontane Symmetriebrechung, Higgs-Mechanismus, Bogoljubov-Transformation, Dimensionsregulierung) und Theorien (Quantenelektrodynamik, Eichfeldtheorien) werden erläutert und im Zusammenhang mit ihren Anwendungen (Salam-Weinberg-Theorie, Quantenchromodynamik) vorgestellt. Die für praktische Fragen wichtige Störungstheorie wird besonders ausführlich behandelt.

Das Buch beruht auf Vorlesungen, die die Autoren an der Moskauer Universität für Studenten der theoretischen Physik oder der experimentellen Hochenergiephysik gehalten haben. Bei der Übersetzung ins Deutsche wurde der Text erweitert, um neueste Entwicklungen zu berücksichtigen. Weitergehende Erklärungen und zahlreiche Formeln in neun Anhängen machen das Buch auch für den Spezialisten interessant. Ebenfalls im Anhang findet der Leser eine Sammlung von Übungsaufgaben, die dazu beitragen, das gebotene Wissen zu festigen, zu vertiefen und vor allen Dingen anwendbar zu machen.

physik-verlag

ISBN 3-87664-105-5